

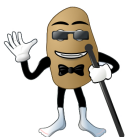
Drgania

Maciej J. Mrowiński

mrow@if.pw.edu.pl

Wydział Fizyki
Politechnika Warszawska

10 stycznia 2017



Prosty ruch harmoniczny

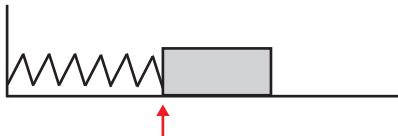
Prosty ruch harmoniczny

Ruch drgający, w którym na ciało działa siła proporcjonalna do wychylenia z punktu równowagi, skierowana zawsze w kierunku tego punktu równowagi.

Prosty ruch harmoniczny

Prosty ruch harmoniczny

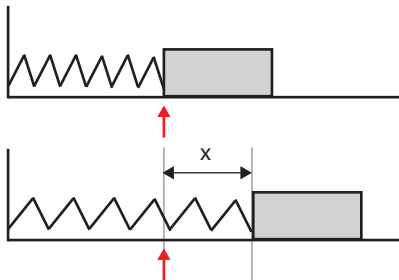
Ruch drgający, w którym na ciało działa siła proporcjonalna do wychylenia z punktu równowagi, skierowana zawsze w kierunku tego punktu równowagi.



Prosty ruch harmoniczny

Prosty ruch harmoniczny

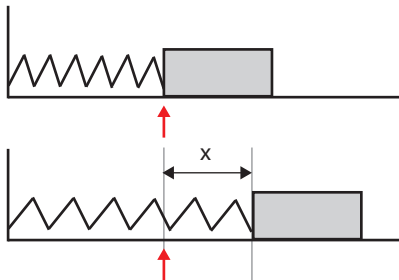
Ruch drgający, w którym na ciało działa siła proporcjonalna do wychylenia z punktu równowagi, skierowana zawsze w kierunku tego punktu równowagi.



Prosty ruch harmoniczny

Prosty ruch harmoniczny

Ruch drgający, w którym na ciało działa siła proporcjonalna do wychylenia z punktu równowagi, skierowana zawsze w kierunku tego punktu równowagi.



$$F = -kx \text{ (prawo Hooke'a)}$$

Łączenie sprężyn

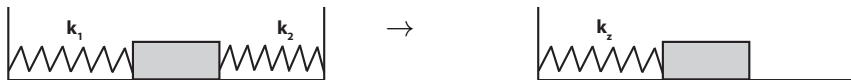


Łączenie sprężyn

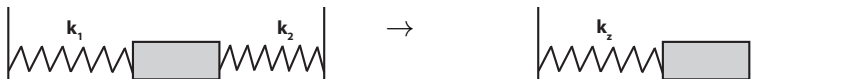


$$k_z = k_1 + k_2$$

Łączenie sprężyn

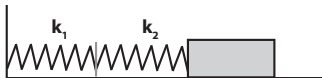


Łączenie sprężyn

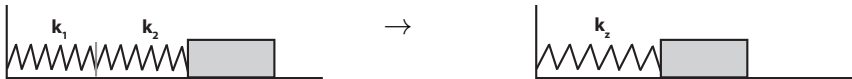


$$k_z = k_1 + k_2$$

Łączenie sprężyn

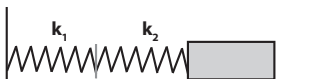


Łączenie sprężyn



$$\frac{1}{k_z} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Łączenie sprężyn

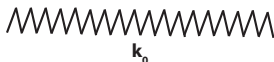


→

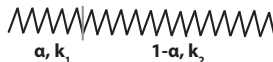


$$\frac{1}{k_z} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

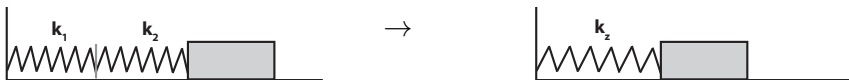
Przecięta sprężyna:



→

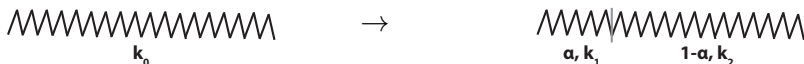


Łączenie sprężyn



$$\frac{1}{k_z} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Przecięta sprężyna:



$$k_1 = \frac{k_0}{\alpha}, \quad k_2 = \frac{k_0}{1 - \alpha}$$

Równanie oscylatora harmonicznego

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

Równanie oscylatora harmonicznego

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ - częstość

Równanie oscylatora harmonicznego

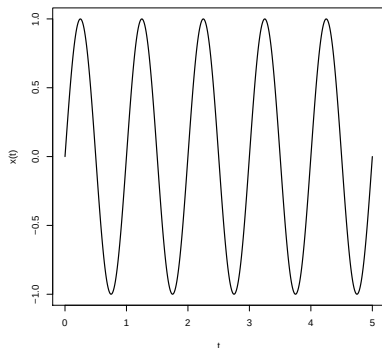
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

