

Wykład 4 i 5

Prawo Gaussa i pole elektryczne w materii. Pojemność.

Maciej J. Mrowiński

mrow@if.pw.edu.pl

Wydział Fizyki
Politechnika Warszawska

21 marca 2016

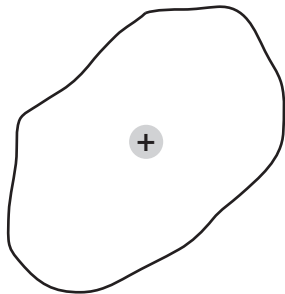


Prawo Gaussa

$$\oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Strumień pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy ładunkowi znajdującemu się w objętości ograniczonej przez tę powierzchnię, podzielonemu przez ϵ_0 . Prawo Gaussa można wyrazić w postaci różniczkowej:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

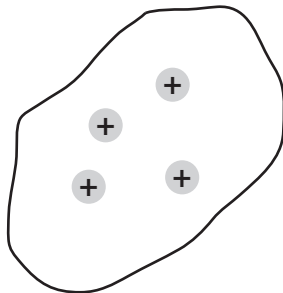


Prawo Gaussa

$$\oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Strumień pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy ładunkowi znajdującemu się w objętości ograniczonej przez tę powierzchnię, podzielonemu przez ϵ_0 . Prawo Gaussa można wyrazić w postaci różniczkowej:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

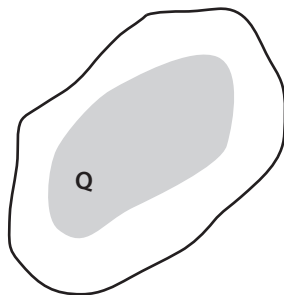


Prawo Gaussa

$$\oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Strumień pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy ładunkowi znajdującemu się w objętości ograniczonej przez tę powierzchnię, podzielonemu przez ϵ_0 . Prawo Gaussa można wyrazić w postaci różniczkowej:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$



Prawo Gaussa - zastosowanie praktyczne

Jeżeli $\mathbf{E} \parallel \hat{\mathbf{n}}$, wówczas

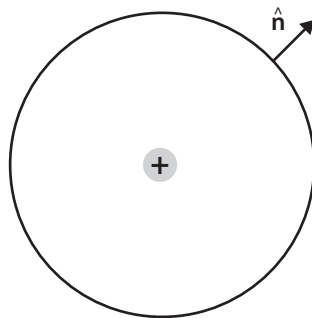
$$\oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{a} = \oint_S E \, da$$

Jeżeli E jest stałe na S , wówczas

$$\oint_S E \, da = E \oint_S da = EA$$

Ostatecznie

$$EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Przykład

Energia rozkładu ładunków

Energia dla dyskretnego rozkładu ładunków wyrażona jest wzorem:

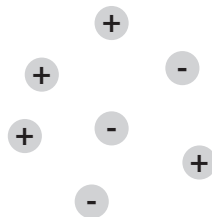
$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} q_i V(\mathbf{r}_i)$$

Dla ciągłego rozkładu można ją przedstawić jako

$$W = \frac{1}{2} \int V(\mathbf{r}) dq$$

lub

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$



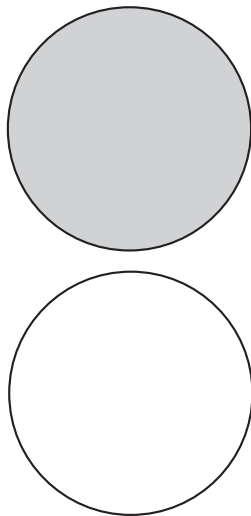
Przykład energii - kula i sfera

Energia jednorodnie naładowanej kuli wynosi

$$W = \frac{3}{5} \frac{kQ^2}{R}$$

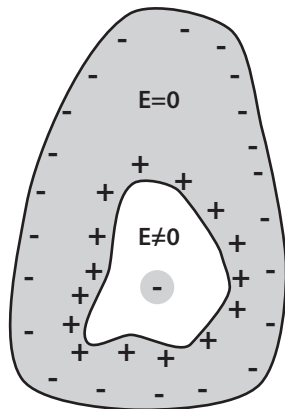
natomiast energia jednorodnie naładowanej sfery to

$$W = \frac{1}{2} \frac{kQ^2}{R}$$



Własności przewodników

- $E = 0$ wewnątrz przewodnika (potencjał wewnątrz przewodnika jest stały)
- pole elektryczne w pobliżu powierzchni przewodnika jest prostopadłe do powierzchni
- nieskompensowany ładunek znajduje się jedynie na powierzchni przewodnika (konfiguracja najbardziej wydajna energetycznie)



Dipol - przypomnienie

Moment dipolowy:

