

Zestaw 01: Gradient, Dywergencja i Rotacja

Maciej J. Mrowiński

14 marca 2018

Zestaw do samodzielnego rozwiązania po wykładzie o operatorze ∇ .
Nie jest obowiązkowy i nie oddajecie mi tych rozwiązań. Jeżeli ktoś ma problemy/pytania, to oczywiście zapraszam na konsultacje.

Pytania

- Jak zdefiniowany jest gradient? Jak należy go interpretować?
- Jak należy interpretować całkę powierzchniową?
- Jak definiujemy strumień pola wektorowego? Jak należy go interpretować?
- O czym mówi nam dodatnia/zerowa/ujemna wartość strumienia?
- Jak definiujemy dywergencję¹? Jak należy ją interpretować?
- O czym mówi i jak należy intuicyjnie interpretować twierdzenie Gaussa?
- Jak należy interpretować całkę krzywoliniową?
- O czym mówi nam dodatnia/zerowa/ujemna wartość cyrkulacji?
- Co możemy powiedzieć o polu, dla którego cyrkulacja po dowolnej krzywej jest zerowa?
- Jak definiujemy rotację? Jak należy ją interpretować?
- O czym mówi i jak należy intuicyjnie interpretować twierdzenie Stokes'a?

¹ Pamiętajcie, że na wykładzie zrobiliśmy to na dwa sposoby (choć od strony formalnej technicznie rzecz biorąc tylko jeden z nich był definicją).

Problemy obliczeniowe

- Wyznacz strumień pola

$$\vec{F} = \alpha [yz\hat{x} + xz\hat{y} + xy\hat{z}] \quad (1)$$

przez powierzchnię sfery

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2)$$

- Wykaż, że

$$V = \frac{1}{3} \oint_S \vec{r} \cdot d\vec{a}, \quad (3)$$

gdzie S to pewna zamknięta powierzchnia, V to objętość, jaką otacza S , natomiast $\vec{r} = [x, y, z]$.

- Wyznacz rotację pola

$$\vec{F} = \beta [z^2 \hat{x} + x^2 \hat{y} - y^2 \hat{z}]. \quad (4)$$

- Wyznacz cyrkulację pola

$$\vec{F} = \alpha z^2 \hat{y} + \beta y^2 \hat{z} \quad (5)$$

po leżącym na płaszczyźnie XY okręgu

$$R^2 = x^2 + y^2. \quad (6)$$