

Elektrodynamika (ćw. 3)

Małgorzata Janik

Na podstawie:

David J. Griffiths, Podstawy elektrodynamiki

Ryszard Tanaś, UAM, Wykłady z elektrodynamiki

<http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas/lecture.html>

Oraz notatki do wydrukowania: <http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas/wzory.pdf>

| | |
|--|----------------------------------|
| $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ | przenikalność elektryczna próżni |
| $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ | przenikalność magnetyczna próżni |
| $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ | prędkość światła w próżni |
| $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ | ładunek elementarny |
| $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ | masa elektronu |

WSPÓŁRZĘDNE KULISTE I WALCOWE

Kuliste:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x} = \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi} \\ \hat{y} = \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi} \\ \hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctg(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \\ \phi = \arctg(y/x) \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \end{cases}$$

Walcowe:

$$\begin{cases} x = s \cos \phi \\ y = s \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x} = \cos \phi \hat{s} - \sin \phi \hat{\phi} \\ \hat{y} = \sin \phi \hat{s} + \cos \phi \hat{\phi} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctg(y/x) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{s} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$$

Równania Maxwella

W próżni:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

W materii:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{sw}} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{sw}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Pola pomocnicze

Definicje:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$$

Ośrodki liniowe:

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \end{cases}$$

Potencjały

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Wzór na siłę Lorentza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Energia, pęd i moc

Energia: $U = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) d\tau$

Pęd: $\mathbf{p} = \epsilon_0 \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d\tau$

Wektor Poyntinga: $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$

Wzór Larmora: $P = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$

Współrzędne kartezjańskie: $d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$; $d\tau = dx dy dz$

Gradient:
$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

Dywergencja:
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Rotacja:
$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Laplasjan:
$$\Delta t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Współrzędne kuliste: $d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$; $d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Gradient:
$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Dywergencja:
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Rotacja:
$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplasjan:
$$\Delta t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Współrzędne walcowe: $d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{s}} + s d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}}$; $d\tau = s ds d\phi dz$

Gradient:
$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s} \hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

Dywergencja:
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Rotacja:
$$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

Laplasjan:
$$\Delta t = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial t}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Iloczyny podwójne

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Pochodne iloczynów

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Drugie pochodne

(9) $\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f \equiv \Delta f$

(10) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(12) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$

TWIERDZENIA CAŁKOWE

Twierdzenie dla gradientów:
$$\int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

Twierdzenie Gaussa (tw. dla dywergencji):
$$\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

Twierdzenie Stokesa (tw. dla rotacji):
$$\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Równanie Laplace'a

Podstawowym zagadnieniem elektrostatyki jest znalezienie pola elektrycznego wytwarzanego przez dany statyczny rozkład ładunków.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} d\tau'$$

z ρ wyznaczamy \mathbf{E} , zwykle wymaga to liczenia trudnych całek

Równanie Laplace'a

Podstawowym zagadnieniem elektrostatyki jest znalezienie pola elektrycznego wytwarzanego przez dany statyczny rozkład ładunków.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} d\tau'$$

z ρ wyznaczamy \mathbf{E} , zwykle wymaga to liczenia trudnych całek

Już łatwiej z potencjałem...

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d\tau'$$

z ρ wyznaczamy V , trochę łatwiej, ale nadal nie „łatwo”

Równanie Laplace'a

Podstawowym zagadnieniem elektrostatyki jest znalezienie pola elektrycznego wytwarzanego przez dany statyczny rozkład ładunków.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R^2} \hat{\mathbf{R}} d\tau'$$

z ρ wyznaczamy \mathbf{E} , zwykle wymaga to liczenia trudnych całek

Już łatwiej z potencjałem...

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} d\tau'$$

z ρ wyznaczamy V , trochę łatwiej, ale często nadal problemy

Możemy zapisać problem w postaci różniczkowej (r. Poissona)

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

równanie Poissona

Jeśli szukamy potencjału w obszarze w którym $\rho=0$

$$\Delta V = 0$$

równanie Laplace'a

$\rho=0$: ładunek może być gdzieś obok, ale nie w miejscu, w którym liczymy potencjał

Równanie Laplace'a

$\Delta V = 0$ równanie Laplace'a, tam gdzie $\rho = 0$

Lub w jawnej postaci we współrzędnych kartezjańskich:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

