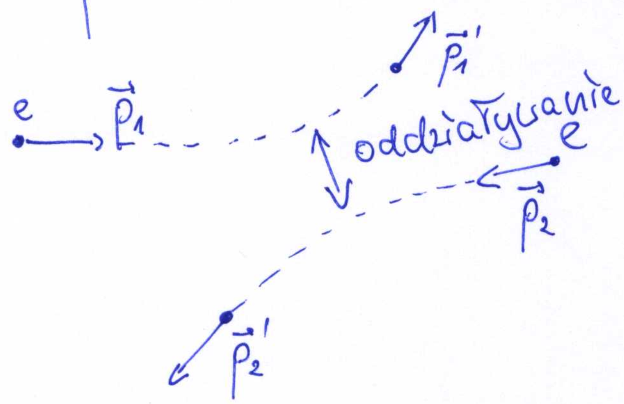
# Wprowadzenie do kwantowej teorii pola

1) Quantum Field Theory in a Nutshell, A. Zee
2) Klasyczna teoria pola, K. A. Meissner

# I Dlaczego potrzebujemy kwantowej teorii pola?

1. Zgodnie z teorią względności informacja (energia, pęd,...) nie mogą się przenosić z prędkością większą od c. Zatem natychmiastowe oddziaływanie na odległość jest sprzeczne z teorią względności.




przenoszone przez pole e.m.

Do przenoszenia oddziaływania pomiędzy cząstkami potrzebne jest pewne medium, czyli pole. Tak jak w przypadku oddziaływania naładowanych elektrycznie cząstek, gdzie owym medium jest pole elektromagnetyczne.

2. Zgodnie z teorią względności zachodzi równoważność masy i energii.
Dlatego np. powinien zachodzić proces powstawania (kreacji) cząstek kosztem energii pola e.m.
Równanie Schrödingera, którym posługujemy się przy opisie cząstek kwantowych, nie przewiduje takiej możliwości. Funkcja falowa $\psi(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N,t)$ opisująca układ N cząstek nie może "zmienić" liczby cząstek w wyniku ewolucji:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$$

# 3. Kwantowa teoria pola w opisie układów wielu ciał

Przypuśćmy, że chcemy zastosować mechanikę kwantową do opisu np. ciała stałego.
Funkcja falowa dla takiego układu będzie zależeć od $N \sim 10^{23}$ zmiennych.
Jeżeli jednak interesują nas jedynie wzbudzenia układu o niedużych energiach to wygodnie jest wprowadzić opis układu przy pomocy pól. Pola te będą opisywać zaburzenia (wzbudzenia) układu w odniesieniu do konfiguracji stanu podstawowego.
W ten sposób unikamy używania funkcji falowej $\psi(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t)$ gdzie $N \sim 10^{23}$ wprowadzając mniejszą liczbę stopni swobody (pól): $\Phi_\alpha(\vec{r}, t)$ $\alpha = 1, \ldots, M$ $(M \ll N)$, które pozwolą opisać wzbudzenia układu o niewielkich energiach.
Dla pól $\Phi_\alpha(\vec{r}, t)$ musimy wyprowadzić r-nia ruchu.
Oczywiście przy przejściu:

$$\psi(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) \to \Phi_\alpha(\vec{r}, t) \;, \alpha = 1, \ldots, M$$

tracimy dużo informacji. Tzn. mając jedynie informację o $\Phi_\alpha$ nie jesteśmy w stanie odtworzyć pełnej informacji o układzie.

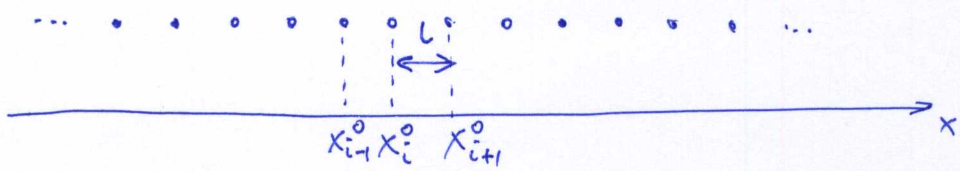
## Przykład

Rozważmy jednowymiarowy układ $N$ oddziałujących cząstek. Klasyczna funkcja Lagrange'a jest postaci:

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - V(\vec{x})$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Przypuśćmy, że konfiguracją o najniższej energii (odpowiednik stanu podstawowego w mechanice kwantowej) jest układ równoodległych cząstek:




Położenia dla tej konfiguracji oznaczmy przez $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$

Rozważmy teraz małe zaburzenie z położenia równowagi:

$$\delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}^0$$

$$V(\vec{x}) = V(\vec{x}^0) + \sum_i \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}^0}}_{=0 \text{ - bo w stanie równowagi siły znikają}} \delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\vec{x}^0} \delta x_i \, \delta x_j + \dots$$

Dla małych zaburzeń:

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = L(\delta\vec{x},\delta\dot{\vec{x}}) \approx \sum_i \frac{1}{2} m (\delta\dot{x}_i)^2 - V(\vec{x}^0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}\, \delta x_i \, \delta x_j$$

$$\text{gdzie} \quad k_{ij} = k_{ji} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\vec{x}^0}$$

Ponieważ $V(\vec{x}^0)$ jest stałe zatem możemy je pominąć:

$$(*) \qquad L_h(\delta\vec{x},\delta\dot{\vec{x}}) = \sum_i \frac{1}{2} m (\delta\dot{x}_i)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}\, \delta x_i \, \delta x_j$$

$L_h$ - oznacza f. Lagrange'a w przybliżeniu harmonicznym

Funkcja Lagrange'a $L_h$ opisuje układ w przybliżeniu małych drgań wokół konfiguracji odpowiadającej najniższej energii.

Niech $k_{ij} \neq 0$ tylko dla $j = i-1, i, i+1$

$$k_{ii} = k_1 \quad , \quad k_{i\,i+1} = k_2$$

Wtedy $L_h(\delta\vec{x}, \delta\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \sum_i (\delta\dot{x}_i)^2 - \frac{1}{2} k_1 \sum_i (\delta x_i)^2 - \frac{1}{2} k_2 \sum_i \delta x_i (\delta x_{i-1} + \delta x_{i+1})$

Przypuśćmy, że chcemy zbadać zachowanie układu w skali dużo większej od $l$.

Możemy zatem potraktować "$i$" jako zmienną ciągłą i zamiast używać $N$ zmiennych: $\delta x_1, \ldots, \delta x_N$ wprowadzić pole $\Phi(x,t)$

Wartość pola $\Phi$ dla ustalonego $x$ będzie zatem równa wart. $\delta x_i$ dla "$i$" odpowiadającego $x$.

$$\sum_i \frac{1}{2} m (\delta\dot{x}_i)^2 \longrightarrow \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} k_1 \sum_i (\delta x_i)^2 \longrightarrow \frac{1}{2l} k_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \Phi^2$$

$$+\frac{1}{2} k_2 \sum_i \delta x_i (\delta x_{i-1} + \delta x_{i+1}) = \frac{1}{2} k_2 \sum_i \left[ l^2 \delta x_i \frac{\frac{\delta x_{i+1} - \delta x_i}{l} - \frac{\delta x_i - \delta x_{i-1}}{l}}{l} + 2(\delta x_i)^2 \right]$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} k_2 \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} l^2 + 2\Phi^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2l} k_2 \left[ l^2 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( l^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - 2\Phi^2 \right) \right]$$

Czyli

$$L_h(\delta\vec{x}, \delta\dot{\vec{x}}) \rightarrow L_h(\Phi, \partial_t \Phi, \partial_x \Phi)$$

gdzie

$$L_h(\Phi, \partial_t\Phi, \partial_x\Phi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{m}{l} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 + k_2 l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{2k_2}{l} + \frac{k_1}{l}\right) \Phi^2 \right]$$

przy czym pominęliśmy człon powierzchniowy.

Przeskalowując $\Phi \to \sqrt{\frac{m}{L}}\,\Phi$ otrzymujemy:

$$L_h = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{k_2 L^2}{m}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{2k_2 + k_1}{m}\Phi^2 \right]$$

Warunki stabilności: $k_2 < 0$, $k_1 \geqslant -2k_2$

Oznaczenia: $c^2 = -\frac{k_2 L^2}{m}$, $\alpha^2 = \frac{2k_2 + k_1}{m}$

Jednostki: $c^2 \left[\left(\frac{m}{s}\right)^2\right]$, $\alpha^2 \left[\frac{1}{s^2}\right]$

Zatem

$$L_h(\Phi, \partial_t \Phi, \partial_x \Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathcal{L}_h(\Phi, \partial_t \Phi, \partial_x \Phi)$$

gęstość (liniowa) f. Lagrange'a.

$$\mathcal{L}_h(\Phi, \partial_t \Phi, \partial_x \Phi) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - \alpha^2 \Phi^2\right]$$

R-nia dla pola $\Phi$ możemy otrzymać minimalizując działanie

$$S = \int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathcal{L}_h(\Phi, \partial_t \Phi, \partial_x \Phi)$$

gdzie jako zmienne niezależne traktujemy $\Phi$, $\partial_t \Phi$ i $\partial_x \Phi$

$$\delta S = \int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \Phi}\delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial(\partial_t \Phi)}\delta(\partial_t \Phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \Phi)}\delta(\partial_x \Phi)\right] =$$

$$\delta(\partial_t \Phi) = \partial_t \delta\Phi, \quad \delta(\partial_x \Phi) = \partial_x \delta\Phi$$

$$= \int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \Phi}\delta\Phi\right] + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial(\partial_t \Phi)}\delta\Phi\Big|_0^T - \int_0^T dt\, \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial(\partial_t \Phi)}\delta\Phi\right]$$

$$+ \int_0^T dt \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial(\partial_x \Phi)}\delta\Phi\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial(\partial_x \Phi)}\delta\Phi\right]$$

Ponieważ wariacje pól $\Phi$ muszą znikać na brzegach obszaru czasoprzestrzennego, tzn dla $t=0$, $t=T$, oraz $x = \pm\infty$ zatem

$$\delta S = \int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \Phi} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial(\partial_t \Phi)} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial(\partial_x \Phi)} \right] \delta\Phi = 0$$

Zatem szukane r-nia Eulera-Lagrange'a są postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial(\partial_t \Phi)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial(\partial_x \Phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \Phi} = 0$$

Dla naszego $\mathcal{L}_n$ otrzymamy zatem:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \alpha^2 \Phi = 0}$$

klasyczne r-nia ruchu dla pola $\Phi$

Dla przypadku trójwymiarowego:

$$(*) \quad \boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 + \alpha^2\right] \Phi(\vec{r}, t) = 0}$$

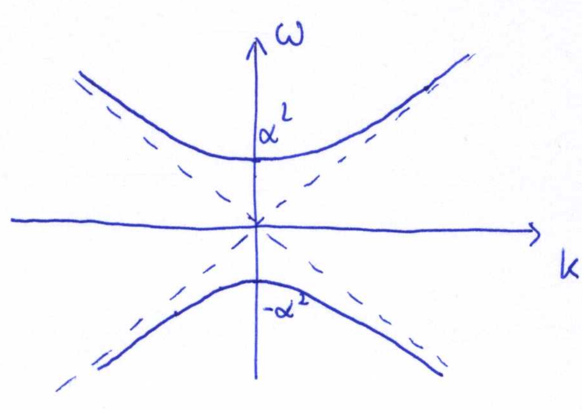
Szukamy rozwiązań w postaci:

$$\Phi(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + c.c. \qquad (\text{bo } \Phi \in \mathbb{R})$$

Podstawiając do (*) otrzymujemy:

$$\left[-\omega^2 + c^2k^2 + \alpha^2\right]\left(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + c.c.\right) = 0$$

zatem $\omega(k) = \pm\sqrt{c^2k^2 + \alpha^2}$ - r-nie dyspersyjne (łączy częstość fali z długością)



Ogólne rozwiązanie r-nia (*):

$$\Phi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k\,\sqrt{\hbar}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega(\vec{k})}} \left[ a(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a^*(\vec{k})\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right]$$

$\Phi(\vec{r},t) \in R$, $\sqrt{\hbar}$ dodamy dla późniejszej wygody.

$a(\vec{k})$ - amplituda fali o wektorze falowym $\vec{k}$.

