1 Dopasowywanie funkcji liniowej zależnej od nieznanych wielkości

W tym ćwiczeniu rozpatrujemy problem, gdy mamy n punktów pomiarowych, które wedug teorii powinny być rozłożone na krzywej opisanej wielomianem. W ogólnym przypadku nie znamy stopnia r tego wielomianu. Inaczej mówiąc nasza hipoteza brzmi: nasze punkty pomiarowe leżą na krzywej opisanej zależnością:

$$\eta_j = h_j = x_1 + x_2 t_j + x_3 t_j^2 + ... + x_r t_j^{r-1} \tag{1}$$

czyli na wielomianie zmiennej t_j stopnia $r-1$. Aby uzyskać wartości parametrów x_i, czyli współczynników wielomianu musimy zastosować procedurę dopasowywania.

Nasz problem jest więc układem n równań liniowych z r niewiadomymi. Należy zwrócic uwagę, że naszymi niewiadomymi są nieznane współczynniki x_i, czyli parametry naszego dopasowania. Zapiszmy ten układ równań w postaci macierzowej

$$\boldsymbol{\eta} = A\mathbf{x} \tag{2}$$

Teraz zakładamy, że każdy pomiar obarczony jest błędem ε_j o rokładzie normalnym. Wyniki pomiarów oznaczać będziemy przez y_j. Wprowadzamy n-wymiarowe wektory pomiarów i błędów i możemy napisać:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3}$$

Podstawiając wzór (3) do (2) otrzymujemy:

$$\mathbf{y} - \varepsilon + A\mathbf{x} = 0 \tag{4}$$

Będziemy starać się rozwiązać ten układ równań ze względu na x, stosując metodę największej wiarygodności.

Tworzymy macierz A zmiennych sterujących:

$$A = -\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & ... & t_1^{r-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & ... & t_2^{r-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_n & t_n^2 & ... & t_n^{r-1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

oraz wektor składający się z wyników pomiarów:

$$\mathbf{y} = \mathbf{c} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

Następnie tworzymy macierz odwrotności błędów:

$$G_y = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1/\sigma_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

numer pomiaru j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
zmienna t_j	-0.9	-0.7	-0.5	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
wynik pomiaru y_j	3	60	89	98	99	106	142	215	334	532
błąd pomiaru σ_j	1	4	3	7	3	8	2	3	7	9

Tablica 1: Wartości zmiennej sterującej t_j, wyników pomiarów y_j i błędów pomiarowych σ_j.

Wprowadzamy pomocniczą macierz A' i wektor c':

$$A' = HA,\ \mathbf{c}' = H\mathbf{c} \tag{8}$$

, a następnie możemy wyznaczyć estymatory $\widetilde{x}_i$ współczynników x_i, czyli nasze poszukiwane współczynniki dopasowanego wielomianu:

$$\widetilde{x} = \left(A'^T A'\right)^{-1} \left(A'^T c'\right) \tag{9}$$

wtedy macierz kowariancji dla wielkości $\widetilde{x}$ dana jest wyrażeniem:

$$C_{\widetilde{x}} = G_{\widetilde{x}}^{-1} = \left(A'^T A'\right)^{-1} \tag{10}$$

Elementy diagonalne tej macierzy określają wariancje wielkości $\widetilde{x}_i$, a ich pierwiastki kwadratowe są błędami tych wielkości. Elementy niediagonalne określają nam stopień korelacji pomiędzy współczynnikami.

Wprowadzimy też tzw. wektor poprawionych pomiarów, który mówi nam gdzie powinny znajdować się zmierzone punkty, aby znajdowały się dokładnie na dopasowanej krzywej:

$$\widetilde{\boldsymbol{\eta}} = -A\widetilde{\mathbf{x}} \tag{11}$$

Możemy teraz obliczyć minimum funkcji M, która jest odpowiednikiem testu χ^2. Dzięki niej możemy oszacować jak dobre jest powyższe dopasowanie.

$$M = \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T G_y \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{y} - \widetilde{\boldsymbol{\eta}})^T G_y (\mathbf{y} - \widetilde{\boldsymbol{\eta}}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{y_j - \widetilde{\eta}_j}{\sigma_j}\right)^2 \tag{12}$$

, gdzie $\widetilde{\varepsilon}$ jest odległością zmierzonego punktu od dopasowanej prostej.

Zadanie

Wyniki pomiarów w zależności od zmiennej t_j są przedstawione w tabeli 1.

