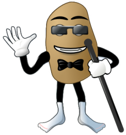
Wykład 6 i 7
Prąd elektryczny. Pole magnetyczne.

Maciej J. Mrowiński

mrow@if.pw.edu.pl

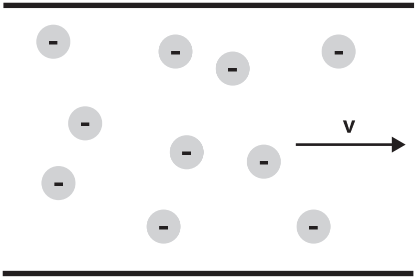
Wydział Fizyki
Politechnika Warszawska

5 kwietnia 2017



Prąd elektryczny

- Prąd elektryczny to uporządkowany ruch ładunków.
- Pojedynczy poruszający się ładunek to też prąd (ale nie stały).



Gęstość prądu

- gęstość liniowa (natężenie prądu)

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}$$

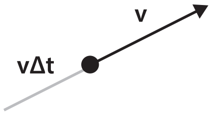
- gęstość powierzchniowa

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$$

- gęstość objętościowa

$$\mathbf{J} = p\mathbf{v}$$

Gęstość mówi o ilości ładunku przepływającego przez jednostkowy przekrój przewodnika na jednostkę czasu.



$$\Delta q = \lambda v \Delta t$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \mathrm{I} = \lambda v$$

Gęstość prądu

- gęstość liniowa (natężenie prądu)

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}$$

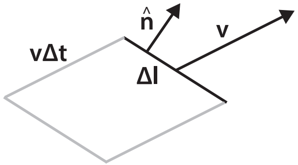
- gęstość powierzchniowa

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$$

- gęstość objętościowa

$$\mathbf{J} = p\mathbf{v}$$

Gęstość mówi o ilości ładunku przepływającego przez jednostkowy przekrój przewodnika na jednostkę czasu.



$$\Delta q = \sigma v \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{n}} \Delta t \Delta l$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta t \Delta l} = \sigma (v \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{n}} = \sigma \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{n}}$$

Gęstość prądu

- gęstość liniowa (natężenie prądu)

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}$$

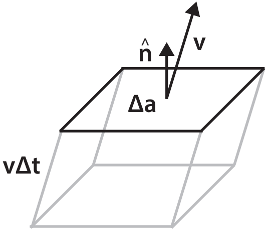
- gęstość powierzchniowa

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$$

- gęstość objętościowa

$$\mathbf{J} = p \mathbf{v}$$

Gęstość mówi o ilości ładunku przepływającego przez jednostkowy przekrój przewodnika na jednostkę czasu.



$$\Delta q = p v \hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{n}} \Delta t \Delta a$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta t \Delta a} = p(v\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{n}} = p\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{n}}$$

Równanie ciągłości

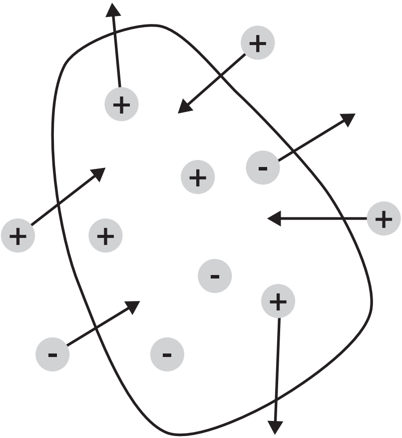
Zmiana ładunku w pewnej objętości jest równa sumarycznemu ładunkowi, który wypłynął lub wpłynął przez brzeg ograniczający tę objętość.