Gęstość f. Lagrange'a

$$\mathcal{L}_h(\Phi, \partial_t\Phi, \vec{\nabla}\Phi) = \frac{1}{2}\left[ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - c^2(\vec{\nabla}\Phi)^2 - \alpha^2\Phi^2 \right]$$

opisuje pole swobodne (nieoddziałujące)

R-nie (*) nazywamy r-niem Kleina-Gordona.

$$L_h(\Phi, \partial_t\Phi, \vec{\nabla}\Phi) = \int d^3r\, \mathcal{L}_h(\Phi, \partial_t\Phi, \vec{\nabla}\Phi)$$

## Kwantowanie pola $\Phi$

Aby skwantować pole $\Phi$ wróćmy do układu wyjściowego:

$$L_h(\delta\vec{x}, \delta\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \sum_i (\delta\dot{x}_i)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}\, \delta x_i\, \delta x_j$$

## I Kwantowanie kanoniczne

a) wprowadzamy pędy kanonicznie sprzężone do $\delta\vec{x}$

b) zastępujemy $\delta\vec{x}$ i $\vec{p}$ operatorami tak aby zachodziła zależność: $[\delta\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$

c) konstruujemy Hamiltonian:

$$L_h(\delta\vec{x}, \delta\dot{\vec{x}}) \rightarrow H(\delta\vec{x}, \vec{p}) \rightarrow \hat{H}(\delta\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}})$$

d) ewolucja czasowa stanu $|\psi(t)\rangle$ jest dana przez:

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle$$

Postępujemy analogicznie dla pól:

Ad a) $p_i = \frac{\partial L_n}{\partial(\delta \dot{x}_i)}$

czyli analogicznie:

$$\Pi(\vec{r},t) = \frac{\partial L_n}{\partial(\partial_t \Phi)} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Ad b) $[\delta \hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$

czyli analogicznie:

$$[\hat{\Phi}(\vec{r}',t), \hat{\Pi}(\vec{r},t)] = i\hbar \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

gdzie $\Pi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \sqrt{\hbar\omega(\vec{k})} \left[-ia(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + ia^*(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$

Przejście $\Phi \to \hat{\Phi}$, $\Pi \to \hat{\Pi}$ oznacza: $a(\vec{k}) \to \hat{a}(\vec{k})$ i $a^*(\vec{k}) \to \hat{a}^+(\vec{k})$

Wtedy

$$[\hat{\Phi}(\vec{r},t), \hat{\Pi}(\vec{r}',t)] =$$

$$= \int \frac{d^3k\, d^3k'}{2(2\pi)^3} \hbar \sqrt{\frac{\omega(\vec{k}')}{\omega(\vec{k})}} \Big( -i\left[a(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a^+(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, a(\vec{k}')\right] e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}'-\omega' t)} +$$
$$+ i\left[a(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a^+(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, a^+(\vec{k}')\right] e^{-i(\vec{k}'\cdot\vec{r}'-\omega' t)} \Big)$$

Niech $[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$ wtedy

$$[\hat{\Phi}(\vec{r},t), \hat{\Pi}(\vec{r}',t)] = \int \frac{d^3k\, d^3k'}{2(2\pi)^3} \hbar \sqrt{\frac{\omega(\vec{k}')}{\omega(\vec{k})}} \left(+i\delta(\vec{k}-\vec{k}')e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}'-\vec{r})} + i\delta(\vec{k}-\vec{k}')e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} i\hbar \int d^3k \left(e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} + e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}'-\vec{r})}\right) \frac{1}{(2\pi)^3} = i\hbar\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

Czyli otrzymujemy żądaną relację: $[\hat{\Phi}(\vec{r},t), \hat{\Pi}(\vec{r}',t)] = i\hbar\delta(\vec{r}-\vec{r}')$
jeśli $[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$

Ad c) $H(\delta\vec{x}, \vec{p}) = \sum_i \delta\dot{x}_i p_i - L_h(\delta\vec{x}, \delta\dot{\vec{x}}) =$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \frac{p_i^2}{m} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}\,\delta x_i \delta x_j$$

czyli analogicznie:

$$H(\Phi, \pi) = \int d^3r \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t}\pi - \mathcal{L}_h \right] =$$

$$= \int d^3r \left[ \pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}c^2(\vec{\nabla}\Phi)^2 + \alpha^2\Phi^2 \right]$$

Zatem
$$H(\Phi, \pi) = \int d^3r\, \mathcal{H}(\Phi, \pi)$$

gdzie $\mathcal{H}(\Phi, \pi) = \frac{1}{2}\left[\pi^2 + c^2(\vec{\nabla}\Phi)^2 + \alpha^2\Phi^2\right]$ - gęstość f. Hamiltona

Podstawiając ogólne wyrażenia na $\hat{\Phi}$ i $\hat{\pi}$ otrzymujemy:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d^3r \int \frac{d^3k\, d^3k'}{2(2\pi)^3} \hbar \sqrt{\omega(\vec{k})\omega(\vec{k}')} \left(-i a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + i a^+(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \times$$

$$\times \left(-i a(\vec{k}') e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)} + i a^+(\vec{k}') e^{-i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4(2\pi)^3}\int d^3k\, d^3k' \sqrt{\hbar^2\omega(\vec{k})\omega(\vec{k}')} \Big( - a(\vec{k})a(\vec{k}')(2\pi)^3\delta(\vec{k}+\vec{k}')e^{-i(\omega+\omega')t} +$$

$$+ a^+(\vec{k})a(\vec{k}')(2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}')e^{i(\omega-\omega')t} + a(\vec{k})a^+(\vec{k}')(2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}')e^{-i(\omega-\omega')t} -$$

$$- a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')(2\pi)^3\delta(\vec{k}+\vec{k}')e^{i(\omega+\omega')t}\Big) + \ldots =$$

$$\cancel{= \frac{1}{4}\int d^3k\, \hbar\omega(\vec{k}) \left(-a(\vec{k})a(-\vec{k}) - a^+(\vec{k})a(-\vec{k})\right) e}$$

$$= \frac{1}{4}\int d^3k\, \hbar\omega(\vec{k}) \left(-a(\vec{k})a(-\vec{k})e^{-2i\omega(\vec{k})t} - a^+(\vec{k})a^+(-\vec{k})e^{2i\omega(\vec{k})t}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\int d^3k\, \hbar\omega(\vec{k}) \left(a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^+(\vec{k})\right) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4}\int d^3k \left(\hbar\omega(\vec{k}) + c^2\frac{\hbar(-k^2)}{\omega(\vec{k})} - \alpha^2\frac{\hbar}{\omega(\vec{k})}\right)\left(-a(\vec{k})a(-\vec{k})e^{-2i\omega t} - a(\vec{k})a(-\vec{k})e^{2i\omega t}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\int d^3k \left(\hbar\omega(\vec{k}) + c^2\frac{\hbar k^2}{\omega(\vec{k})} + \alpha^2\frac{\hbar}{\omega(\vec{k})}\right)\left(a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^+(\vec{k})\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \omega^2 = c^2 k^2 + \alpha^2 \\ \omega = \pm\sqrt{c^2k^2+\alpha^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3k\, \hbar\omega(\vec{k}) \left( a^+(\vec{k})\, a(\vec{k}) + a(\vec{k})\, a^+(\vec{k}) \right)$$

Czyli

$$\hat{H} = \int d^3k\, \frac{\hbar\omega(\vec{k})}{2} \left[ a^+(\vec{k})\, a(\vec{k}) + a(\vec{k})\, a^+(\vec{k}) \right]$$

lub stosując $\left[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')\right] = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$

$$\hat{H} = \int d^3k\, \hbar\omega(\vec{k})\, a^+(\vec{k})\, a(\vec{k}) \quad + \quad \text{nieskończoność}$$

energia drgań zerowych próżni.

<u>Uwagi</u>

1) Nieskończoność bierze się stąd, że w stanie podstawowym cząstki drgają z energią $\sim \frac{\hbar\omega}{2}$.
Zatem energia stanu podstawowego to jest $\int d^3k\, \frac{\hbar\omega(\vec{k})}{2} = \infty$ jeśli przechodzimy do granicy $N \to \infty$.
W kwantowej teorii pola jesteśmy zainteresowani tylko różnicami energii (i te powinny być skończone).

2) Operatory $a(\vec{k})$ i $a^+(\vec{k})$ spełniają reguły komutacyjne jak dla oscylatora harmonicznego.
Zastąpiliśmy zatem wyjściowy układ, układem niezależnych oscylatorów harmonicznych o częstościach $\omega(\vec{k})$
(było to możliwe tylko dlatego, że ograniczyliśmy się do członów $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ w rozwinięciu $V$).

3) Możemy wprowadzić bazę stanów własnych $\hat{H}$ postaci:

$$|n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2} \dots\rangle \text{ , takich że}$$

$$a(\vec{k}_i)|\dots n_{\vec{k}_i} \dots\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}_i}}\,|\dots n_{\vec{k}_i}-1 \dots\rangle$$

$$a^+(\vec{k}_i)|\dots n_{\vec{k}_i} \dots\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}_i}+1}\,|\dots n_{\vec{k}_i}+1 \dots\rangle$$

czyli $\quad a^+_{\vec{k}_i} a_{\vec{k}_i} |\dots n_{\vec{k}_i} \dots\rangle = n_{\vec{k}_i} |\dots n_{\vec{k}_i} \dots\rangle$

gdzie $n_{\vec{k}_i}$ jest liczbą obsadzeń stanu o wektorze falowym $\vec{k}_i$, $n_{\vec{k}_i} = 0, 1, 2, \dots$

$$\hat{H}|n_{\vec{k}_1} \dots\rangle = \int d^3k\, \hbar\omega(\vec{k})\, n_{\vec{k}}\, |n_{\vec{k}_1} \dots\rangle \quad \text{(bez drgań zerowych)}$$

Stan $|00\dots\rangle = |0\rangle$ będziemy nazywać stanem próżni (stan o najniższej energii). Jego klasycznym odpowiednikiem jest stan pola: $\Phi(\vec{r}, t) = 0$.

4) Operatory $a^+(\vec{k})$ i $a(\vec{k})$ nazywamy operatorami kreacji i anihilacji (bozonowymi).

~~krea~~

$a^+(\vec{k})$ kreuje kwant pola o energii $\hbar\omega(\vec{k})$ i wektorze falowym $\vec{k}$.

Zauważmy różnicę pomiędzy klasycznym i kwantowym wyrażeniem na energię:

klasycznie:

$$H = \int d^3k\, \hbar\omega(\vec{k})\, |a(\vec{k})|^2$$

dla ustalonej częstości $\omega$ można wykreować dowolnie małą energię, bo $|a(\vec{k})|^2$ jest ciągłe

kwantowo:

$$\langle \hat{H} \rangle = \int d^3k\, \hbar\omega(\vec{k})\, n_{\vec{k}}$$

w stanie własnym $\hat{H}$

$n_{\vec{k}} = 0, 1, 2, \dots$

dla ustalonego $\omega(\vec{k})$ minimalna energia jaką można wykreować to $\hbar\omega(\vec{k})$.

(por. promieniowanie ciała dosk. czarnego)

5) Analogicznie do $a^+(\vec{k})$ i $a(\vec{k})$ można zdefiniować operatory kreacji i anihilacji np. w reprezentacji położeniowej: $a^+(\vec{r})$, $a(\vec{r})$ takie że:

$$(*) \quad [a(\vec{r}), a^+(\vec{r}\,')] = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$a^+(\vec{r})$ kreuje kwant pola w punkcie $\vec{r}$.

Czyli jeśli: $a^+(\vec{k})|0\rangle = |\ldots 0\, 1_{\vec{k}}\, 0\ldots\rangle = |\vec{k}\rangle$

to $a^+(\vec{r})|0\rangle = |\ldots 0\, 1_{\vec{r}}\, 0\ldots\rangle = |\vec{r}\rangle$

Relację pomiędzy $a^+(\vec{k})$ i $a^+(\vec{r})$ łatwo znaleźć zauważywszy, że $\langle\vec{r}|\vec{k}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

czyli ponieważ:

$$|\vec{r}\rangle = \int d^3k\, |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\vec{r}\rangle$$

$$a^+(\vec{r})|0\rangle = \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} a^+(\vec{k})|0\rangle$$

zatem

$$\begin{cases} a^+(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} a^+(\vec{k}) \\ a(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} a(\vec{k}) \end{cases}$$

łatwo sprawdzić że tak zdefiniowane operatory spełniają relację (*).