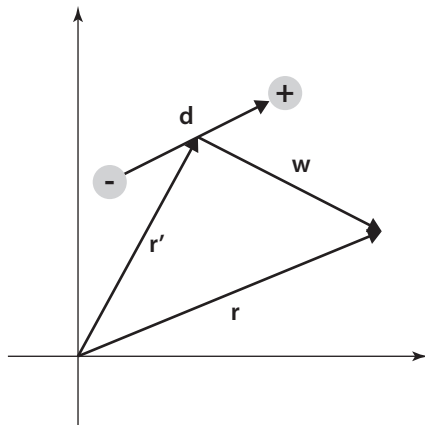
$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{r}_i q_i$$

Dla dipola fizycznego:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$

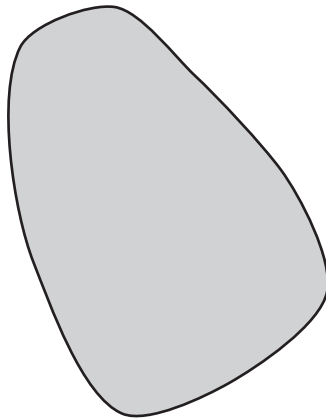
Potencjał dla dipola:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{k\mathbf{p}\hat{\mathbf{w}}}{w^2}$$



Dielektryk (izolator)

- niepolarne - moment dipolowy indukowany przez zewnętrzne pole
- polarne - cząsteczki mają własny, trwały moment dipolowy



Dielektryk (izolator) w polu elektrycznym

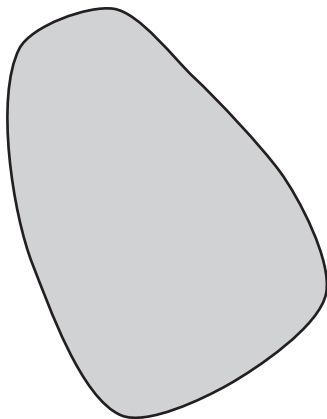
Zewnętrzne pole elektryczne powoduje polaryzację dielektryka (powstanie niezerowych momentów dipolowych lub ustawienie istniejących momentów w kierunku pola).

Wektor polaryzacji:

$$\mathbf{P} = \frac{\text{moment dipolowy}}{\text{objętość}}$$

Potencjał wokół spolaryzowanego dielektryka:

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{k \hat{\mathbf{w}} \mathbf{P} d\tau'}{w^2}$$



Dielektryk (izolator) w polu elektrycznym

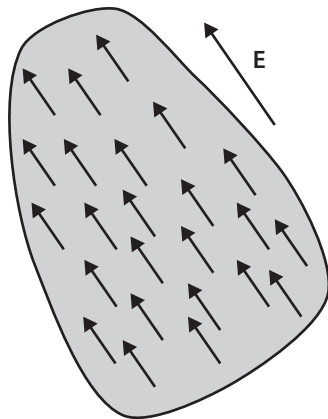
Zewnętrzne pole elektryczne powoduje polaryzację dielektryka (powstanie niezerowych momentów dipolowych lub ustawienie istniejących momentów w kierunku pola).

Wektor polaryzacji:

$$\mathbf{P} = \frac{\text{moment dipolowy}}{\text{objętość}}$$

Potencjał wokół spolaryzowanego dielektryka:

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{k \hat{\mathbf{w}} \mathbf{P} d\tau'}{w^2}$$



Dielektryk - ładunki swobodne i związane

Potencjał wytwarzany przez dielektryk można zapisać jako:

$$V(\mathbf{r}) = \int_S \frac{k\sigma_{zw}da'}{w} + \int_V \frac{kp_{zw}d\tau'}{w}$$

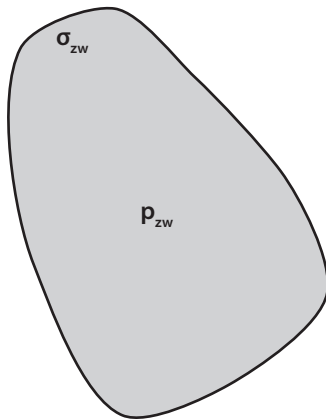
gdzie

$$\sigma_{zw} = \hat{\mathbf{n}}\mathbf{P}$$

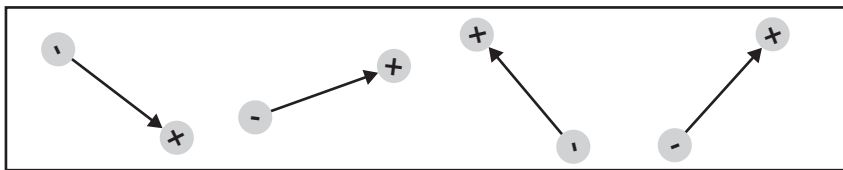
to gęstość powierzchniowych ładunków związanych, a