Postać całkowa:

$$\frac{d}{dt}\int_V p d\tau = -\int_S \nabla \hat{\mathbf{J}} da$$

Postać różniczkowa:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \hat{\mathbf{J}}$$

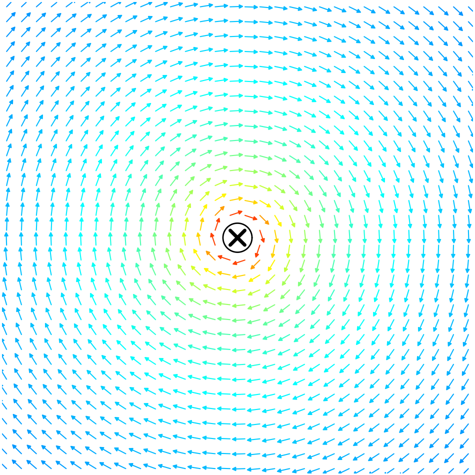


Pole magnetyczne

- Poruszające się ładunki wytwarzają pole magnetyczne.
- Pole magnetyczne można opisać przy pomocy wektora indukcji magnetycznej **B**.
- W przeciwieństwie do pola elektrycznego, pole magnetyczne jest bezźródłowe. Monopole magnetyczne nie istnieją a linie pola magnetycznego nie mają początku ani końca.

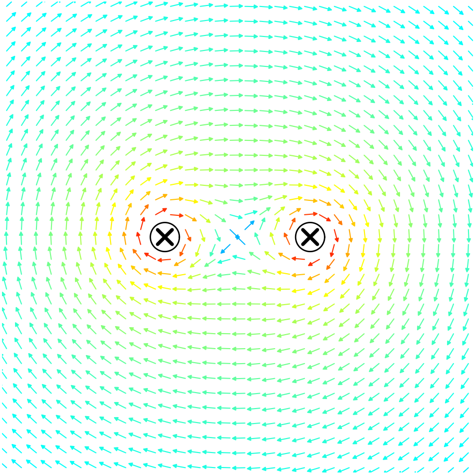
Pole magnetyczne - wizualizacja

Nieskończony przewodnik:



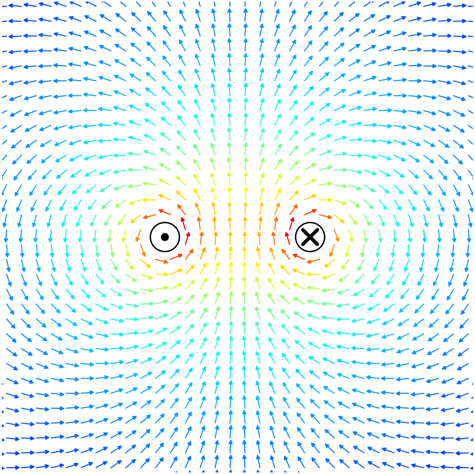
Pole magnetyczne - wizualizacja

Dwa nieskończone przewodniki (ten sam kierunek prądu):



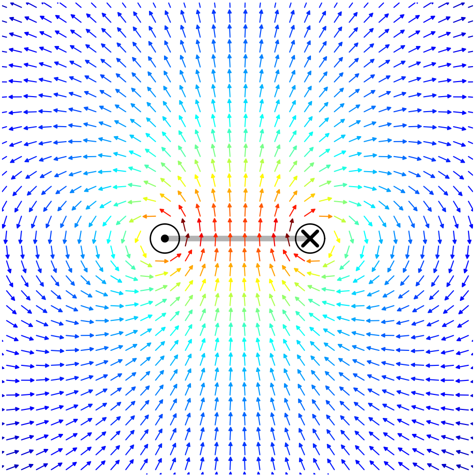
Pole magnetyczne - wizualizacja

Dwa nieskończone przewodniki (przeciwny kierunek prądu):



Pole magnetyczne - wizualizacja

Pętla z prądem (okrąg):



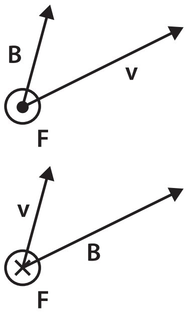
Siła magnetyczna

Na ładunki poruszające się w polu magnetycznym działa siła Lorentza:

$$\mathbf{F_m} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Najczęściej mamy więc:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$



Przykład

Siła działająca na przewodnik

- Prąd liniowy (natężenie I):

$$d\mathbf{F} = dq\ \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \lambda dl\ \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$
$$= dl\ \mathbf{I} \times \mathbf{B} = \mathrm{I} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