~~Zauważmy, że:~~

$$\cancel{\hat{\Phi}(\vec{r},t) = \int d^3k \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left[a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a^+(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] =}$$

$$\cancel{= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \left[a(\vec{r}) e^{-i\omega}\right.}$$

5a)
Często wygodniej jest posługiwać się dyskretnym zestawem wektorów $\vec{k}$ i dokonać przejścia do granicy ciągłej na końcu.
Dyskretyzacji $\vec{k}$ dokonujemy zamykając układ w obj. V i narzucając periodyczne warunki brzegowe:

$$\boxed{\int d^3k \rightarrow \frac{(2\pi)^3}{V}\sum_{n_x,n_y,n_z}{}' \overset{\text{ozn.}}{=} \frac{(2\pi)^3}{V}\sum_{\vec{k}}{}'}$$

wtedy
$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}{}' e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Relacje dotyczące różnych wielkości modyfikują się w następujący sposób:

$$\Phi(\vec{r},t) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})}}\left[a(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.\right] \quad - \vec{k} \text{ - ciągłe}$$

przechodzi w:

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}{}' \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})}}\left[a_{\vec{k}}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.\right] \quad - \vec{k} \text{ - dyskretne}$$

$$[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = \delta(\vec{k}-\vec{k}') \implies [a_{\vec{k}}, a^+_{\vec{k}'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} = \delta_{n_x n_x'}\delta_{n_y n_y'}\delta_{n_z n_z'}$$

stąd $\boxed{a(\vec{k}) = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}}\, a_{\vec{k}}}$

$$\hat{H} = \int d^3k\, \hbar\omega(\vec{k})\, a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \rightarrow \frac{(2\pi)^3}{V}\sum_{\vec{k}}{}' \hbar\omega(\vec{k})\frac{V}{(2\pi)^3}a^+_{\vec{k}}a_{\vec{k}} =$$
$$= \sum_{\vec{k}}{}' \hbar\omega(\vec{k})\, a^+_{\vec{k}}a_{\vec{k}}$$

$$a(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}a(\vec{k}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{(2\pi)^3}{V}\sum_{\vec{k}}{}' e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}}\,a_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}{}' e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}a_{\vec{k}}$$

6) Ewolucja pola

Klasycznie : $\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 + \alpha^2\right] \Phi(\vec{r}, t) = 0$

Kwantowo :

Dowolny stan pola można utworzyć przez kombinację liniową stanów własnych $\hat{H}$ :

(*) $|\psi(0)\rangle = \sum_{\{n_{\vec{k}}\}} |\dots n_{\vec{k}_i} \dots\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\psi(0)\rangle$$

Ponieważ w praktyce interesują nas wyrażenia typu :

$$\langle\psi_1(t)|\hat{O}|\psi_2(t)\rangle$$

to wygodniej jest ewoluować $\hat{O}(t)$ zamiast $|\psi\rangle$ :

$$\langle\psi_1(0)|\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,\hat{O}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}_{\hat{O}(t)}|\psi_2(0)\rangle = \langle\psi_1|\hat{O}(t)|\psi_2\rangle$$

gdzie $\hat{O}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,\hat{O}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$

czyli $\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\hat{H}\,\hat{O}(t) - \hat{O}(t)\,\frac{i}{\hbar}\hat{H}$

(**) $\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{O}(t), \hat{H}\right]$ — por. z klasycznym wyrażeniem $\frac{dO}{dt} = \{O, H\}$

Wygodniej jest używać (**) niż (*) z uwagi na to, że stany pola są o wiele bardziej skomplikowane niż operatory.

Np. operator $a(\vec{k},t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\, a(\vec{k})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$

ewoluuje zgodnie z r-niem

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[a(\vec{k},t), \hat{H}\right] = \frac{1}{i\hbar}\left[e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} a(\vec{k}) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}, \hat{H}\right] =$$

$$= \int d^3k'\, \hbar\omega(\vec{k}') \frac{1}{i\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\left(a(\vec{k})a^+(\vec{k}')a(\vec{k}') - a^+(\vec{k}')a(\vec{k}')a(\vec{k})\right)$$

$$\times e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \left\{ \begin{array}{l} a(\vec{k})a^+(\vec{k}') = \\ = \delta(\vec{k}-\vec{k}') + a^+(\vec{k}')a(\vec{k}) \end{array} \right\} =$$

$$= \hbar\omega(\vec{k}) \frac{1}{i\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} a(\vec{k}) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = -i\omega(\vec{k})\, a(\vec{k},t)$$

Zatem $a(\vec{k},t) = a(\vec{k})\, e^{-i\omega_{\vec{k}}t}$

analogicznie $a^+(\vec{k},t) = a^+(\vec{k})\, e^{i\omega_{\vec{k}}t}$

7) Funkcje falowe

- Pojedynczy kwant

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = \langle 0 | a(\vec{r}) a^+(\vec{k}) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

funkcja ta będzie ewoluować w czasie zgodnie z relacją: $\varphi_{\vec{k}}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)}$

i spełnia klasyczne r-nie pola: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 + \alpha^2\right)\varphi_{\vec{k}}(\vec{r},t) = 0$

W ogólności jeśli kwant jest superpozycją kwantów o ustalonym $\vec{k}$, tzn.

$$\int d^3k\, f(\vec{k})\, a^+(\vec{k})|0\rangle \quad \text{to}$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, f(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)}$$

gdzie $\varphi(\vec{r},t)$ również spełnia klasyczne r-nie pola.

- Dwa kwanty

$$\varphi_{\vec{k}_1 \vec{k}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle =$$

$$= \langle 0 | a(\vec{r}_1) a(\vec{r}_2) a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) | 0 \rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k_1' \, d^3k_2' \, e^{i\vec{k}_1' \cdot \vec{r}_1 + i\vec{k}_2' \cdot \vec{r}_2} \langle 0 | a(\vec{k}_1') a(\vec{k}_2') a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) | 0 \rangle$$

$$= \int \langle 0 | a(\vec{k}_1') \left( \delta(\vec{k}_2' - \vec{k}_1) + a^+(\vec{k}_1) a(\vec{k}_2') \right) a^+(\vec{k}_2) | 0 \rangle \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}_1' \cdot \vec{r}_1 + i\vec{k}_2' \cdot \vec{r}_2}$$

$$= \int \langle 0 | \left( \delta(\vec{k}_1' - \vec{k}_2) \delta(\vec{k}_2' - \vec{k}_1) + \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_1') \delta(\vec{k}_2 - \vec{k}_2') \right) | 0 \rangle \cdot (\ldots) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \left( e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_1} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_2} + e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2} \right)$$

Zatem $\varphi_{\vec{k}_1 \vec{k}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varphi_{\vec{k}_1 \vec{k}_2}(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ – bozony.

Analogicznie można skonstruować funkcję falową dla wielu kwantów.

Zauważmy, że kwantowa teoria pola automatycznie staje się teorią wielu ciał (kwantów), przy czym dopuszczona ~~zostaje~~ zostaje możliwość kreacji i anihilacji ciał (kwantów).

8) Granica klasyczna odpowiada warunkowi, że $n_{\vec{k}} \gg 1$. Klasycznie nie rozróżniamy stanów kwantowych różniących się nieznacznie liczbami obsadzeń. Wobec tego o ile w ~~czystym~~ stanie kwantowym będącym stanem własnym $\hat{H}$ : $\langle \hat{\Phi} \rangle = 0$ to w przypadku klasycznym stan pola jest mieszaniną stanów z nieco różnymi liczbami obsadzeń i wtedy

$$\langle \hat{\Phi} \rangle = \Phi(\vec{r}, t)$$

9) Pole w obecności źródeł

Gęstość funkcji Lagrange'a

$$\mathcal{L}_n(\Phi, \partial_t\Phi, \vec{\nabla}\Phi) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - c^2(\vec{\nabla}\Phi)^2 - \alpha^2\Phi^2 + J\Phi\right]$$

gdzie $J = J(\vec{r}, t)$

Z r-ń Eulera - Lagrange'a mamy:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 + \alpha^2\right)\Phi(\vec{r}, t) = J(\vec{r}, t)$$

Po skwantowaniu:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(\vec{r}, t)$$

$$\hat{H}_0 = \int d^3k\ \hbar\omega(\vec{k})\, a^+(\vec{k})\, a(\vec{k})$$

$$\hat{V}(\vec{r}, t) = J(\vec{r}, t)\,\hat{\Phi}(\vec{r}, t)$$

Zauważmy, że $|0\rangle$ nie jest już stanem własnym $\hat{H}$.

10) Jak policzyć energię stanu podstawowego (nowej próżni) w obecności źródła.

Interesuje nas energia nowej próżni relatywnie do energii starej próżni, tzn. pomijamy energię drgań zerowych.

Rozważmy wyrażenie: $e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}|0\rangle$

Chcielibyśmy aby operator ewolucji $e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}$ dokonał ewolucji starej próżni (chwila $t=0$) do nowej próżni (chwila $t \to +\infty$).

Aby tak się stało musimy do $t$ dodać mały element urojony:

$$t \to t(1 - i\varepsilon) \quad , \quad \varepsilon > 0$$

Wtedy

$$\lim_{t \to +\infty} e^{+\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t(1-i\varepsilon)} |0\rangle = \lim_{t\to+\infty} e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t(1-i\varepsilon)} \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|0\rangle$$

gdzie $\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$

Niech $|\psi_0\rangle$ oznacza nową próżnię, tzn $E_0 < E_n$, $n \neq 0$.

Wtedy

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t(1-i\varepsilon)} \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|0\rangle =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \sum_n e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t(1-i\varepsilon)} |\psi_n\rangle\langle\psi_n|0\rangle =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \sum_n e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t} \, e^{-\frac{1}{\hbar}E_n t\varepsilon} |\psi_n\rangle\langle\psi_n|0\rangle =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{\hbar}E_0 t\varepsilon}\Big(\sum_{n\neq 0} e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t} \, e^{-\frac{1}{\hbar}(E_n - E_0)t\varepsilon} \cancel{+\, e^{\frac{1}{i\hbar}E_0}} |\psi_n\rangle\langle\psi_n|0\rangle$$

$$+ \, e^{\frac{1}{i\hbar}E_0 t} |\psi_0\rangle\langle\psi_0|0\rangle\Big) = \left| E_n - E_0 > 0 \right|$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{\frac{1}{i\hbar}E_0 t - \frac{1}{\hbar}E_0 t\varepsilon} |\psi_0\rangle\langle\psi_0|0\rangle$$

Czyli

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t(1-i\varepsilon)}|0\rangle}{\langle 0| e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t(1-i\varepsilon)}|0\rangle} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{i\hbar}E_0 t - \frac{1}{\hbar}E_0 t\varepsilon} |\psi_0\rangle\langle\psi_0|0\rangle}{e^{\frac{1}{i\hbar}E_0 t - \frac{1}{\hbar}E_0 t\varepsilon} \langle 0|\psi_0\rangle\langle\psi_0|0\rangle} = \frac{|\psi_0\rangle}{\langle 0|\psi_0\rangle}$$

Ponieważ

$$E_0 = \frac{\langle 0|\hat{H}|\psi_0\rangle}{\langle 0|\psi_0\rangle}$$

zatem możemy zapisać:

$$E_0 = \lim_{t\to+\infty} \langle 0|\hat{H} \frac{e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t(1-i\varepsilon)}|0\rangle}{\langle 0|e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t(1-i\varepsilon)}|0\rangle} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{i\hbar\frac{d}{dt}\langle 0|e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t(1-i\varepsilon)}|0\rangle}{\langle 0|e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t(1-i\varepsilon)}|0\rangle} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} i\hbar \frac{d}{dt} \ln \langle 0|e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t(1-i\varepsilon)}|0\rangle$$

Czyli

$$\boxed{E_0 = i\hbar\frac{d}{dt}\ln\left[\langle 0|e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t(1-i\varepsilon)}|0\rangle\right]\Bigg|_{\substack{t\to+\infty\\ \varepsilon\to 0^+\\ t\varepsilon\to+\infty}}}$$

Zauważmy, że chwila początkowa może być wybrana dowolnie. Tzn. w ogólności zachodzi:

$$E_0 = i\hbar\frac{d}{dt}\ln\left[\langle 0|e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t-t_0)(1-i\varepsilon)}|0\rangle\right]\Bigg|_{\substack{t\to+\infty\\ \varepsilon\to 0^+\\ t\varepsilon\to+\infty}}$$

11) Manifestacja energii drgań zerowych - efekt Casimira

Idea

Rozważmy kwantowe pole skalarne $\hat{\Phi}$ z Hamiltonianem

$$\hat{H} = \int d^3k \left[\hbar\omega(\vec{k})\, a^+(\vec{k})\, a(\vec{k}) + \frac{1}{2}\hbar\omega(\vec{k})\right]$$

W stanie podstawowym pola (próżni):

$$E_0 = \langle 0|\hat{H}|0\rangle = \int d^3k\, \frac{1}{2}\hbar\omega(\vec{k})$$

Dla ustalenia uwagi niech $\omega(\vec{k}) = ck$

Wtedy

$$E_0 = \int d^3k\, \hbar k c = \hbar c \int_0^\infty dk\, g(k)\, k$$

gdzie $g(k) = 4\pi k^2$

$g(k)$ określa gęstość stanów pola

Przypuśćmy że potrafimy zmienić $g(k)$ przez modyfikację warunków brzegowych dla pola:

$$E_0' = \hbar c \int_0^\infty dk\, g'(k)\, dk = \hbar c \int_0^\infty dk \left(g(k) + \delta g(k)\right) dk$$

poprawka do gęstości stanów wywołana zmianą war. brzegowych.