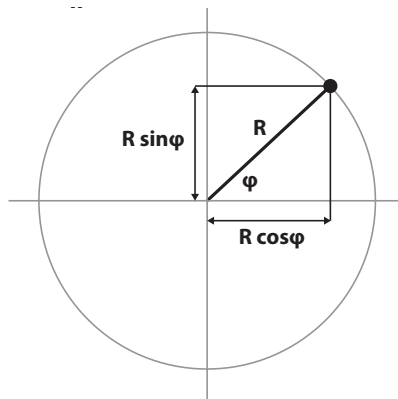
gdzie $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ - częstość

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

- A - amplituda
- ϕ_0 - przesunięcie fazowe
- $\omega_0 t + \phi_0$ - faza
- $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ - okres
- $f = \frac{1}{T}$ - częstotliwość



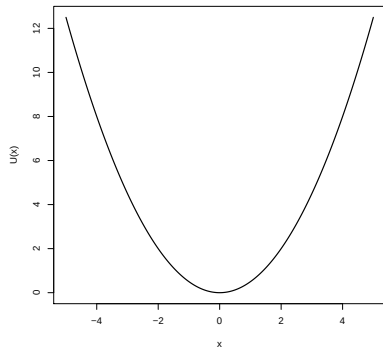
Związek z ruchem po okręgu



Ruch po okręgu ze stałą prędkością kątową ω ($\varphi = \omega t$) jest złożeniem dwóch drgań harmoniczných przesuniętych o $\frac{\pi}{2}$.

Energia potencjalna

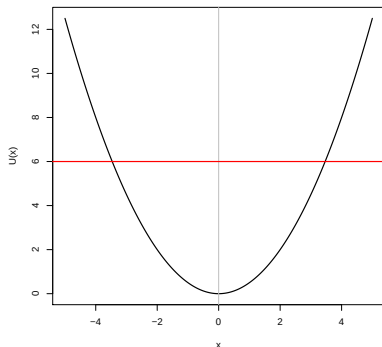
$$U(x) = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2$$



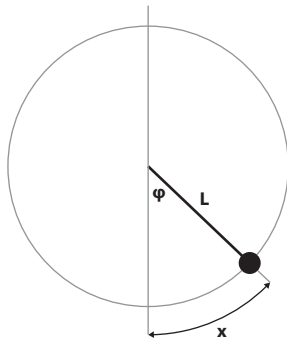
Energia potencjalna

$$U(x) = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2$$

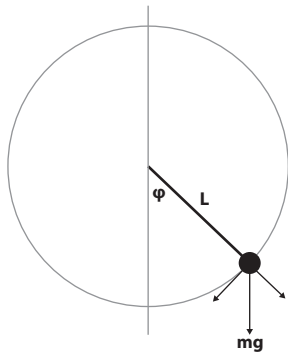
$$H = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

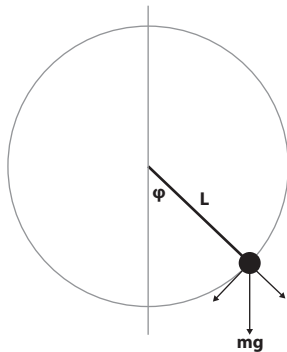


Wahadło

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

ale $x = L\varphi$

$$mL \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$



Wahadło

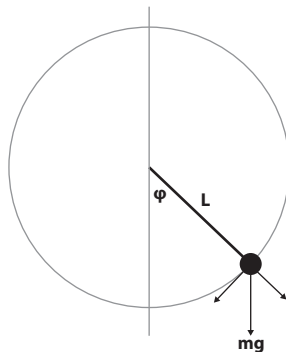
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

ale $x = L\varphi$

$$mL \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

dla małych φ możemy zastosować
przybliżenie $\sin \varphi \approx \varphi$

$$mL \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg\varphi$$



Wahadło

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

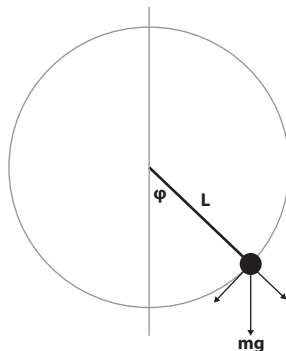
ale $x = L\varphi$

$$mL \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

dla małych φ możemy zastosować
przybliżenie $\sin \varphi \approx \varphi$

$$mL \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg\varphi$$

ruch harmoniczny z $\omega^2 = \frac{g}{L}$



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

Drgania tłumione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \beta \frac{dx}{dt}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\omega_0^2$$

