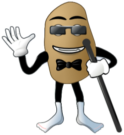
Wykład 8 i 9
Indukcja. Równania Maxwella.

Maciej J. Mrowiński

mrow@if.pw.edu.pl

Wydział Fizyki
Politechnika Warszawska

21 kwietnia 2017

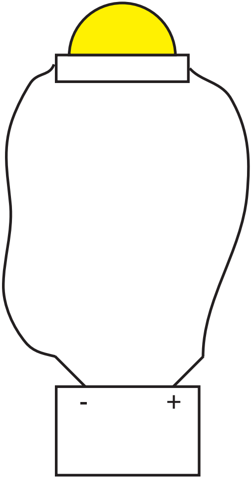


Siła elektromotoryczna (SEM/EMF)

Siła elektromotoryczna zdefiniowana jest jako

$$\varepsilon = \oint \mathbf{f} d\mathbf{l}$$

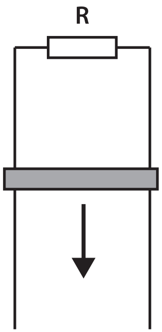
gdzie **f** to siły (na jednostkę ładunku) działające na ładunki w obwodzie.



Indukcja związana z ruchem

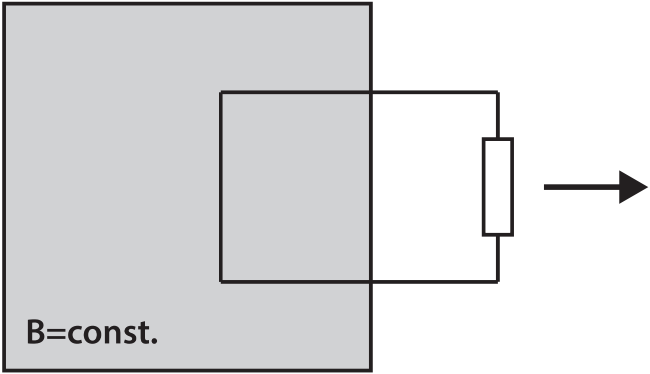
Na ładunki w poruszających się przewodnikach działa siała Lorentza, która może spowodować przepływ prądu (indukcję). Powstała siła elektromotoryczna może zostać wyznaczona przy pomocy strumienia pola magnetycznego przez powierzchnię przewodnika.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_b}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\ \mathbf{da}$$

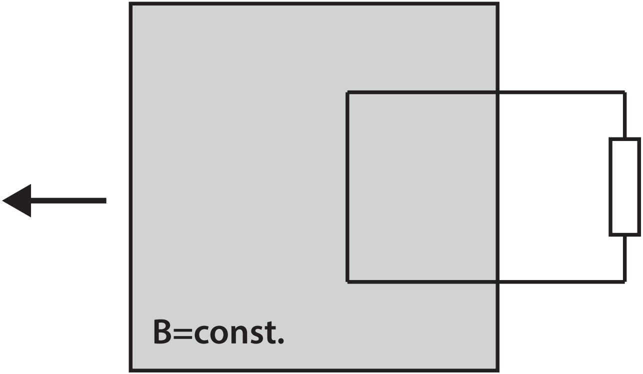


Przykład

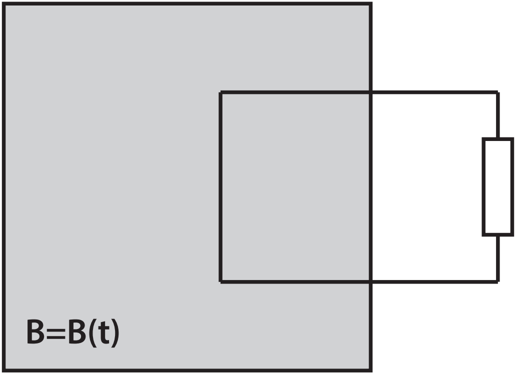
Indukcja - trzy eksperymenty



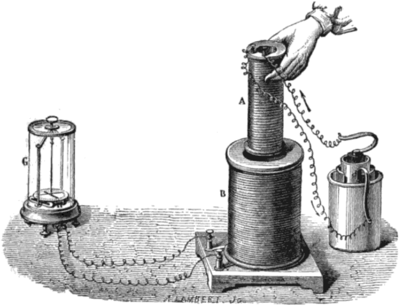
Indukcja - trzy eksperymenty

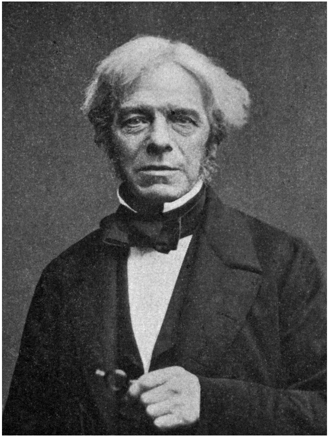


Indukcja - trzy eksperymenty



Michael Faraday (1791 - 1867)





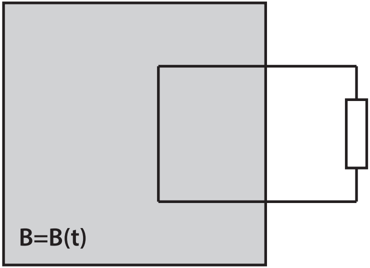
Indukcja związana ze zmiennymi źródłami

Michael Faraday doszedł do wniosku, że zmiennemu polu magnetycznemu towarzyszy pole elektryczne i to właśnie ono jest źródłem siły elektromotorycznej.
Prawo Faradaya w postaci całkowej

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\, d\mathbf{a}$$

i różniczkowej

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$



Reguła Lenza

Natura nie znosi zmiany strumienia.