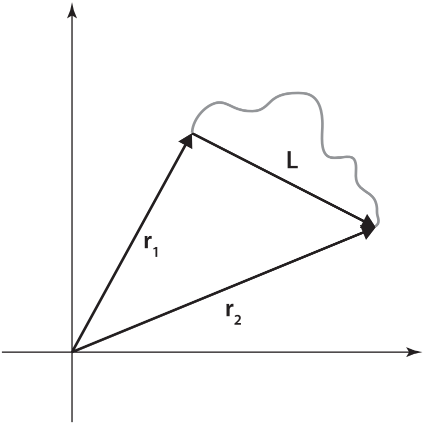
Dla całego przewodnika:

$$\mathbf{F} = \mathrm{I} \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Gdy $\mathbf{B}$ jest stałe:

$$\mathbf{F} = \mathrm{I} \left(\int_L d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = \mathrm{I}\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

Gdy $\mathbf{B} \perp \mathbf{L}$: $\mathbf{F} = B\mathrm{I}L$



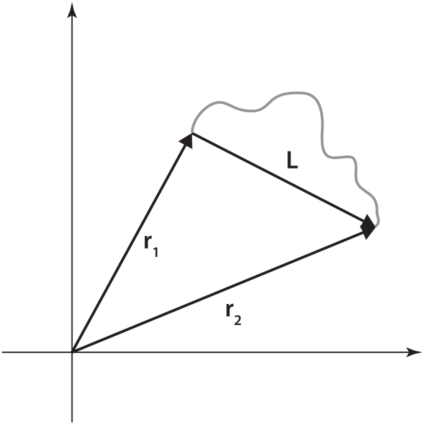
Siła działająca na przewodnik

- Prąd powierzchniowy:

$$d\mathbf{F} = \sigma da\ \mathbf{v} \times \mathbf{B} = da\ \mathbf{K} \times \mathbf{B}$$

- Prąd objętościowy:

$$d\mathbf{F} = p d\tau\ \mathbf{v} \times \mathbf{B} = d\tau\ \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$



Prawo Ohma

Dla większości substancji zachodzi:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f} = \frac{1}{p}\mathbf{f}$$

Gdzie σ - przewodność elektryczna właściwa; p - opór elektryczny właściwy; **f** - siła na jednostkę ładunku, np.:

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Gdy **v** jest mała:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Równanie to nazywamy prawem Ohma.

Bardziej znana wersja:

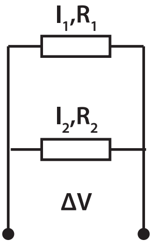
$$\mathrm{I} = \frac{\Delta V}{R}$$

gdzie R - opór elektryczny, którego jednostką jest om $[\Omega]$.

Przykład

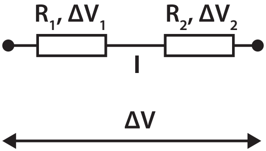
Łączenie oporników

- równolegle



$$R_z = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$

- szeregowo

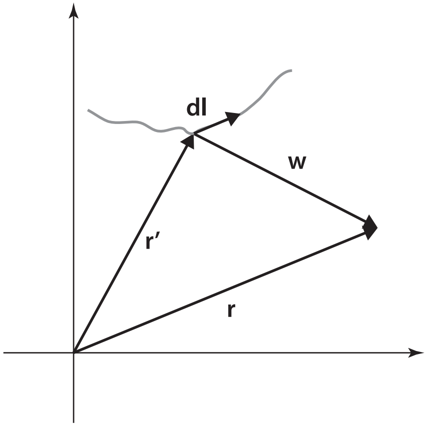


$$R_z = R_1 + R_2$$

Prawo Biota-Savarta

Wkład do pola magnetycznego pochodzący od małego fragmentu przewodnika $d\mathbf{l}$ wynosi:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{I}\times\hat{\mathbf{w}}}{w^2}dl' = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}'\times\hat{\mathbf{w}}}{w^2}$$



gdzie μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni. Analogicznie dla prądów powierzchniowych:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{K}\times\hat{\mathbf{w}}}{w^2}da'$$

oraz objętościowych:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}\times\hat{\mathbf{w}}}{w^2}d\tau'$$