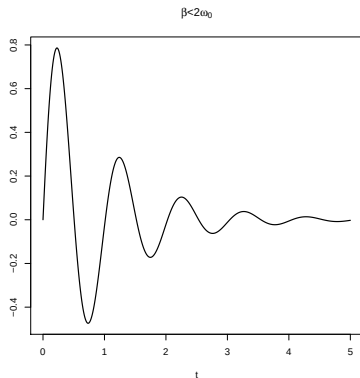
Drgania tłumione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \beta \frac{dx}{dt}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\omega_0^2$$

- drgania tłumione $\Delta < 0$

$$x(t) = Ae^{-\frac{1}{2}\beta t} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}t\right)$$



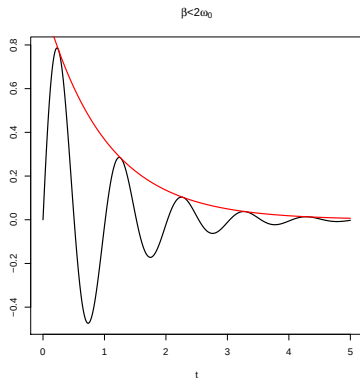
Drgania tłumione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \beta \frac{dx}{dt}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\omega_0^2$$

- drgania tłumione $\Delta < 0$

$$x(t) = Ae^{-\frac{1}{2}\beta t} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}t\right)$$



Drgania tłumione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \beta \frac{dx}{dt}$$

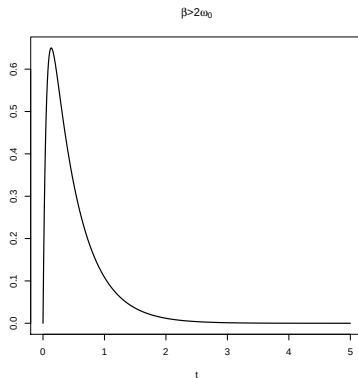
$$\Delta = \beta^2 - 4\omega_0^2$$

- drgania tłumione $\Delta < 0$

$$x(t) = Ae^{-\frac{1}{2}\beta t} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}t\right)$$

- drgania przetłumione $\Delta > 0$

$$x(t) = Ae^{-\frac{1}{2}\beta t} \left[e^{\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}t} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}t} \right]$$



Drgania wymuszone

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + A \cos \omega t$$

Drgania wymuszone

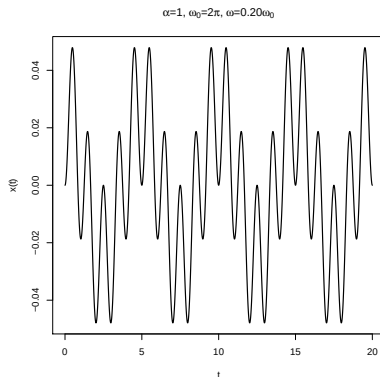
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