Reguła Lenza

Natura nie znosi zmiany strumienia.

Prawo Ampere'a - poprawka Maxwella

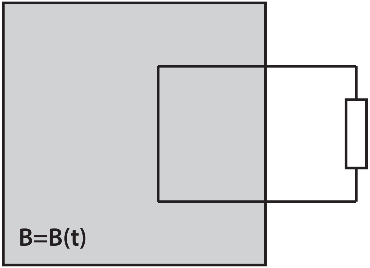
Do prawa Ampere'a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

należy dodać gęstość prądu przesunięcia

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

aby dywergencja obu stron równania była równa zero. Dzięki tej poprawce prawo Ampere'a można wykorzystać przy obecności zmiennych źródeł.



Równania Maxwella

(1) $\nabla \mathbf{E} = \frac{p}{\varepsilon_0}$ (prawo Gaussa)

(2) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (prawo Faradaya)

(3) $\nabla \mathbf{B} = 0$ (bez nazwy)

(4) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (prawo Ampere'a-Maxwella)

Równania Jefimienki

Naiwne uogólnienie praw Coulomba i B-S dla źródeł zmiennych w czasie:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{[p]\,\widehat{\mathbf{w}}}{w^2}d\tau'$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\mathbf{J}]\times\hat{\mathbf{w}}}{w^2}d\tau'$$

gdzie $[\cdot]$ oznacza użycie czasu opóźnionego: $t \to t - w/c$.

Równania Jefimienki

Naiwne uogólnienie praw Coulomba i B-S dla źródeł zmiennych w czasie:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{[p]\ \widehat{\mathbf{w}}}{w^2} d\tau'$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{J}] \times \hat{\mathbf{w}}}{w^2} d\tau'$$

gdzie $[\cdot]$ oznacza użycie czasu opóźnionego: $t \to t - w/c$.

Powyższe równania nie są poprawne!

Równania Jefimienki

Można przejść z

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

do

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \times \hat{\mathbf{w}}}{w^2} d\tau'$$

Analogiczne równanie dla pola elektrycznego:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{p\ \widehat{\mathbf{w}} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \widehat{\mathbf{w}}}{w^2} d\tau'$$

Te równania są poprawne, ale ich użyteczność jest znikoma.

Równania Jefimienki

Stosując opóźnienia w **potencjałach** (a nie polach) można uzyskać równania Jefimienki - rozwiązania równań Maxwella będące uogólnieniem praw Coulomba i B-S dla zmiennych źródeł:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{[p]\ \widehat{\mathbf{w}}}{w^2} + \frac{[\frac{\partial p}{\partial t}]\ \widehat{\mathbf{w}}}{cw} - \frac{[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}]}{c^2 w}\ d\tau'$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{J}] \times \hat{\mathbf{w}}}{w^2} + \frac{[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}] \times \hat{\mathbf{w}}}{cw}\ d\tau'$$

Pola zależą tylko od źródeł!

Równania Maxwella w obszarze bez źródeł

W obszarze bez źródeł ($\mathbf{J} = 0$, $p = 0$) równania Maxwella mają następującą postać:

$$(1)\quad \nabla \mathbf{E} = 0$$

$$(2)\quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(3)\quad \nabla \mathbf{B} = 0$$

$$(4)\quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Można z nich wyprowadzić równania falowe:

$$\Delta \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

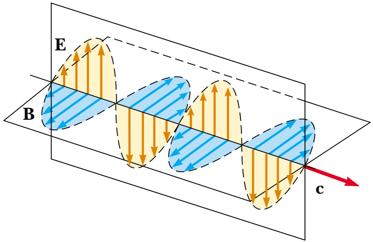
Obszar bez źródeł - rozwiązanie

Jednym z możliwych rozwiązań równań falowych są fale płaskie:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i\mathbf{kr} - i\omega t} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} E_0 e^{i\mathbf{kr} - i\omega t} \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$$

gdzie $\hat{\mathbf{k}}$ to wektor falowy a $\hat{\mathbf{n}}$ to wektor polaryzacji.
Są to tak zwane fale monochromatyczne - każdej częstości ω odpowiada inny kolor.



(źródło: RA Serway, JW Jewett, *Physics for Scientists and Engineers*)

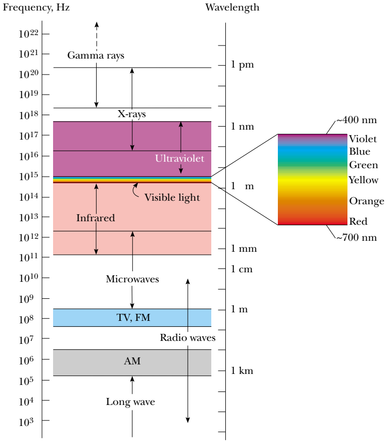
Obszar bez źródeł - rozwiązanie

Jednym z możliwych rozwiązań równań falowych są fale płaskie:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i\mathbf{kr} - i\omega t}\hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} E_0 e^{i\mathbf{kr} - i\omega t}\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$$

gdzie $\hat{\mathbf{k}}$ to wektor falowy a $\hat{\mathbf{n}}$ to wektor polaryzacji.
Są to tak zwane fale monochromatyczne - każdej częstości ω odpowiada inny kolor.



(źródło: RA Serway, JW Jewett, *Physics for Scientists and Engineers*)