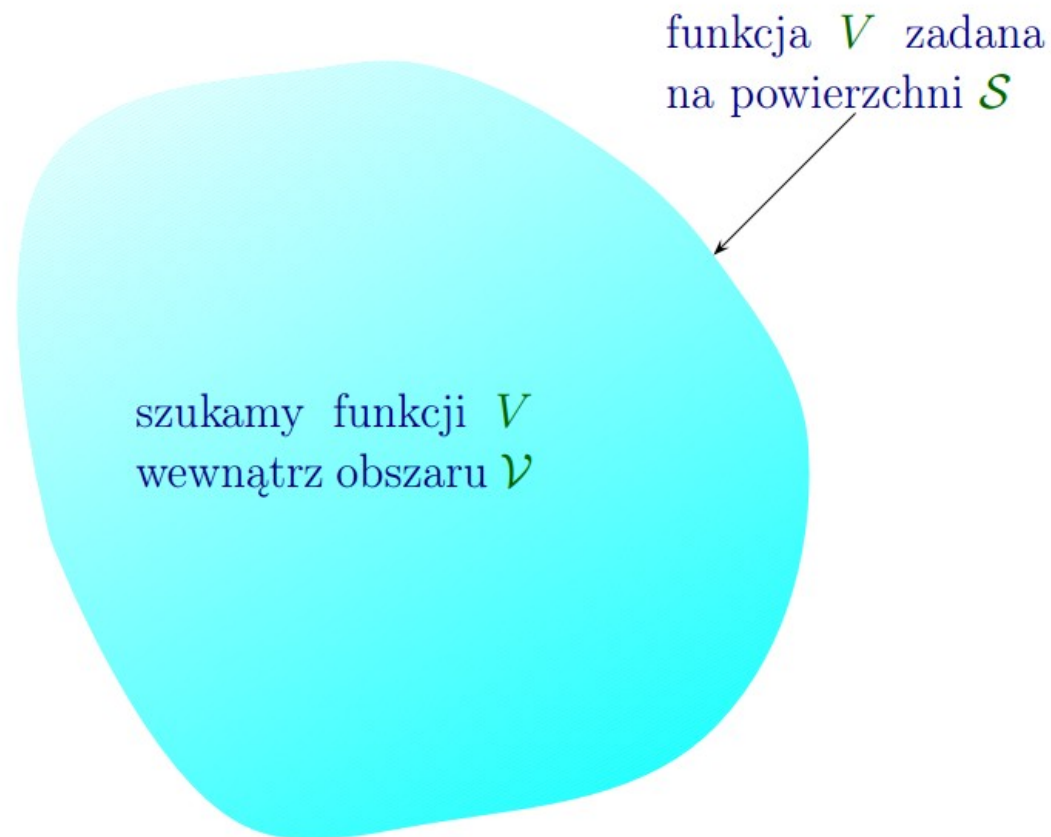
„Znaczenie tego równania w elektrostatyce jest tak duże, że można nieomal powiedzieć, iż dziedzina ta *srowadza się* po prostu do analizy równania Laplace'a.

Jednocześnie równanie to pojawia się w wielu odległych od siebie działach fizyki, na przykład teorii magnetyzmu, teorii grawitacji, teorii rozchodzenia się ciepła.”

Rozwiązania równania Laplace'a nazywa się **funkcjami harmonicznymi**.

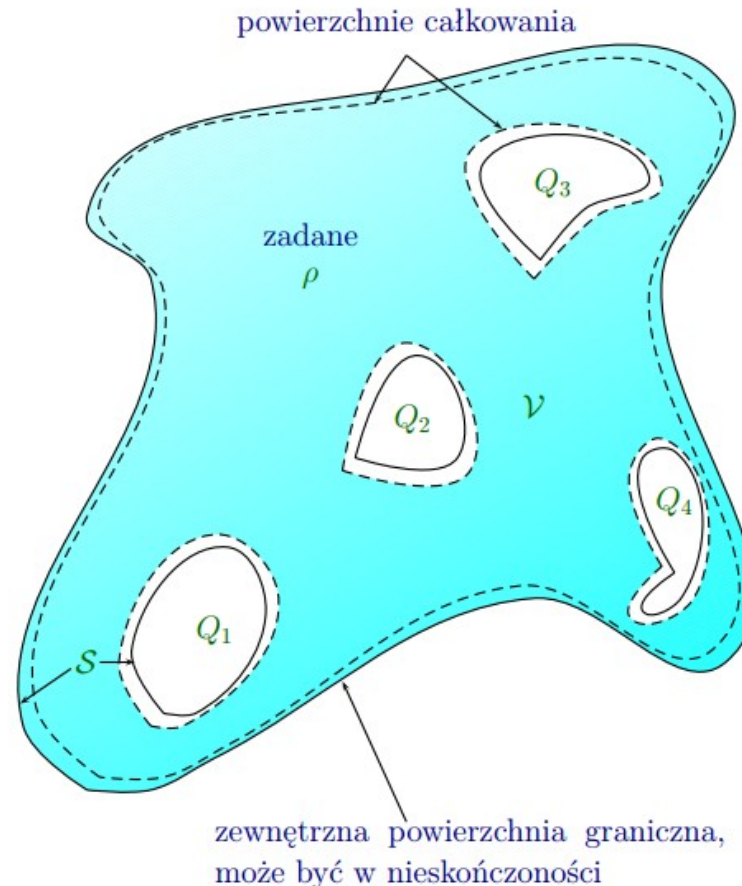
3.1.2 Warunki brzegowe i twierdzenie o jednoznaczności