$$p_{zw} = -\nabla\mathbf{P}$$

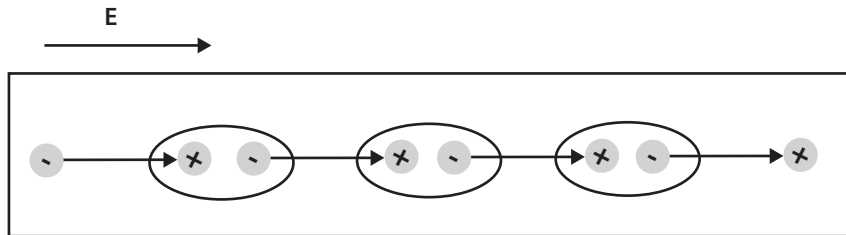
to gęstość objętościowych ładunków związanych.



Ładunki swobodne i związane - interpretacja



Ładunki swobodne i związane - interpretacja



Wektor indukcji elektrycznej

Wektor indukcji elektrycznej $\mathbf{D}$
definiujemy jako:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

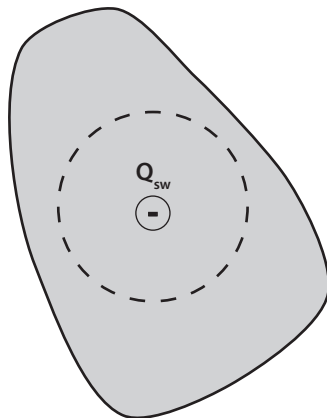
Prawo Gaussa dla $\mathbf{D}$:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{sw}$$

lub:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{sw}(\mathbf{r})$$

gdzie Q_{sw} - ładunek swobodny; ρ_{sw}
gęstość objętościowa ładunków
swobodnych.



Dielektryki liniowe

Dla dielektryków liniowych zachodzi:

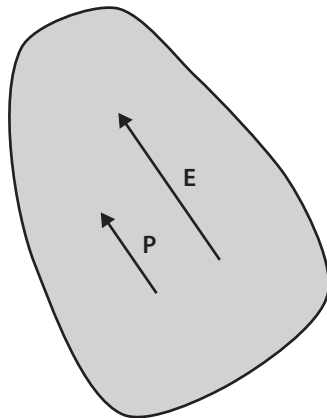
$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

gdzie χ_e - podatność elektryczna ośrodka.

Wynika z tego, że wektor $\mathbf{D}$ dla dielektryków liniowych:

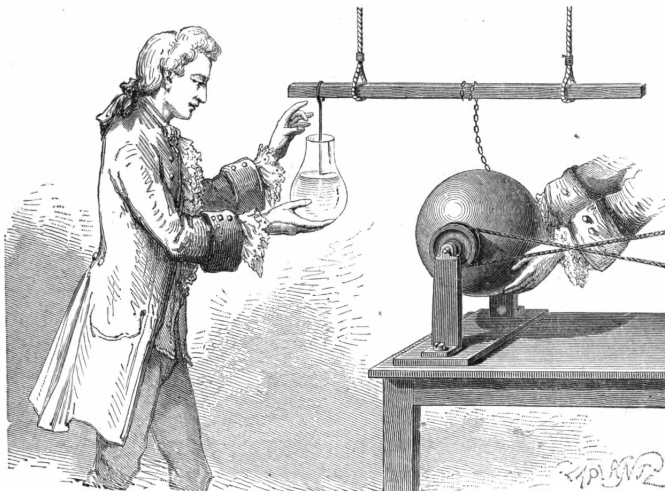
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

gdzie ε_r - względna przenikalność elektryczna ośrodka; ε - przenikalność elektryczna ośrodka.



Przykład

Butelka lejdejska (1746)



Kondensatory

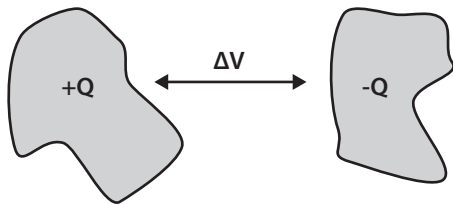
Pojemność definiujemy jako

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Gdzie Q - ładunek na okładkach; ΔV - różnica potencjałów między okładkami.

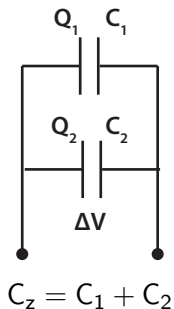
Energia kondensatora

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

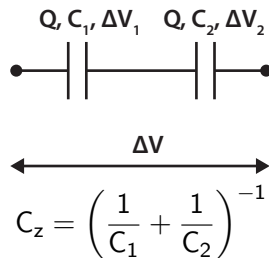


Łączenie kondensatorów

- równolegle



- szeregowo



Przykład