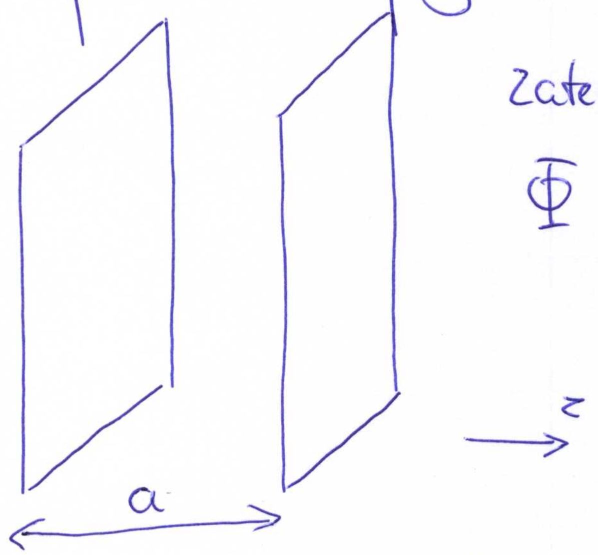
W takim przypadku, mimo że zarówno $E_0$ jak i $E_0'$ są nieskończone to

$$\boxed{\frac{1}{V}\left(E_0' - E_0\right) < \infty}$$ - różnica energii na jednostkę objętości.

## Praktyczna realizacja

Ustawiamy dwie metalowe płytki, które modyfikują warunki brzegowe pola e.m.

Dla uproszczenia rozważmy efekt Casimira dla naszego fikcyjnego pola $\Phi$, o którym założymy, że musi znikać na powierzchni płytek.



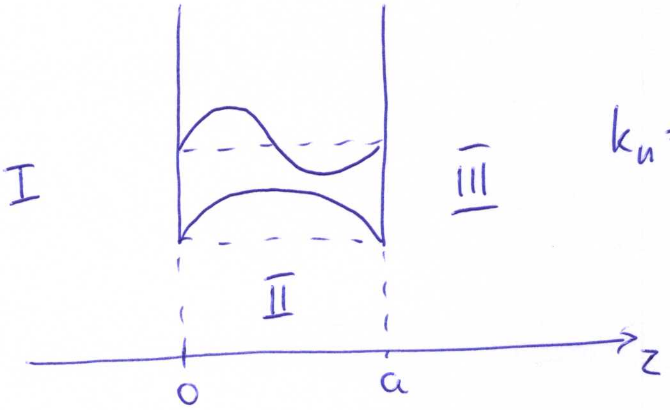

Zatem pomiędzy płytkami

$$\Phi \sim e^{ik_x x} e^{ik_y y} \sin\left(k_{z n_z} z\right)$$

Założenie: Rozmiar płytek (długość i szerokość) jest dużo większy od $a$.
Dzięki temu będziemy mogli zaniedbać wpływ krawędzi płytek.

Przypadek jednowymiarowy:

$$\Phi \sim \sin(k_n z)$$




$k_n = \frac{\pi}{a} n \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$

Zatem energia drgań zerowych w obecności płytek wynosi:

$$E_0(a) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \hbar\omega(k_n) = \frac{1}{2}\hbar c \sum_{n=1}^{\infty} k_n =$$

$$= \frac{1}{2}\hbar c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{a} n$$ ← jest to wkład do energii próżni z obszaru II.

Natomiast przy braku płytek:

$$\tilde{E}_0 = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hbar c \frac{2\pi}{L}|n| = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2}\frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hbar c|k| =$$

$$= \lim_{L\to\infty} \frac{L}{2\pi}\int_{0}^{\infty} dk\, \hbar c k$$

Ponieważ w obszarze I i III mody drgań zerowych nie są zmienione przez obecność płytek zatem wystarczy jeśli rozważymy tylko tę część $\tilde{E}_0$ pochodzącą z przedziału $(0, a)$.

Czyli

$$\Delta E(a) = E_0(a) - \tilde{E}_0 = \frac{1}{2}\hbar c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{a} n - \frac{\hbar a c}{2\pi}\int_0^{\infty} k\,dk$$

Regularyzacja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \to \underset{\underset{\alpha>0}{\uparrow}}{\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha n}} = -\frac{d}{d\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n} = -\frac{d}{d\alpha}\frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} + \frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} e^{-\alpha} = \frac{e^{-\alpha}(1-e^{-\alpha}) + e^{-2\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} = \frac{1}{\left(e^{+\frac{\alpha}{2}}(1-e^{-\alpha})\right)^2} = \frac{1}{\left(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4\sinh^2(\alpha/2)}$$

$$\int_0^{\infty} k\,dk \Rightarrow \int_0^{\infty} k e^{-\alpha\frac{ka}{\pi}}\,dk = \frac{\pi^2}{a^2\alpha^2}$$

Zatem

$$\Delta E(a,\alpha) = \frac{1}{2}\hbar c \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{a} n e^{-\alpha n} - \frac{\hbar a c}{2\pi}\int_0^{\infty} k e^{-\alpha\frac{ka}{\pi}}\,dk =$$

$$= \frac{1}{2}\hbar c \frac{\pi}{a}\frac{1}{4\sinh^2(\alpha/2)} - \frac{\hbar a c}{2\pi}\frac{\pi^2}{a^2\alpha^2} =$$

$$= \frac{\hbar c}{a}\pi\left[\frac{1}{8\sinh^2(\alpha/2)} - \frac{1}{2\alpha^2}\right] = \frac{\hbar c}{a}\pi\left[\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{1}{24} + \frac{\alpha^2}{480} + \dots - \frac{1}{2\alpha^2}\right]$$

Zatem

$$\boxed{\Delta E(a) = \lim_{\alpha\to 0^+} \Delta E(a,\alpha) = -\frac{\hbar c \pi}{24a}}$$

Zatem siła działająca na "płytki" w przypadku jednowymiarowym wynosi:

$$\boxed{F = -\frac{\partial \Delta E(a)}{\partial a} = -\frac{\hbar c \pi}{24 a^2}}$$

Siła ma charakter kwantowy, bo zależy od $\hbar$.

$$\hbar \to 0 \Rightarrow F = 0$$

Oddziaływanie pomiędzy płytkami jest długozasięgowe.

Dla próżni pola e.m. w 3 wymiarach analogiczny wzór

$$\boxed{\frac{\Delta E(a)}{S} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 a^3}} \quad ; \quad S \text{ - powierzchnia płytek}$$

stąd siła na jednostkę powierzchni:

$$\frac{F}{S} = \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{a^4}$$

Podobne efekty w innych działach fizyki:

- oddziaływanie między domieszkami zanurzonymi w cieczy Fermiego (np. Ruderman - Kittel interaction).
- efekty powłokowe w jądrach atomowych.
- efekt Casimira dla nietrywialnych topologii czasoprzestrzeni.
- dynamiczny efekt Casimira: emisja fotonów wskutek poruszania płytkami.
- termiczny efekt Casimira: oddz. indukowane fluktuacjami termicz.

# Kwantowanie metodą całek po trajektoriach

Przypomnienie:

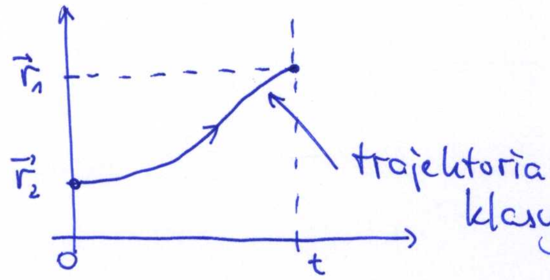
1° Dla pojedynczej cząstki o masie $m$ amplituda:

$$\langle \vec{r}_1 | e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t_1} | \vec{r}_2 \rangle = \int [D\vec{r}]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{t_1} L(\vec{r},\dot{\vec{r}})dt} = \mathcal{U}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$$

gdzie $L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$

oraz $$\int [D\vec{r}] = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ N\to\infty\\ N\tau = t}} \prod_{j=1}^{N-1} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{3/2} \int d^3 r_j \quad , \quad \vec{r}_j = \vec{r}(t_j)$$

$t_j = j\tau$ , $j = 1, 2, \ldots, N-1$




przy warunkach brzegowych:

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{r}(0) = \vec{r}_2 \\ \vec{r}_N = \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1 \end{cases}$$

trajektoria klasyczna: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$

2° Dla układu wielu ciał:

$$\langle \vec{r}_1' \ldots \vec{r}_M' | e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t_1} | \vec{r}_1 \ldots \vec{r}_M \rangle = \int [D\vec{r}]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{t_1} L(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_M,\dot{\vec{r}}_1,\ldots,\dot{\vec{r}}_M)dt}$$

gdzie $L(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_M,\dot{\vec{r}}_1,\ldots,\dot{\vec{r}}_M) = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_k^2 - V(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_M)$

oraz

$$\int [D\vec{r}] = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ N\to\infty\\ N\tau = t}} \prod_{j=1}^{N-1} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\frac{3M}{2}} \int d^3 r_1(t_j)\, d^3 r_2(t_j) \ldots d^3 r_M(t_j)$$

gdzie $t_j = j\tau$ , $j = 1, 2, \ldots, N-1$

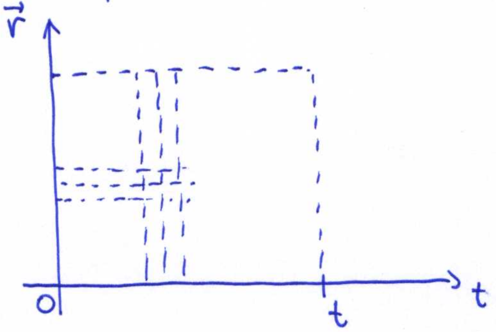
przy warunkach brzegowych:

$$\begin{cases} \vec{r}_k(0) = \vec{r}_k \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, M \\ \vec{r}_k(t_1) = \vec{r}_k' \end{cases}$$

Zatem

$$\int [D\vec{r}] = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ N\to\infty\\ N\tau = t}} \prod_{j=1}^{N-1} \prod_{k=1}^{M} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3 r_k(t_j)$$

3° Dla pól:




Rozważmy dyskretną czasoprzestrzeń: $t_j = j\tau$, $j = 0,1,\dots,N$
$\vec{r}_k$, $k = \dots -2,-1,0,\dots$

Jeżeli z każdym punktem czasoprzestrzeni zwiążemy wartość pola $\Phi$: $\Phi(\vec{r}_k, t_j)$
to analogiczne wyrażenie postaci:

$$\langle \Phi_1 | e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t_1} | \Phi_2 \rangle = \int [D\Phi]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{t_1} \int d^3r\, \mathcal{L}_h(\Phi, \partial_t\Phi, \vec{\nabla}\Phi)\, dt}$$

gdzie
$$\int [D\Phi] = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ N\to\infty\\ N\tau = t}} \prod_{j=1}^{N-1} \prod_{k=1}^{M} \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi(\vec{r}_k, t_j)$$

przy warunkach brzegowych
$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}, 0) = \Phi_1 \\ \Phi(\vec{r}, t_1) = \Phi_2 \end{cases}$$

W przypadku amplitudy przejścia próżnia - próżnia:
$\Phi_1 = \Phi_2 = 0$

Zatem
$$\langle 0 | e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t_1} | 0 \rangle = \int [D\Phi]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[\Phi]}$$

gdzie
$$S[\Phi] = \int_0^{t_1} dt \int d^3r \left( \frac{1}{2}\left[ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - c^2(\vec{\nabla}\Phi)^2 - \alpha^2\Phi^2 \right] + J\Phi \right)$$