Rozwiązanie równania Laplace'a w pewnym obszarze \mathcal{V} jest określone jednoznacznie, jeśli podana jest wartość rozwiązania V na powierzchni \mathcal{S} będącej brzegiem obszaru \mathcal{V} .



3.1.3 Przewodniki i drugie twierdzenie o jednoznaczności

W obszarze \mathcal{V} otoczonym przez przewodniki i zawierającym ładunki objętościowe o gęstości ρ pole elektryczne jest określone jednoznacznie, jeśli zadany jest całkowity ładunek na każdym z przewodników.



Metoda separacji (rozdzielenia) zmiennych

- Metoda ta ma zastosowanie w przypadkach, gdy **dany** jest potencjał (V) lub powierzchniowa gęstość ładunku (σ) **na brzegach** pewnego obszaru i chcemy **wyznaczyć** potencjał **wewnątrz** obszaru.
- Strategia: *szukamy rozwiązań, które są iloczynami funkcji zależnych jedynie od jednej współrzędnej.*

$$V(x,y,z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

- Taka separacja zmiennych oczywiście zwykle *nie jest spełniona* i stosując ten przepis znajdziemy jedynie rozwiązania separowalne (a dokładniej, ich *nieskończoną ilość*).
- Jednak wtedy możemy obliczyć ostateczne V tworząc *kombinację liniową* rozwiązań separowalnych.