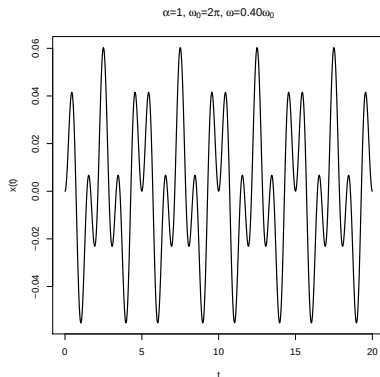


Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

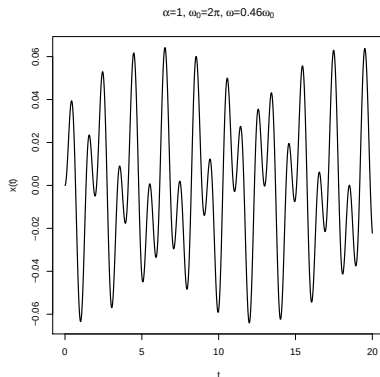


Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

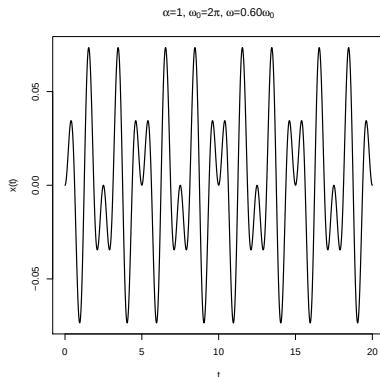


Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

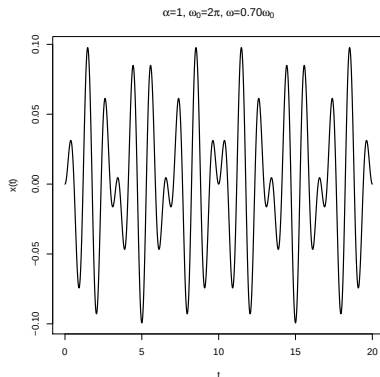


Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

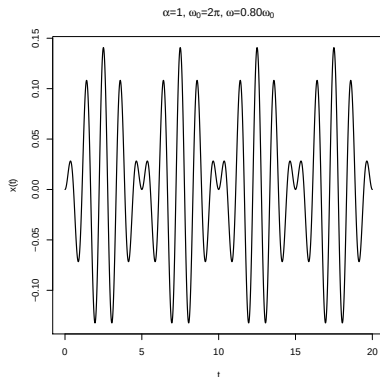


Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

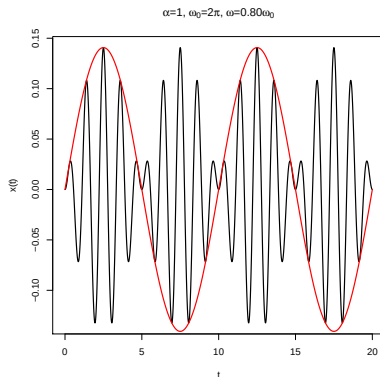


Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

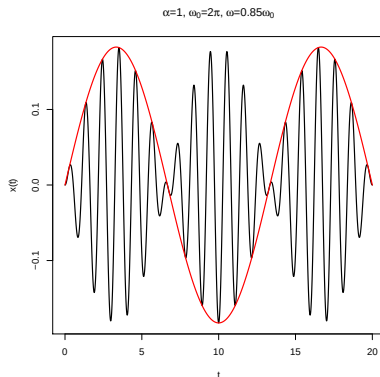


Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

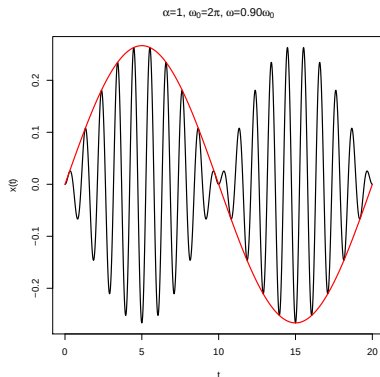


Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

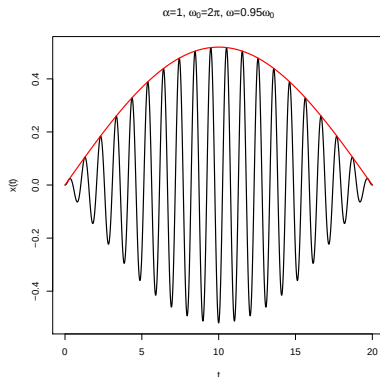


Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

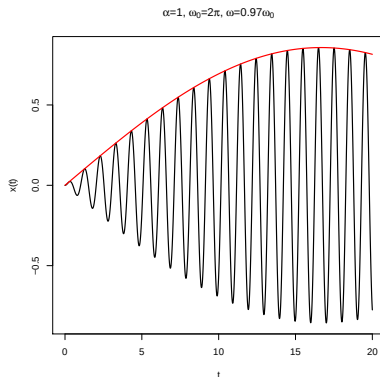


Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

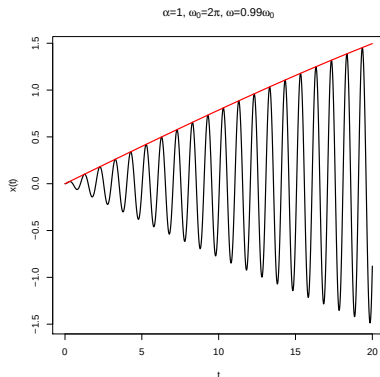


Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$



Drgania wymuszone

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \alpha \cos \omega t$$

- kiedy $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right)$$

- kiedy $\omega = \omega_0$ (rezonans - amplituda drgań dąży do nieskończoności)

$$x(t) = \frac{\alpha t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$$