Czyli

$$S[\Phi] = \int d^3r\, \frac{1}{2}\Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\Big|_0^{t_1} - c^2 \int_0^{t_1} dt\, \Phi \nabla^2 \Phi \Big|_{\partial V} +$$

$$+ \int_0^{t_1} dt \int d^3r \left( + \frac{1}{2}\left[ -\Phi \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + c^2 \Phi \nabla^2 \Phi - \alpha^2 \Phi^2 \right] + J\Phi \right) =$$

$$= \int_0^{t_1} dt \int d^3r \left( \frac{1}{2}\Phi \left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 - \alpha^2 \right]\Phi + J\Phi \right)$$

Czyli

$$\langle 0 | e^{\frac{1}{i\hbar} H(t_1 - t_0)} | 0 \rangle = \int [D\Phi]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3r \left[ \frac{1}{2}\Phi \hat{A} \Phi + J\Phi \right]}$$

gdzie $\hat{A} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 - \alpha^2$

Dyskretyzując czasoprzestrzeń mamy:

$$\int [D\Phi]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[\Phi]} = \prod_k \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_k\, e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{k,l}\left( \frac{1}{2}\Phi_k A_{kl} \Phi_l + J_k \Phi_k \delta_{kl} \right)}$$

gdzie przez $A_{kl}$ oznaczyliśmy zdyskretyzowany op. $\hat{A}$

---

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots dx_M\, e^{i\left( \sum_{k,l=1}^{M} x_k A_{kl} x_l + \sum_{k=1}^{M} J_k x_k \right)} =$$

$$= \frac{(2\pi i)^{\frac{M}{2}}}{\det A}\, e^{-\frac{i}{2}\sum_{k,l=1}^{M} J_k A^{-1}_{kl} J_l}$$

---

Zatem mamy:

$$\int [D\Phi]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[\Phi]} = \mathcal{M}\, e^{-\frac{i}{2\hbar}\sum_{k,l} J_k A^{-1}_{kl} J_l}$$

gdzie $\sum_k A_{lk} A^{-1}_{kl'} = \delta_{ll'}$

Czyli przechodząc z powrotem do ciągłej czasoprzestrzeni:

$$(*) \quad \left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 - \alpha^2 \right] D(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\,\delta(t - t')$$

Zauważmy ponadto, że $\mathcal{M}$ nie zależy od $J$.

Czyli oznaczając

$$Z(J) = \langle 0 | e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t_1 - t_0)} | 0 \rangle$$

mamy:

$$\boxed{Z(J) = Z(J=0)\, e^{-\frac{1}{2}\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3r \int_{t_0}^{t_1} dt' \int d^3r'\, J(\vec{r},t)\, D(\vec{r},\vec{r}',t,t')\, J(\vec{r}',t')}}$$

Zauważmy że

$$D(\vec{r},\vec{r}',t,t') = D(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \int \frac{d^3k\, d\omega}{(2\pi)^4} \frac{e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}') - \omega(t-t'))}}{\omega^2 - c^2k^2 - \alpha^2}$$

Podstawiając do r-nia (*) mamy:

$$\int \frac{d^3k\, d\omega}{(2\pi)^4} \frac{\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\nabla^2 - \alpha^2\right) e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}') - \omega(t-t'))}}{\omega^2 - c^2k^2 - \alpha^2} =$$

$$= \int \frac{d^3k\, d\omega}{(2\pi)^4} \frac{\left(\omega^2 - c^2k^2 - \alpha^2\right) e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}') - \omega(t-t'))}}{\omega^2 - c^2k^2 - \alpha^2} = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')$$

~~Rozważmy oddziaływanie pomiędzy dwoma punktowymi źródłami~~

# Oddziaływanie na odległość generowane przez pole

Rozważmy dwa punktowe źródła w odległości $d$.

$$J(\vec{r}, t) = J_1(\vec{r}) + J_2(\vec{r})$$

$$J_1(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$$

$$J_2(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{d})$$

Wyznaczmy zmianę energii próżni związaną z obecnością źródeł.

Czyli musimy obliczyć:

$$E_0(\vec{d}) = i\hbar \frac{d}{dt_1} \ln \left[ \langle 0 | e^{\frac{1}{i\hbar} \hat{H} (t_1 - t_0)(1 - i\varepsilon)} | 0 \rangle \right] \Big|_{\substack{t_1 \to +\infty \\ \varepsilon \to 0^+ \\ t_1 \varepsilon \to +\infty}}$$

Aby uniknąć efektu gwałtownego włączania źródeł należy położyć $t_0 \to -\infty$

Czyli

$$E_0(\vec{d}) = i\hbar \frac{d}{dt_1} \ln Z(J) \Big|_{\substack{t_1 \to +\infty \\ t_0 \to -\infty \\ \varepsilon \to 0+ \\ \varepsilon t_1 = +\infty}} =$$

$$= i\hbar \frac{d}{dt_1} \ln \left[ Z(0)\, e^{-\frac{1}{2}\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} dt\, dt' \int d^3r\, d^3r'\, J(\bar{r}, t)\, D(\bar{r} - \bar{r}', t - t')\, J(\bar{r}', t')} \right] =$$

$$= i\hbar \left( -\frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} \right) \frac{d}{dt_1} \int_{t_0}^{t_1} dt\, dt' \int d^3r\, d^3r'\, J(\bar{r}, t)\, D(\bar{r} - \bar{r}', t - t')\, J(\bar{r}', t') =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt' \int d^3r\, d^3r'\, J(\bar{r}, t_1)\, D(\bar{r} - \bar{r}', t_1 - t')\, J(\bar{r}', t') +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3r\, d^3r'\, J(\bar{r}, t)\, D(\bar{r} - \bar{r}', t - t_1)\, J(\bar{r}', t_1)$$

Ale $J(\vec{r},t) = J(\vec{r})$ zatem

$$E(\vec{d}) = \frac{1}{2}\int d^3r\, J(\vec{r}) \int d^3r'\, J(\vec{r}\,') \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(D(\vec{r}-\vec{r}\,', t_1-t) + D(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t_1)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}2\int d^3r\, d^3r'\, J(\vec{r})\, J(\vec{r}\,') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{-c^2k^2-\alpha^2} =$$

$$= -\int d^3r\, d^3r' \left(J_1(\vec{r})\, J_1(\vec{r}\,') + J_2(\vec{r}) J_2(\vec{r}\,') + J_1(\vec{r}) J_2(\vec{r}\,') + J_1(\vec{r}\,') J_2(\vec{r})\right) \times$$

$$\times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{c^2k^2+\alpha^2} =$$

$$= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{c^2k^2+\alpha^2} + \frac{1}{c^2k^2+\alpha^2} + \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{d}}}{c^2k^2+\alpha^2} + \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{d}}}{c^2k^2+\alpha^2}\right]$$

Pierwsze dwa człony nie zależą od $\vec{d}$ zatem dadzą jedynie stałe przesunięcie energii nowej próżni względem starej próżni.

Czyli

$$E(\vec{d}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \int_0^{\infty} k^2 dk\, \frac{e^{-ikd\cos\theta} + e^{ikd\cos\theta}}{c^2k^2+\alpha^2} + \text{const.} =$$

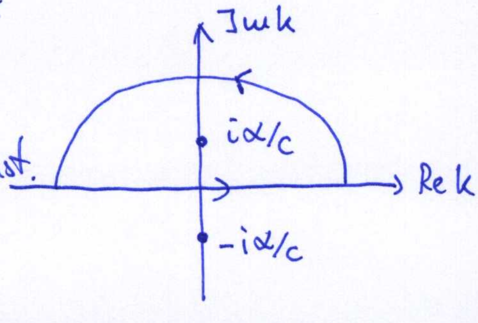
$$= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 dk\, \frac{e^{ikd\cos\theta}}{c^2k^2+\alpha^2} + \text{const.} =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 dk\, \frac{1}{ikd} \frac{e^{ikd} - e^{-ikd}}{c^2k^2+\alpha^2} + \text{const.} =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^2 id} \int_{-\infty}^{+\infty} k\, dk\, \frac{e^{ikd} - e^{-ikd}}{c^2k^2+\alpha^2} + \text{const.} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi^2 id} \int_{-\infty}^{+\infty} k\, dk\, \frac{e^{ikd}}{c^2k^2+\alpha^2} + \text{const.} =$$

$$= \frac{-1}{\pi d} \lim_{k\to i\frac{\alpha}{c}} \left(k - i\frac{\alpha}{c}\right) \frac{k\, e^{ikd}}{c^2\left(k-i\frac{\alpha}{c}\right)\left(k+i\frac{\alpha}{c}\right)} + \text{const.}$$



Czyli

$$E(\vec{d}) = -\frac{1}{\pi d} \frac{i\frac{\alpha}{c} e^{-\frac{\alpha}{c}d}}{2i\frac{\alpha}{c}} + \text{const.}$$

$$\boxed{E(\vec{d}) = -\frac{1}{2\pi d} e^{-\frac{\alpha}{c}d} + \text{const}}$$

Zatem pole $\Phi$ generuje oddziaływanie pomiędzy źródłami. Oddziaływanie jest przyciągające i posiada zasięg: $\frac{c}{\alpha}$

Jest to oddz. typu Yukawy.

W przypadku pola $\Phi$, dla którego $\alpha = 0$ oddziaływanie jest typu kulombowskiego.

## Oddziaływanie pomiędzy źródłami w ramach kwantowania kanonicznego

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + J(\vec{r})\,\hat{\Phi}(\vec{r},t)$$

$$\hat{H}_0 = \int d^3k\ \hbar\omega(\vec{k})\ a^{+}(\vec{k})\,a(\vec{k})$$

# Propagator

Wielkość $D(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t') = \int \frac{d^3k\, d\omega}{(2\pi)^4} \frac{e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')-\omega(t-t'))}}{\omega^2-c^2k^2-\alpha^2}$

nazywamy propagatorem.

Zauważmy bowiem, że wielkość:

$$\int d^3r'\,dt'\, D(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t')\, J(\vec{r}\,', t')$$

spełnia równanie:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 + \alpha^2\right)\int d^3r'\,dt'\, D(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t')\, J(\vec{r}\,', t') =$$

$$= -\int d^3r'\,dt'\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')\, J(\vec{r}\,', t') = -J(\vec{r}, t)$$

Czyli

$$\Phi(\vec{r}, t) = -\int d^3r'\,dt'\, D(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t')\, J(\vec{r}\,', t')$$

Zatem $D$ opisuje propagację pola wygenerowanego przez źródło w punkcie $\vec{r}\,'$ i w chwili $t'$ do punktu $\vec{r}$ w chwili $t$.

Zauważmy, że $D(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t') = D(\vec{r}\,'-\vec{r}, t'-t)$

Bo

$$\int \frac{d^3k\, d\omega}{(2\pi)^4} \frac{e^{i(-\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')+\omega(t-t'))}}{\omega^2-c^2k^2-\alpha^2} = \left| \begin{array}{l} \vec{k} \to -\vec{k} \\ \omega \to -\omega \\ d^3k\,d\omega \to d^3k\,d\omega \end{array} \right| = D(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t')$$

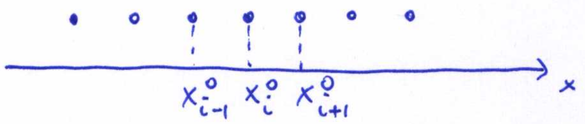
## Pole oddziałujące: rachunek zaburzeń
(wstęp do diagramologii)

Rozważmy gęstość funkcji Lagrange'a postaci:

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_t\Phi, \vec{\nabla}\Phi, J) = \mathcal{L}_n(\Phi, \partial_t\Phi, \vec{\nabla}\Phi, J) - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - c^2(\vec{\nabla}\Phi)^2 - \alpha^2\Phi^2\right] - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 + J\Phi$$

Człon proporcjonalny do $\Phi^4$ można otrzymać w naszym modelu mechanicznym:




biorąc pod uwagę człony anharmoniczne:

$$V(\vec{x}) = V(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\Big|_{\vec{x}_0}\delta x_i\,\delta x_j + \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}\frac{\partial^3 V}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\Big|_{\vec{x}_0}\delta x_i\,\delta x_j\,\delta x_k +$$

$$+ \frac{1}{4!}\sum_{i,j,k,l}\frac{\partial^4 V}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k\partial x_l}\Big|_{\vec{x}_0}\delta x_i\,\delta x_j\,\delta x_k\,\delta x_l + \dots$$

Jeżeli oddziaływanie sprzęga tylko najbliższych sąsiadów to trzeci człon wygeneruje człon: $\Phi^3$, a czwarty: $\Phi^4$. Mogą też pojawić się pochodne pól wyższych rzędów, które ~~[illegible]~~ tu zaniedbamy.