Własności pola magnetycznego

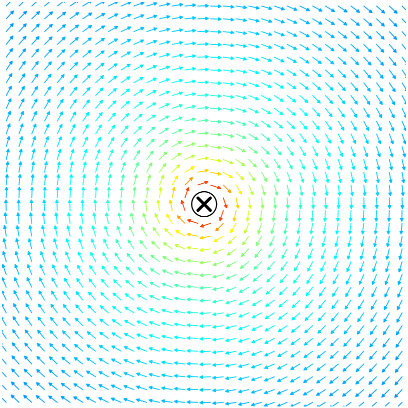
Dywergencja pola **B**:

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{w}}}{w^2} d\tau' = 0$$

Rotacja pola **B**:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{w}}}{w^2} d\tau' = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

Wyrażenie na rotację pola **B** nosi nazwę prawa Ampere'a.



Własności pola magnetycznego

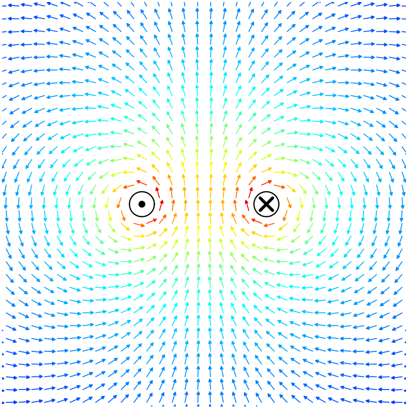
Dywergencja pola **B**:

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{w}}}{w^2} d\tau' = 0$$

Rotacja pola **B**:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{w}}}{w^2} d\tau'$$
$$= \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

Wyrażenie na rotację pola **B** nosi nazwę prawa Ampere'a.



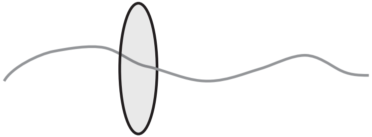
Prawo Ampere'a

Prawo Ampere'a z postaci różniczkowej

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

może być przekształcone do postaci całkowej

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \mathrm{I}$$



Prawo Ampere'a - zastosowanie praktyczne

Jeżeli $\mathbf{B} \parallel d\mathbf{l}$, wówczas

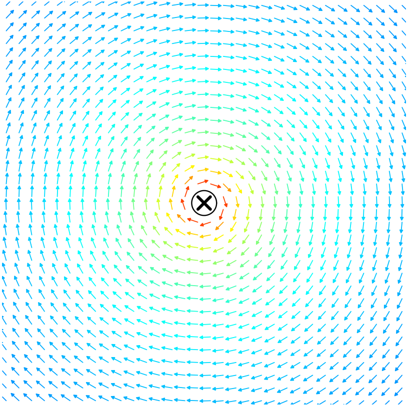
$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint B dl$$

Jeżeli B jest stałe na krzywej całkowania, wówczas

$$\oint B dl = B \oint dl = BL$$

Ostatecznie

$$BL = \mu_0 \mathrm{I}$$



Przykład

Twierdzenie Helmholtza

Pole wektorowe **F** możemy przedstawić jako

- $\mathbf{F} = -\nabla V$ (gdzie V to skalarny potencjał), jeżeli $\nabla \times \mathbf{F} = 0$

Twierdzenie Helmholtza

Pole wektorowe $\mathbf{F}$ możemy przedstawić jako

- $\mathbf{F} = -\nabla V$ (gdzie V to skalarny potencjał), jeżeli $\nabla \times \mathbf{F} = 0$
- $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ (gdzie $\mathbf{A}$ to wektorowy potencjał), jeżeli $\nabla \mathbf{F} = 0$

Twierdzenie Helmholtza

Pole wektorowe $\mathbf{F}$ możemy przedstawić jako

- $\mathbf{F} = -\nabla V$ (gdzie V to skalarny potencjał), jeżeli $\nabla \times \mathbf{F} = 0$
- $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ (gdzie $\mathbf{A}$ to wektorowy potencjał), jeżeli $\nabla \mathbf{F} = 0$