Zadaniem jest napisanie procedury dopasowującej wielomian dowolnego stopnia r do n wyników pomiarów (podanych wraz z błędami). Następnie należy tą procedurę zastosować do dopasowania wielomianów o stopniu od 0 do 6 do wyników podanych w tabeli 1. Procedura powinna podawać wartości współczynników dopasowanego wielomianu (wraz z ich błędami), a także wartość funkcji M. Na podstawie wartości funkcji M należy określić minimalny stopień wielomianu, który jest wystarczający do dopasowania wyników pomiarów. Procedura dopasowywania powinna być zadeklarowana następująco:

```
Double_t dopasuj(Int_t stopien,
                 Int_t ilosc_pomiarow,
                 Double_t *tj,
                 Double_t *yj,
                 Double_t *sigmaj,
                 Double_t *wspolczynniki,
                 Double_t *wspsigma)
```

, gdzie *stopien* to stopien dopasowywanego wielomianu, *ilosc_pomiarow*, to ilosc punktów pomiarowych (wraz z błędami), które mamy do dyspozycji, *tj* to wartości zmiennej kontrolnej dla naszych pomiarów, *yj* to wyniki pomiarów, a *sigmaj* to błędy jakimi obarczone są te pomiary. *tj*, *yj* i *sigmaj* to tablice o rozmiarze *ilosc_pomiarow*. Tablica *wspolczynniki* (o rozmiarze *stopien*+1) to tablica wynikowa, w której powinny się znaleźć wartości współczynników dopasowanego wielomianu. W tablicy *wspsigma* powinny się znaleźć błędy dopasowania współczynników $\widetilde{x}$. Funkcja powinna zwracać wartość funkcji M dla danego dopasowania.

W celu wizualizacji wyników dopasowania, należy wyniki pomiarów narysowac przy pomocy klasy TGraphErrors, a dospasowywane wielomiany przy pomocy klas TF1.

Uwaga - wszystkie operacje matematyczne trzeba przeprowadzać na macierzach (klasa TMatrixD w root). Aby pomnożyć dwie macierze macA i macB stosujemy poniższą konstrukcję:

```
TMatrixD macC(macA,TMatrix::kMult,macB);
```

, aby uzyskać macierz transponowaną piszemy:

```
TMatrixD macC(TMatrix::kTransponded,macA);
```

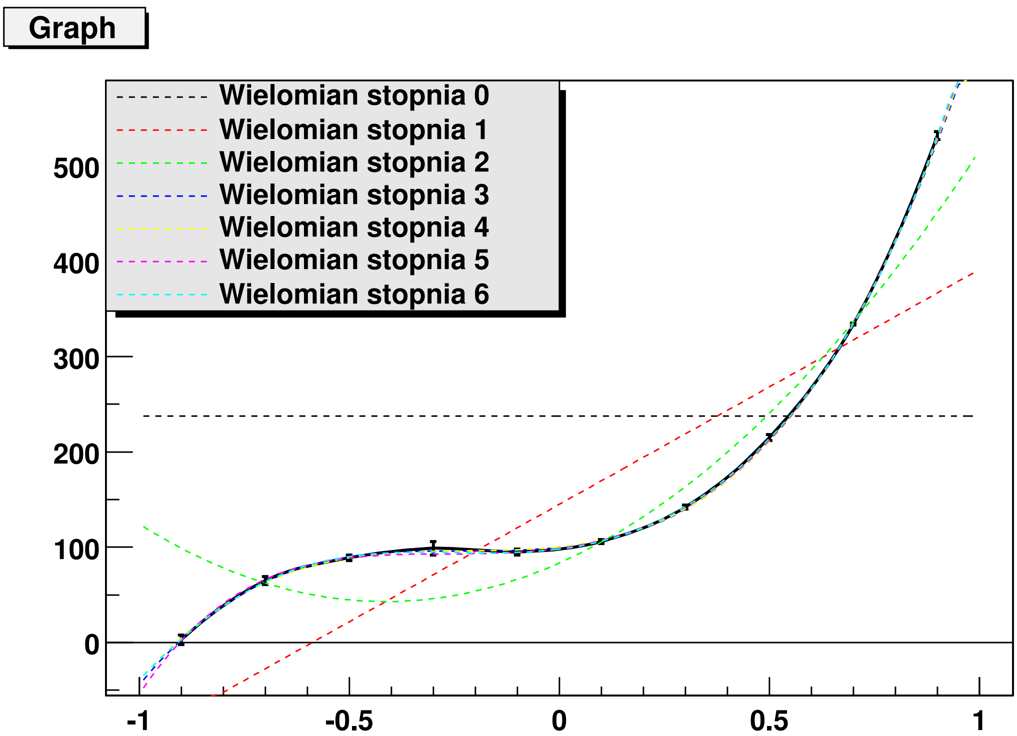
, zaś aby odwrócić macierz piszemy:

```
macA.Invert();
```

aby uzyskac dostęp do pojedyńczej komórki w macierzy stosujemy konstrukcję:

```
macA(numer_wiersza,numer_kolumny);
```

W wyniku powinien powstać rysunek taki jak rys. 1:



Rysunek 1: Wyniki pomiarów i dopasowane wielominay.