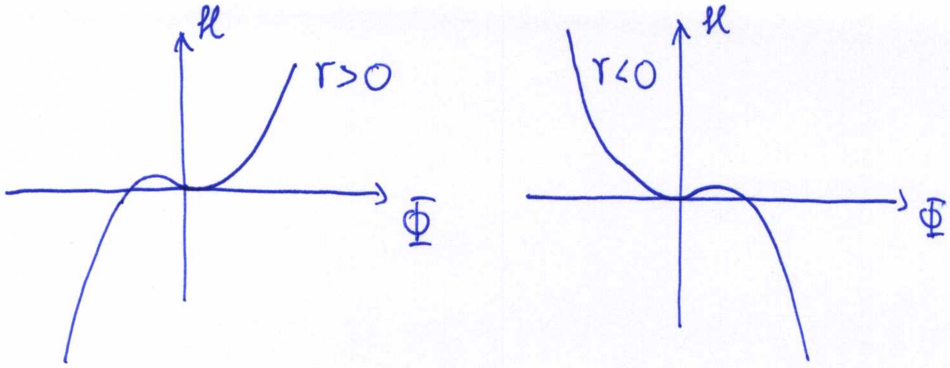
Jednakże człon proporcjonalny do $\Phi^3$ nie może występować ponieważ generowałby niestabilność stanu podstawowego (próżni) przy dowolnie małym zaburzeniu.

Mianowicie gęstość Hamiltonianu:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{\gamma}{3!}\Phi^3$$

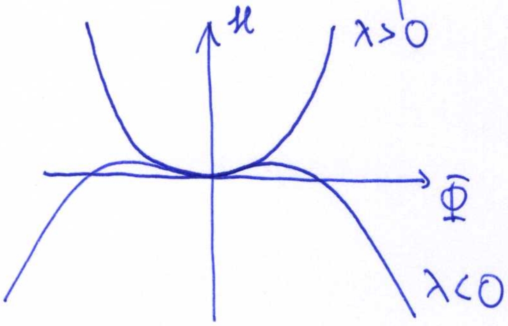
dla dowolnego $\gamma$ generuje nieskończone ujemne energie.

$\Phi = \text{const.}$




Zatem $r = 0$.

Ponadto z tego samego powodu $\lambda \geq 0$




Czyli

$$\mathcal{H}(J=0) = \frac{1}{2}\left[\pi^2 + c^2(\vec{\nabla}\Phi)^2 + \alpha^2\Phi^2\right] + \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 \quad , \ \lambda \geq 0.$$

Z r-ń Eulera-Lagrange'a dostajemy:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 + \alpha^2\right]\Phi + \frac{\lambda}{3!}\Phi^3 = J$$

Zatem aby policzyć

$$E_0 = i\hbar \frac{d}{dt} \ln\left[\langle 0| e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t-t_0)(1-i\varepsilon)}|0\rangle\right]\Bigg|_{\substack{t\to+\infty \\ \varepsilon\to 0^+ \\ \varepsilon t\to+\infty}}$$

musimy wyznaczyć

$$Z(J,\lambda) = \langle 0| e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t-t_0)(1-i\varepsilon)}|0\rangle =$$

$$= \int [D\Phi]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3r \left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - c^2(\vec{\nabla}\Phi)^2 - \alpha^2\Phi^2\right) - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 + J\Phi\right]} =$$

$$= \int [D\Phi]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3r \left[\frac{1}{2}\Phi\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\nabla^2 - \alpha^2\right)\Phi + J\Phi - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4\right]}$$

Rozważmy najpierw prostszy przypadek:

$$Z(J,\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi \; e^{+\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 + J\Phi\right]} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi \; e^{\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2 + J\Phi\right)} \left[1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\lambda}{4!}\Phi^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \Phi^8 + \dots\right]$$

Otrzymamy zatem człony typu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi \; e^{\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2 + J\Phi\right)} \Phi^{4n} = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{4n} \frac{d^{4n}}{dJ^{4n}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi \; e^{\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2 + J\Phi\right)}$$

gdzie $n = 0, 1, \dots$

Czyli

$$Z(J,\lambda) = \left[1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^4 \frac{d^4}{dJ^4} + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\lambda}{4!}\right)^2\left(\frac{\hbar}{i}\right)^8 \frac{d^8}{dJ^8} + \dots\right] \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi \; e^{\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2 + J\Phi\right)}$$

$$Z(J,\lambda) = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^4 \frac{d^4}{dJ^4}} \; Z(J,0)$$

ale

$$Z(J,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi \; e^{\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2 + J\Phi\right)} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\alpha^2 i}} \; e^{\frac{i}{\hbar}\frac{J^2}{2\alpha^2}}$$

czyli

$$Z(J,\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\alpha^2 i}} \; e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^4 \frac{d^4}{dJ^4}} \; e^{\frac{i}{\hbar}\frac{J^2}{2\alpha^2}}$$

$$\boxed{Z(J,\lambda) = Z(0,0) \; e^{-i\hbar^3 \frac{\lambda}{4!}\frac{d^4}{dJ^4}} \; e^{\frac{i}{\hbar}\frac{J^2}{2\alpha^2}}}$$

Inny sposób rozwinięcia:

$$Z(J,\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi \, e^{\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4\right)} \left[1 + \frac{i}{\hbar} J\Phi + \frac{1}{2!}\left(\frac{i}{\hbar}J\Phi\right)^2 + \dots\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^k \frac{1}{k!} J^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4\right]} \Phi^k \, d\Phi =$$

$$= Z(0,0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} J^k G^{(k)}$$

gdzie

$$G^{(k)} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^k \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4\right]} \Phi^k \, d\Phi}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi \, e^{\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha^2 i}{2\pi\hbar}} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2\right]} \Phi^k \left(1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\lambda}{4!}\Phi^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{i\lambda}{\hbar 4!}\right)^2 \Phi^8 + \dots\right] d\Phi$$

Zatem mamy:

$$\boxed{Z(J,\lambda) = Z(0,0)\, e^{-i\hbar^3 \frac{\lambda}{4!}\frac{d^4}{dJ^4}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{J^2}{2\alpha^2}} = Z(0,0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} J^k G^{(k)}}$$

Uogólnienie:

$$Z(J,\lambda) = \int [D\Phi] \, e^{\frac{i}{\hbar} S[\Phi]} = \left| \begin{array}{l} \text{dyskretyzujemy} \\ \text{czasoprzestrzeń} \end{array} \right| =$$

$$= \prod_k \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_k \, e^{\frac{i}{\hbar}\left[\sum_{k,l}\left(\frac{1}{2}\Phi_k A_{kl} \Phi_l\right) + \sum_k \left(-\frac{\lambda}{4!}\Phi_k^4 + J_k \Phi_k\right)\right]} =$$

$$= Z(0,0)\, e^{-i\hbar^3 \frac{\lambda}{4!} \sum_k \frac{d^4}{dJ_k^4}} \; e^{-\frac{i}{2\hbar}\sum_{k,l} J_k A^{-1}_{kl} J_l}$$

gdzie

$$Z(0,0) = \int [D\Phi] \, e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{k,l}\frac{1}{2}\Phi_k A_{kl}\Phi_l} =$$

$$= \prod_k \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_k \, e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{k,l}\frac{1}{2}\Phi_k A_{kl}\Phi_l}$$

Z drugiej strony:

$$Z(J,\lambda) = Z(0,0) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} J_{l_1} \dots J_{l_j} G^{(j)}_{l_1 \dots l_j}$$

gdzie

$$G^{(j)}_{l_1 \dots l_j} = \frac{\left(\frac{i}{\hbar}\right)^j}{Z(0,0)} \prod_k \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_k \, e^{\frac{i}{\hbar}\left[\sum_{m,n} \frac{1}{2} \Phi_m A_{mn} \Phi_n - \frac{\lambda}{4!} \sum_m \Phi_m^4\right]} \Phi_{l_1} \dots \Phi_{l_j}$$

Zauważmy że:

$$G^{(2)}_{l_1 l_2} = \frac{\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2}{Z(0,0)} \prod_k \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_k \, e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{m,n} \frac{1}{2} \Phi_m A_{mn} \Phi_n} \Phi_{l_1} \Phi_{l_2} \left[1 - \frac{i}{\hbar} \frac{\lambda}{4!} \sum_m \Phi_m^4 + \dots\right] =$$

$$= \frac{\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2}{Z(0,0)} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{d}{dJ_{l_1}} \frac{d}{dJ_{l_2}} \prod_k \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_k \, e^{\frac{i}{\hbar}\left(\sum_{m,n} \frac{1}{2} \Phi_m A_{mn} \Phi_n + \sum_m J_m \Phi_m\right)} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{i}{\hbar} \frac{\lambda}{4!} \sum_m \Phi_m^4 + \dots\right]\Bigg|_{\vec{J}=0} = \left| \begin{array}{l} \text{z dokładnością} \\ \text{do wyrazów } O(\lambda) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{Z(0,0)} \frac{d}{dJ_{l_1}} \frac{d}{dJ_{l_2}} Z(0,0) \, e^{-\frac{i}{2\hbar} \sum_{m,n} J_m A^{-1}_{mn} J_n}\Bigg|_{\vec{J}=0} =$$

$$= \left(-\frac{i}{2\hbar}\right) \frac{d}{dJ_{l_1}} \left[\sum_m \left(A^{-1}_{l_2 m} J_m + A^{-1}_{m l_2} J_m\right)\right] e^{-\frac{i}{2\hbar} \sum_{m,n} J_m A^{-1}_{mn} J_n}\Bigg|_{\vec{J}=0} =$$

$$= -\frac{i}{2\hbar}\left(A^{-1}_{l_1 l_2} + A^{-1}_{l_2 l_1}\right)$$

Przechodząc do ciągłej czasoprzestrzeni mamy:

$$G^{(2)}_{l_1 l_2} \to G^{(2)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = -\frac{i}{2\hbar}\left(D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t_1 - t_2) - D(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1)\right) + O(\lambda)$$

Czyli

$$G^{(2)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = -\frac{i}{\hbar} D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t_1 - t_2) + O(\lambda)$$

↑ dwupunktowa funkcja Greena.

# Podsumowując

Dla pola określonego gęstością funkcji Lagrange'a:

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_t\Phi, \vec{\nabla}\Phi) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\vec{\nabla}\Phi\right)^2 - \alpha^2\Phi^2\right] - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 + J\Phi$$

$$Z(J,\lambda) = \langle 0| e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t-t_0)(1-i\varepsilon)}|0\rangle =$$

$$= Z(0,0)\, e^{-i\hbar^3\frac{\lambda}{4!}\int dt' d^3r' \left(\frac{\delta}{\delta J(\vec{r}\,',t')}\right)^4} e^{-\frac{i}{2\hbar}\int dt_1 dt_2 d^3r_1 d^3r_2\, J(\vec{r}_1,t_1) D(\vec{r}_1-\vec{r}_2, t_1-t_2) J(\vec{r}_2,t_2)} =$$

$$= Z(0,0)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} J(\vec{r}_1,t_1)\ldots J(\vec{r}_j,t_j)\, G^{(j)}(\vec{r}_1,t_1;\ldots;\vec{r}_j,t_j)$$

gdzie

$$G^{(j)}(\vec{r}_1,t_1;\ldots;\vec{r}_j,t_j) = \frac{\left(\frac{i}{\hbar}\right)^j}{Z(0,0)}\int[D\Phi]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int dt\, d^3r\, \mathcal{L}(\Phi)|_{J=0}}\, \Phi(\vec{r}_1,t_1)\ldots\Phi(\vec{r}_j,t_j)$$

Obliczmy poprawki do $Z(J,\lambda)$ w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.