Twierdzenie Helmholtza

Jeżeli pole wektorowe $\mathbf{F}$ zanika w nieskończoności, wówczas możemy je przedstawić jako

$$\mathbf{F} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{A}$$

Potencjał wektorowy

Pole $\mathbf{B}$ nie jest zachowawcze ($\nabla \times \mathbf{B} \neq 0$), nie można go więc wyrazić poprzez gradient potencjału skalarnego.
Ale $\nabla \mathbf{B} = 0$, a to oznacza, że istnieje wektorowy potencjał $\mathbf{A}$ taki że

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Dywergencja potencjału $\mathbf{A}$ jest z założenia zerowa

$$\nabla \mathbf{A} = 0$$

Potencjał wektorowy

Potencjał wektorowy dla prądów

- liniowych

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} dl'}{w}$$

- powierzchniowych

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K} da'}{w}$$

- liniowych

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} d\tau'}{w}$$

Przykład

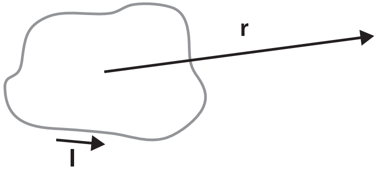
Potencjał dipola magnetycznego

Dla prądów liniowych można wprowadzić pojęcie magnetycznego momentu dipolowego

$$\mathbf{m} = \mathrm{I} \int d\mathbf{a}$$

i przy jego pomocy wyrazić potencjał wektorowy dipola magnetycznego jako

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$



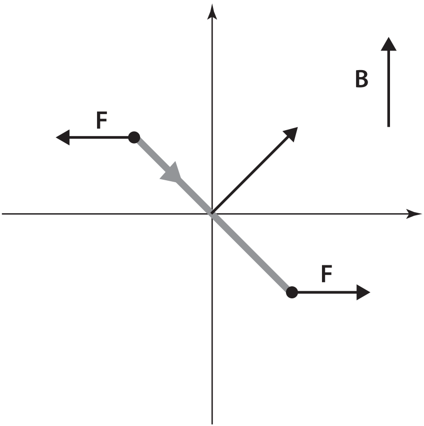
Przykład

Podział materiałów

- Paramagnetyki - problem pomocniczy.
  Na ramkę z prądem działa moment siły równy

  $$\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

  Magnetyczny moment dipolowy ramki ustawia się zgodnie z polem.



Podział materiałów

- Paramagnetyki - substancje ulegające namagnesowaniu zgodnie z kierunkiem wektora **B**. Elektrony posiadają momenty dipolowe związane ze spinami i momenty te ustawiają się zgodnie z polem. Paramagnetyzm występuje głównie w atomach i cząstkach o nieparzystej liczbie elektronów.

Podział materiałów

- Diamagnetyki - substancje ulegające namagnesowaniu przeciwnie do wektora **B**. Elektrony krążące wokół jądra tworzą prąd, z którym związany jest magnetyczny moment dipolowy. Na skutek zewnętrznego pola elektrony zwalniają/przyspieszają na orbitach co zmienia moment dipolowy przeciwnie do pola. Diamagnetyzm występuje głównie w atomach i cząstkach o parzystej liczbie elektronów.

Podział materiałów

- Ferromagnetyki - można przy ich pomocy wytworzyć magnesy stałe (namagnesowanie nie zanika po wyłączeniu zewnętrznego pola, w przeciwieństwie do diamagnetyków i paramagnetyków). Składają się z domen magnetycznych - obszarów o takim samym namagnesowaniu.

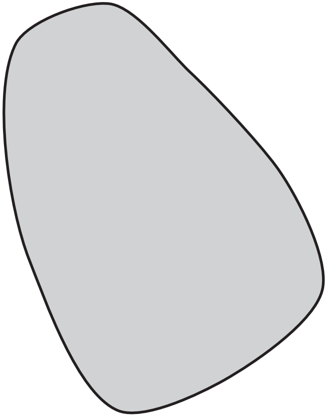
Magnetyzacja

Zewnętrzne pole magnetyczne powoduje magnetyzację (uporządkowanie magnetycznych momentów dipolowych).
Wektor magnetyzacji:

$$\mathbf{M} = \frac{\text{magnetyczny moment dipolowy}}{\text{objętość}}$$

Potencjał wektorowy wokół namagnesowanego ciała:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{w}}}{w^2}d\tau'$$