$$V(x, y, z) = \sum_{mn}^{\infty} V_{mn}$$

Metoda separacji (rozdzielenia) zmiennych

r. Laplace'a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

rozw. będące iloczynami po 1
współrzędnej

$$V = X(x) Y(y) Z(z)$$

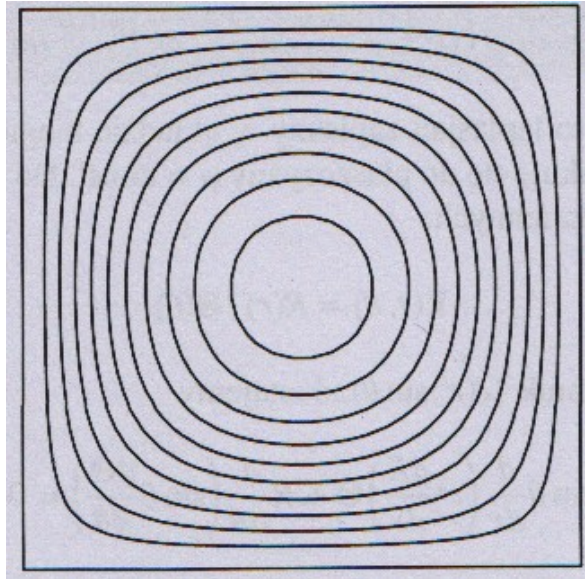
wstawiamy do wzoru

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

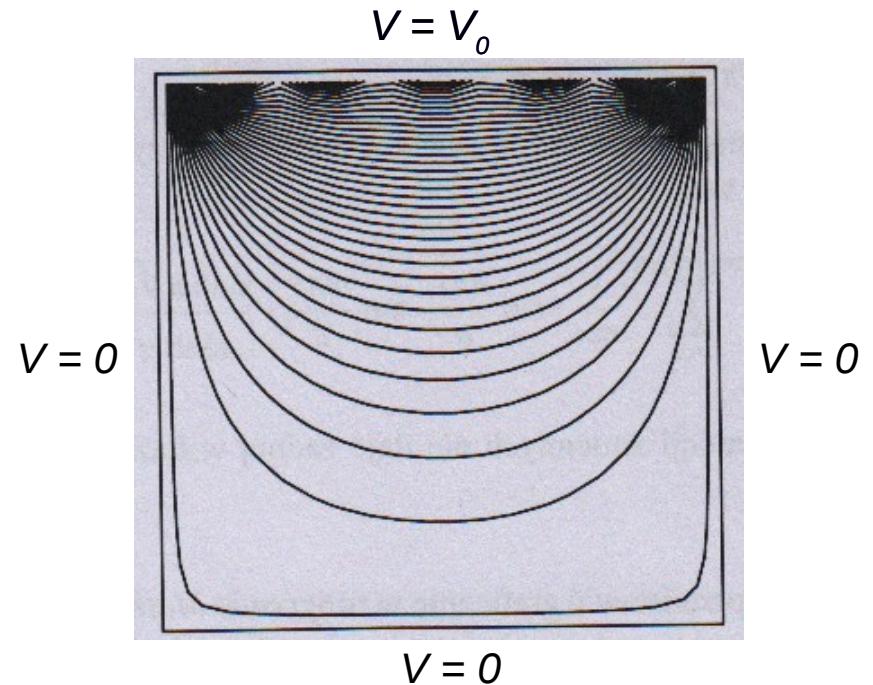
dzielimy przez XYZ

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Linie ekwipotencjalne otwartego pudełka



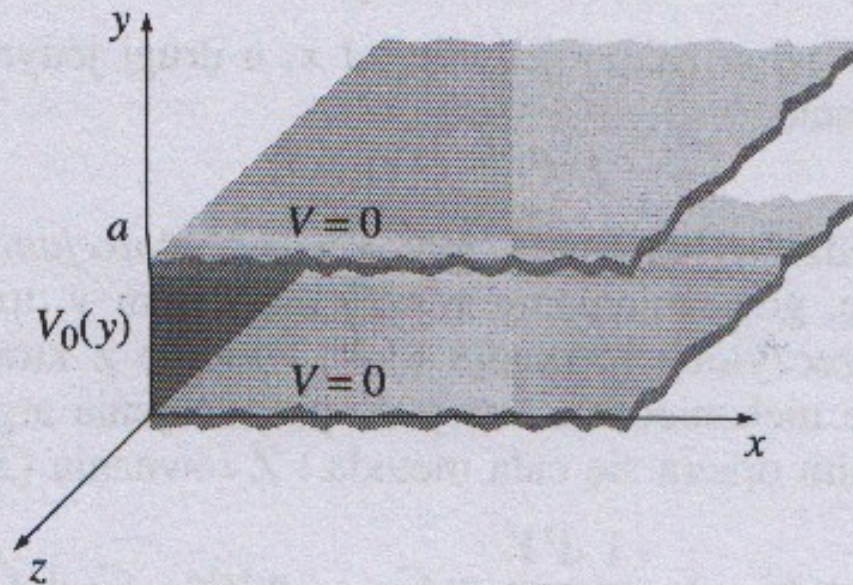
Linie ekwipotencjalne pudełka
przekrojonego **poziomą**
płaszczyzną
 $z = a/2$



Linie ekwipotencjalne pudełka
przekrojonego **pionową**
płaszczyzną
 $y = a/2$

Przykład 3.3

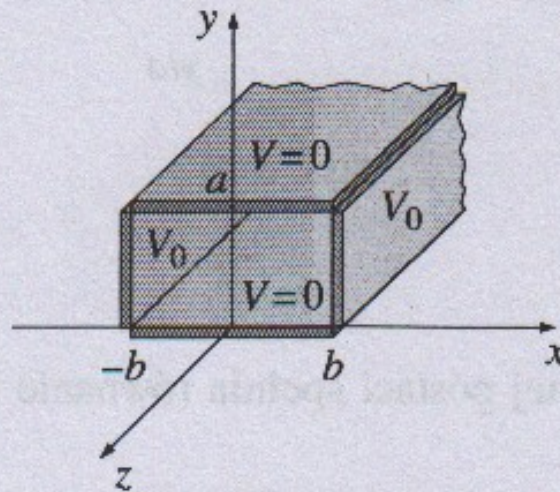
Dwie nieskończone uziemione metalowe płyty umieszczone są równoległe do płaszczyzny xz w taki sposób, że dla jednej z nich $y = 0$, a dla drugiej $y = a$ (rys. 3.17). Z lewej strony przestrzeni między płytami zamknięta jest w $x = 0$ nieskończonym paskiem odizolowanym od płyt, na którym utrzymywany jest potencjał $V_0(y)$. Znaleźć potencjał w tej „szczelinie”.



Rys. 3.17

Przykład 3.4

Dwie nieskończenie długie metalowe płyty, umieszczone w $y = 0$ i $y = a$, połączone są w $x = \pm b$ metalowymi paskami, na których utrzymywany jest stały potencjał V_0 , jak to przedstawiono na rys. 3.20 (płyty są odizolowane od pasków cienką warstwą izolacji na każdej krawędzi). Znaleźć potencjał w powstałej w ten sposób rurze o przekroju prostokątnym.



Rys. 3.20