Wprowadzimy notację:
$$d^3r\,dt = d^4x$$
$$J(\bar{r},t) = J(x)$$
$$D(\bar{r}-\bar{r}', t-t') = D(x-x')$$

Zatem
$$Z(J,\lambda) = Z(0,0)\left[1 - i\hbar^3\frac{\lambda}{4!}\int d^4x' \frac{\partial^4}{\partial J(x')^4}\right] e^{-\frac{i}{2\hbar}\int d^4y_1 d^4y_2\, J(y_1)D(y_1-y_2)J(y_2)}$$
$$+ O(\lambda^2)$$

Rozważmy człon:
$$\int d^4x' \frac{\partial^4}{\partial J(x')^4}\; e^{-\frac{i}{2\hbar}\int d^4y_1 d^4y_2\, J(y_1)\, D(y_1-y_2)\, J(y_2)} =$$
$$= \int d^4x' \frac{\partial^3}{\partial J(x')^3}\left[-\frac{i}{2\hbar}\int d^4y_1\, J(y_1)\, D(y_1-x') - \frac{i}{2\hbar}\int d^4y_2\, D(x'-y_2)J(y_2)\right] e^{-\frac{i}{2\hbar}(\dots)} =$$
$$= \left| D(x-x') = D(x'-x)\right| = \int d^4x' \frac{\partial^3}{\partial J(x')^3}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int d^4y_1\, D(x'-y_1)J(y_1)\, e^{-\frac{i}{2\hbar}(\dots)} =$$
$$= \int d^4x' \frac{\partial^2}{\partial J(x')^2}\left[\left(-\frac{i}{\hbar}\right)D(x'-x') + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\left(\int d^4y_1\, D(x'-y_1)\, J(y_1)\right)^2\right] e^{-\frac{i}{2\hbar}(\dots)} =$$
$$= \int d^4x' \frac{\partial}{\partial J(x')}\Big[2\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int d^4y_1\, D(x'-y_1)J(y_1)\; D(x'-x') +$$
$$+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 D(x'-x')\int d^4y_1\, D(x'-y_1)\, J(y_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3\left(\int d^4y_1\, D(x'-y_1)J(y_1)\right)^3\Big] e^{-\frac{i}{2\hbar}(\dots)} =$$
$$= \int d^4x'\Big[3\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\left(D(x'-x')\right)^2 + 3\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 D(x'-x')\left(\int d^4y_1\, D(x'-y_1)J(y_1)\right)^2 +$$
$$+ 3\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 D(x'-x')\left(\int d^4y_1\, D(x'-y_1)J(y_1)\right)^2 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^4\left(\int d^4y_1\, D(x'-y_1)\,J(y_1)\right)^4\Big] e^{-\frac{i}{2\hbar}(\dots)} =$$
$$= e^{-\frac{i}{2\hbar}(\dots)}\int d^4x'\Big[\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 3\left(D(x'-x')\right)^2 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 6\, D(x'-x')\left(\int d^4y_1\, D(x'-y_1)\, J(y_1)\right)^2 +$$
$$+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^4\left(\int d^4y_1\, D(x'-y_1)\, J(y_1)\right)^4\Big]$$

Zatem

$$Z(J,\lambda) = Z(0,0)\, e^{-\frac{i}{2\hbar}\int d^4y_1\, d^4y_2\, J(y_1)\, D(y_1-y_2)\, J(y_2)} \times$$

$$\times\left[1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^4 \int d^4x' \left[\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 3\left(D(x'-x')\right)^2 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 6\, D(x'-x')\left(\int d^4y\, D(x'-y)\, J(y)\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^4\left(\int d^4y\, D(x'-y)\, J(y)\right)^4\right] + O(\lambda^2)\right] =$$

$$= Z(0,0)\, e^{-\frac{i}{2\hbar}\int d^4y_1\, d^4y_2\, J(y_1)\, D(y_1-y_2)\, J(y_2)} \times$$

$$\times\left[1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\lambda}{4!}\int d^4x' \left[3\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left(D(x'-x')\right)^2 - 6\left(\frac{\hbar}{i}\right) D(x'-x')\left(\int d^4y\, D(x'-y)\, J(y)\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\int d^4y\, D(x'-y)\, J(y)\right)^4\right] + O(\lambda^2)\right] =$$

$$= Z(0,0)\, e^{-\frac{i}{2\hbar}\int d^4y_1\, d^4y_2\, J(y_1)\, D(y_1-y_2)\, J(y_2)} \times$$

$$\times\left[1 + \lambda\int d^4x' \left[\frac{1}{8}\, i\hbar\left(D(x'-x')\right)^2 + \frac{1}{4} D(x'-x')\left(\int d^4y\, D(x'-y)\, J(y)\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\left(\int d^4y\, D(x'-y)\, J(y)\right)^4\right] + O(\lambda^2)\right]$$

Reprezentacja za pomocą diagramów w przestrzeni położeń:

$i\hbar\, D(x-y)$ =  propagator

$i\hbar\, D(x-x)$ =  pętla

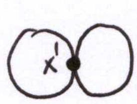
$\frac{i}{\hbar}\int d^4y\, J(y)$ = 

źródło

$-\frac{i}{\hbar}\int d^4x'$ = 

wierzchołek

Zatem

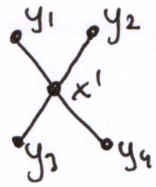



$$= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int d^4x' \left(i\hbar\, D(x'-x')\right)^2 = i\hbar\int d^4x' \left(D(x'-x')\right)^2$$


$$= \left(\frac{i}{\hbar}\right)\int d^4y_1\, J(y_1)\left(\frac{i}{\hbar}\right)\int d^4y_2\, J(y_2)\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int d^4x'\; i\hbar D(x'-x')\; i\hbar D(x'-y_1)\; i\hbar D(x'-y_2)$$

$$= -\frac{1}{\hbar^2}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\left(-i\hbar^3\right)\int d^4x'\, D(x'-x')\left(\int d^4y\, D(x'-y)\, J(y)\right)^2 =$$

$$= \int dx'\, D(x'-x')\left(\int d^4y\, D(x'-y)\, J(y)\right)^2$$



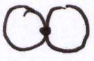

$$= \left(\frac{i}{\hbar}\right)^4 \int d^4y_1\, d^4y_2\, d^4y_3\, d^4y_4\, J(y_1) J(y_2) J(y_3) J(y_4) \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int d^4x'\, i\hbar D(x'-y_1) \times$$

$$i\hbar D(x'-y_2)\, i\hbar D(x'-y_3)\, i\hbar D(x'-y_4) =$$

$$= \frac{1}{\hbar^4}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\hbar^4 \left(\int d^4y\, D(x'-y) J(y)\right)^4 = -\frac{i}{\hbar}\int d^4x' \left(\int d^4y\, D(x'-y) J(y)\right)^4$$

Czyli

$$Z(J,\lambda) = Z(0,0)\, e^{-\frac{i}{2\hbar}\int d^4y_1\, d^4y_2\, J(y_1) D(y_1-y_2) J(y_2)} \times$$

$\times \Big[1 + \lambda\Big(\frac{1}{8}$  $+ \frac{1}{4}$  $+ \frac{1}{4!}$  $\Big)\Big]$

# Uwagi o zbieżności szeregu perturbacyjnego

Rozważmy prosty przypadek:

$$Z(0,\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi\, e^{\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4\right]} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2} \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{i\lambda}{\hbar 4!}\right)^k \frac{1}{k!}\Phi^{4k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\lambda}{4!}\right)^k \frac{1}{k!}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^{4k}\frac{d^{4k}}{dJ^{4k}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2 + J\Phi\right)}\Bigg|_{J=0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\lambda}{4!}\right)^k \frac{1}{k!}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^{4k}\frac{d^{4k}}{dJ^{4k}}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\alpha^2 i}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{J^2}{2\alpha^2}}\Bigg|_{J=0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\lambda}{4!}\right)^k \frac{1}{k!}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^{4k}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\alpha^2 i}}\,\frac{(4k-1)!!}{\hbar^{2k}\alpha^{4k}}\, i^{2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\alpha^2 i}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i\lambda\hbar}{4!}\right)^k \frac{1}{k!}\,\frac{(4k-1)!!}{\alpha^{4k}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\alpha^2 i}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i\lambda\hbar}{\alpha^4}\right)^k \frac{(4k-1)!!}{(4!)^k\, k!} = \left|\,(4k-1)!! = \frac{(4k)!}{4^k(2k)!}\,\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\alpha^2 i}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i\lambda\hbar}{\alpha^4}\right)^k \frac{(4k)!}{24^k\, 4^k\, k!\,(2k)!} \qquad (*)$$

ze wzoru Stirlinga: $k! \approx \sqrt{2\pi}\, k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k}$ mamy:

$$\frac{(4k)!}{96^k\, k!\,(2k)!} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\,(4k)^{4k} e^{-4k}}{96^k (2\pi)\, k^k (2k)^{2k} e^{-3k}} = \frac{(16^2\cdot k^4)^k e^{-k}}{\sqrt{2\pi}\,(96\, k\cdot 4k^2)^k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{8k}{12e}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2k}{3e}\right)^k$$

Zatem k-ty wyraz szeregu dla $k\to\infty$ dąży do:

$$\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\alpha^2 i\, 2\pi}}\left(\frac{2i\lambda\hbar k}{3\alpha^2 e}\right)^k \sim k!$$

Przyczyną tej rozbieżności jest nieanalityczność funkcji $Z(0,\lambda)$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$ wokół punktu $\lambda = 0$.

Rozważmy bowiem $\lambda = i\varepsilon$ ; $\varepsilon > 0$

wtedy

$$Z(0, i\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi \, e^{\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{1}{2}\alpha^2\Phi^2\right]} \, e^{\frac{\varepsilon}{4!}\Phi^4}$$

dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$ ta całka jest rozbieżna zatem promień zbieżności szeregu (*) jest równy zeru.

Nie oznacza to jednak, że szereg (*) jest bezużyteczny jeśli ograniczymy się jedynie do skończonej liczby wyrazów.

Można pokazać, że dopóki wielkość absolutna kolejnych wyrazów rozwinięcia maleje to błąd:

$$R_n = \left| Z(0,\lambda) - \sum_{k=0}^{n} \lambda^k Z_k \right|$$ również maleje

Ponieważ

$$|\lambda^n Z_n| = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\alpha^2}} \left(\frac{\lambda\hbar}{\alpha^4}\right)^n \frac{(4n)!}{96^n \, n! \, (2n)!} \overset{n\to\infty}{\approx} \sqrt{\frac{\hbar}{\alpha^2}} \left(\frac{2\lambda\hbar n}{3\alpha^2 e}\right)^n$$

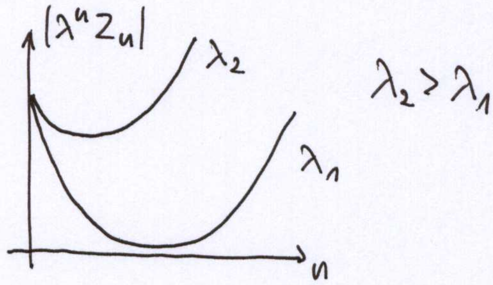
Więc minimum występuje dla:

$$\frac{d}{dn}|\lambda^n Z_n| = \sqrt{\frac{\hbar}{\alpha^2}} \left(\frac{2\lambda\hbar n}{3\alpha^2 e}\right)^n \left(\ln\left[\frac{2\lambda\hbar n}{3\alpha^2 e}\right] + 1\right) = 0$$

zatem

$$\frac{2\lambda\hbar n}{3\alpha^2 e} = \frac{1}{e}$$

$$\boxed{n = \frac{3\alpha^2}{2\hbar}\frac{1}{\lambda}}$$




Zatem im mniejsze $\lambda$ tym więcej wyrazów rozwinięcia (*) można wziąć pod uwagę, osiągając przy tym mniejszy błąd, który będzie rzędu $|\lambda^n Z_n| \sim e^{-\frac{3\alpha^2}{2\hbar}\frac{1}{\lambda}}$

# Symetrie teorii pola i zasady zachowania

**Przypomnienie:**

Rozważmy funkcję Lagrange'a dla układu cząstek:

$$L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

oraz infinitezymalną zmianę $\vec{q}(t)$, która nie zmienia działania $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})dt$

Tzn. jeśli $\vec{q}\,'(t) = \vec{q}(t) + \delta\vec{q}(t)$ to $S'[\vec{q}\,'] = S[\vec{q}] + \delta S$

Żądając aby $\delta S = 0$ mamy:

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \cdot \delta\vec{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot \delta\dot{\vec{q}} \right] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \cdot \delta q - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot \delta\vec{q} \right] + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot \delta\vec{q} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Zatem ponieważ r-nia Eulera-Lagrange'a są spełnione mamy

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot \delta\vec{q} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$ i stąd z uwagi na dowolność $t_1$ i $t_2$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot \delta\vec{q}$ jest zachowane w czasie ruchu (tw. Noether)

**W teorii pola:**

$$S = \int_\Omega d^4x\, \mathcal{L}[\vec{\Phi}] \quad , \quad \vec{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_M)$$

Mamy teraz dwie możliwości:

1) niezmienniczość $S$ ze względu na transformacje współrzędnych przestrzennych
2) niezmienniczość $S$ ze względu na transformacje pól.