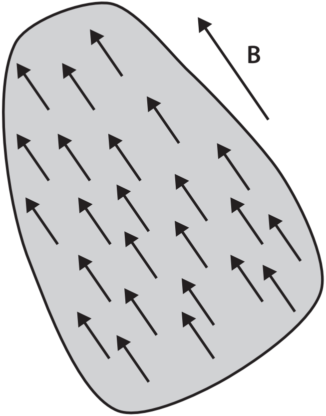
Magnetyzacja

Zewnętrzne pole magnetyczne powoduje magnetyzację (uporządkowanie magnetycznych momentów dipolowych).
Wektor magnetyzacji:

$$\mathbf{M} = \frac{\text{magnetyczny moment dipolowy}}{\text{objętość}}$$

Potencjał wektorowy wokół namagnesowanego ciała:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{w}}}{w^2} d\tau'$$



Prądy swobodne i związane

Potencjał wytwarzany przez namagnesowane ciało można zapisać jako:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\mathbf{K}_{zw} da'}{w} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}_{zw} d\tau'}{w}$$

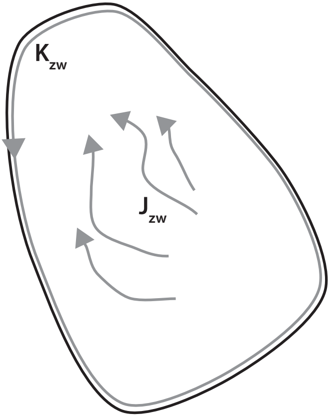
gdzie

$$\mathbf{K}_{zw} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$$

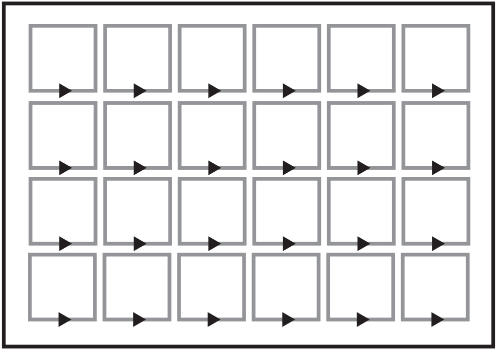
to gęstość powierzchniowych prądów związanych, a

$$\mathbf{J}_{zw} = \nabla \times \mathbf{M}$$

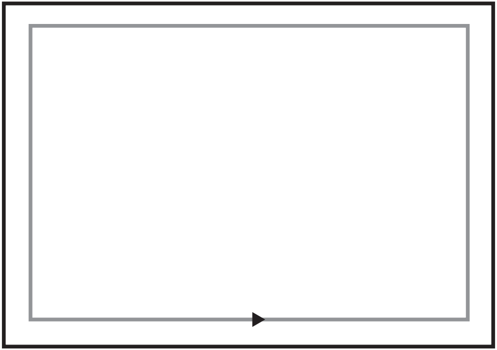
to gęstość objętościowych ładunków związanych.



Prądy swobodne i związane - interpretacja



Prądy swobodne i związane - interpretacja



Wektor natężenia pola magnetycznego

Wektor natężenia pola magnetycznego **H** definiujemy jako:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$$

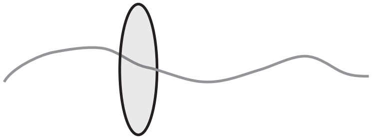
Prawo Ampere'a dla **H**:

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \mathrm{I}_{\mathrm{sw}}$$

lub:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\mathrm{sw}}(\mathbf{r})$$

gdzie I_{sw} - prąd swobodny; $\mathbf{J}_{\mathrm{sw}}$ gęstość objętościowa prądów swobodnych.



Ośrodki liniowe

Dla wielu materiałów zachodzi:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

gdzie χ_m - podatność magnetyczna ośrodka.
Jest to równoważne:

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0(1+\chi_m)}\mathbf{B} = \frac{\chi_m}{\mu_0\mu_r}\mathbf{B} = \frac{\chi_m}{\mu}\mathbf{B}$$

gdzie $\mu_r = 1 + \chi_m$ - względna przenikalność magnetyczna ośrodka;
$\mu = \mu_0\mu_r$ - przenikalność magnetyczna ośrodka.