Obie te symetrie można rozpatrywać jako jeden przypadek ogolnej transformacji współrzędnych, ale dla przejrzystości wyprowadzenia rozróżnimy oba przypadki.

W obu przypadkach niezmienniczość oznacza, że:

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_{\Omega} d^4x \, \mathcal{L}(x) = 0$$

gdzie $\mathcal{L}'$ oznacza przetransformowaną gęstość funkcji Lagrange'a
$\Omega'$ jest obszarem czasoprzestrzennym powstałym z $\Omega$ na skutek transformacji

1) Niezmienniczość ze względu na transformacje współrzędnych (translacje czasowo-przestrzenne)

Niech (*) $x^{\mu\prime} = x^\mu + \varepsilon^\mu \quad , \quad \mu = 0,1,2,3$

gdzie $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{r})$

W takim przypadku $d^4x = d^4x'$ i $\Omega = \Omega' + \delta\Omega$

Zmiana pól indukowana transformacją (*) (z dokładnością do członów pierwszego rzędu):

$$\delta\Phi_k(x) = -\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^\mu} \varepsilon^\mu \quad , \quad k = 1, \dots, M$$

Rozważmy gęstość funkcji Lagrange'a zależną od pól, ich pochodnych i współrzędnych $x$ (np. jeśli $\mathcal{L}$ zależy od źródeł $J(\vec{r}, t)$, to wtedy jest jawną funkcją współrzędnych czasoprzestrzennych):

$$\delta\mathcal{L}(x) = \sum_{k=1}^{M} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_k} \delta\Phi_k + \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \delta(\partial_\mu \Phi_k) \right) + \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \varepsilon^\mu$$

Zatem

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left[ \sum_{k=1}^{M} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_k} \delta\Phi_k + \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta\Phi_k \right) + \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \varepsilon^\mu \right] =$$

$$= \int_\Omega d^4x \left[ \sum_{k=1}^{M} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_k} \delta\Phi_k - \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \right) \delta\Phi_k \right) \right] +$$

$$+ \int_\Omega d^4x \left[ \sum_{k=1}^{M} \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \delta\Phi_k \right) + \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \varepsilon^\mu \right]$$

Ale r-nia $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_k} - \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)}\right) = 0$ są r-niami

Eulera-Lagrange'a dla pól $\Phi_1, \dots, \Phi_M$

Zatem niezmienniczość działania oznacza, że:

$$\int_\Omega d^4x \left[ -\sum_{k=1}^{M} \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^\nu} \varepsilon^\nu\right) + \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} \varepsilon^\nu \right] = 0$$

czyli

$$\int_\Omega d^4x \left[ \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left( -\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^\nu} \varepsilon^\nu + \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} \varepsilon^\nu \right)\right] = 0$$

Ponieważ $\varepsilon^\nu$ są dowolne zatem mamy:

$$(**) \quad \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \mu,\nu = 0,1,2,3$$

gdzie $T_{\mu\nu} = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^\nu} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}$

T nazywa się <u>tensorem energii pędu</u>.

R-nie (**) ma postać prawa zachowania.

Rozważmy bowiem wyrażenie:

$$\int_V d^3r \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{\mu\nu} = \int_V d^3r \left( \frac{\partial}{\partial t} T_{0\nu} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T}_\nu \right) = 0$$

gdzie $\vec{T}_\nu = (T_{1\nu}, T_{2\nu}, T_{3\nu})$

Czyli

$$(**') \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V d^3r \, T_{0\nu}\right) = -\int_{\partial V} \vec{T}_\nu \cdot d\vec{S}}$$

R-nie (**') wyraża prawo zachowania wielkości $\int d^3r \, T_{0\nu}$ (dokładnie jest to zbiór czterech wielkości odpowiadających $\nu = 0,1,2,3$)

Rozważmy gęstość funkcji Lagrange'a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - c^2(\vec{\nabla}\Phi)^2 - \alpha^2\Phi^2\right]$$

$$T_{00} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\Phi)}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \mathcal{L} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 + c^2(\vec{\nabla}\Phi)^2 + \alpha^2\Phi^2\right] = \mathcal{H}$$

Zatem $T_{00} = \mathcal{H}$ i określa gęstość energii pola.

Wielkość $\int_V d^3r\, T_{00}$ jest energią pola zawartą w obj. $V$.

$$T_{10} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\Phi)}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -c^2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,, \qquad T_{\nu 0} = -c^2\frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,,\ \nu=1,2,3$$

$$T_{01} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\Phi)}\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,, \qquad T_{0\nu} = \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}$$

Zatem

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V d^3r\,\mathcal{H} = +c^2\int_{\partial V}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\vec{\nabla}\Phi\cdot d\vec{S}$$

$$T_{11} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\Phi)}\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \mathcal{L} = -c^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - c^2(\vec{\nabla}\Phi)^2 - \alpha^2\Phi^2\right]$$

Wielkości $\int_V d^3r\, T_{0\nu}$, $\nu = 1,2,3$ utożsamiamy z pędem pola

$$(*)\quad \vec{P} = -\int_V d^3r\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}\vec{\nabla}\Phi$$

Zatem r-nia (**') wyrażają zasadę zachowania energii i pędu pola.

Skwantujmy kanoniczne teorię pola

$$\hat{\Phi}(x) = \int d^3k\,\frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k)}}\left[\hat{a}(k)e^{i(k\cdot r-\omega t)} + \hat{a}^+(k)e^{-i(k\cdot r-\omega t)}\right] =$$

$$= \int d^3k\left[\hat{a}(k)u_k(x) + \hat{a}^+(k)u_k^*(x)\right]$$

Wtedy $\vec{P} \to \hat{\vec{P}} = -\frac{1}{2}\int d^3r\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t}\vec{\nabla}\hat{\Phi} + \vec{\nabla}\hat{\Phi}\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t}\right)$ ← wtedy $\hat{\vec{P}}^+ = \hat{\vec{P}}$

$$\int d^3r\, \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} \vec{\nabla} \hat{\Phi} = \int d^3r \int d^3k\, d^3k' \left[(-i\omega) a(\vec{k}) u_{\vec{k}} + i\omega a^+(\vec{k}) u^*_{\vec{k}}\right] \times$$

$$\times \left[i\vec{k}' \hat{a}(\vec{k}') u_{\vec{k}'} - i\vec{k}' a^+(\vec{k}') u^*_{\vec{k}'}\right] =$$

$$= \int d^3k\, d^3k'\, d^3r \left[\omega \vec{k}' a(\vec{k}) a(\vec{k}') u_{\vec{k}} u_{\vec{k}} + \omega \vec{k}' a^+(\vec{k}) a^+(\vec{k}') u^*_{\vec{k}} u^*_{\vec{k}'} \right.$$

$$\left. - \omega \vec{k}' a(\vec{k}) a^+(\vec{k}') u_{\vec{k}} u^*_{\vec{k}'} - \omega \vec{k}' a^+(\vec{k}) a(\vec{k}') u^*_{\vec{k}} u_{\vec{k}'}\right] =$$

$$= \int d^3k \left[\omega(\vec{k})(-\vec{k}) a(\vec{k}) a(-\vec{k}) \frac{\hbar e^{-2i\omega t}}{2\omega(\vec{k})} + \omega(\vec{k})(-\vec{k}') a^+(\vec{k}) a^+(-\vec{k}) \frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})} e^{+2i\omega t} \right.$$

$$\left. - \omega(\vec{k}) \vec{k}\, a(\vec{k}) a^+(\vec{k}) \frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})} - \omega(\vec{k}) \vec{k}\, a^+(\vec{k}) a(\vec{k}) \frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})}\right]$$

Człony typu:

$$\int d^3k\ \vec{k}\, a(\vec{k}) a(-\vec{k})\, e^{-2i\omega(\vec{k})t} = 0$$

bo funkcja podcałkowa jest nieparzysta w $\vec{k}$.

Czyli

$$\hat{\vec{P}} = \frac{1}{2} \int d^3k\, \hbar \vec{k} \left[a(\vec{k}) a^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k}) a(\vec{k})\right] =$$

$$= \int d^3k\ \hbar \vec{k}\ a^+(\vec{k}) a(\vec{k}) + \underbrace{\text{stała}}_{=0}$$

bo całkujemy funkcję nieparzystą ze względu na $\vec{k}$.

Zauważmy, że $\quad [\hat{H}, \hat{\vec{P}}] = 0$

co jest konsekwencją zasady zachowania pędu.

2) Symetrie wewnętrzne pól

Rozważmy niezmienniczość działania ze względu na transformację pól:
$$\Phi'_k(x) = \Phi_k(x) + \varepsilon \sum_{l=1}^{M} \Theta_{kl} \Phi_l(x)$$

Wtedy
$$\delta \Phi_k(x) = \varepsilon \sum_{l=1}^{M} \Theta_{kl} \Phi_l(x)$$

i mamy:
$$\delta \mathcal{L} = \sum_{k=1}^{M} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_k} \delta \Phi_k + \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \delta(\partial_\mu \Phi_k) \right]$$

Zatem
$$\delta S = \int_\Omega d^4x \sum_{k=1}^{M} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_k} \delta \Phi_k - \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \right) \delta \Phi_k \right) +$$
$$+ \int_\Omega d^4x \sum_{k=1}^{M} \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \delta \Phi_k \right) = 0$$

Ponieważ r-nia Eulera - Lagrange'a są spełnione zatem mamy:
$$\delta S = \int_\Omega d^4x \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sum_{k,l=1}^{M} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \Theta_{kl} \Phi_l \right) \varepsilon = 0$$

Z uwagi na dowolność $\varepsilon$ zachodzi:
$$\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} j_\mu = 0$$
gdzie
$$j_\mu = \sum_{k,l=1}^{M} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \Theta_{kl} \Phi_l$$

Analogicznie oznacza to, że istnieje pełna wielkość zachowana:
$$Q = \int d^3r\, j_0 = \int d^3r \sum_{k,l=1}^{M} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Phi_k)} \Theta_{kl} \Phi_l$$

czyli
$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\int_V d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad , \vec{j} = (j_1, j_2, j_3)$$

Przykład

Rozważmy pole zespolone $\Phi(x) \in \mathbb{C}$, dla którego:

$$(**)\quad \mathcal{L} = \text{[redacted]} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - c^2 \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Phi^* - \alpha^2 |\Phi|^2 \right]$$

Transformacja

$$(*)\begin{cases} \Phi'(x) = e^{i\varepsilon}\, \Phi(x) \\ \Phi'^*(x) = e^{-i\varepsilon}\, \Phi^*(x) \end{cases}$$

nie zmienia $\mathcal{L}$. Zatem działanie $S$ jest również niezmiennicze ze względu na transformację (*).

Czyli

$$\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} j_\mu = 0$$

gdzie

$$j_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Phi)}\, i\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Phi^*)} (-i)\Phi^* =$$

$$= \text{[redacted]} \left( i \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \Phi - i \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Phi^* \right)$$

oraz

$$\vec{j} = \text{[redacted]} \left( -c^2 i\, \vec{\nabla}\Phi^* \Phi + c^2 i\, \vec{\nabla}\Phi\, \Phi^* \right) =$$

$$= \text{[redacted]}\, c^2 i \left[ -\Phi \vec{\nabla}\Phi^* + \Phi^* \vec{\nabla}\Phi \right]$$

Zatem wielkość

$$Q = \int d^3r\, j_0 = \text{[redacted]}\, i \int d^3r \left[ \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]$$

jest zachowana

Skwantujmy kanonicznie teorię pola daną funkcją Lagrange'a (**).

$$\Phi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k\,\sqrt{\hbar}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega(\vec{k})}} \left[ a(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + b^*(\vec{k})\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right]$$

ponieważ $\Phi$ jest zespolone zatem $a(\vec{k}) \neq b(\vec{k})$

Definiujęc pędy:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Phi)} = [redacted]\, \frac{\partial \Phi^*}{\partial t}$$ – pęd sprzężony kanonicznie do $\Phi$

$$\tilde{\pi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Phi^*)} = [redacted]\, \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \pi^*(x)$$ – pęd sprzężony kanonicznie do $\Phi^*$

otrzymujemy gęstość funkcji Hamiltona:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}\pi + \frac{\partial \Phi^*}{\partial t}\pi^* - \mathcal{L} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + c^2(\vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Phi^*) + \alpha^2 |\Phi|^2 =$$

$$= |\pi|^2 + c^2\, \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Phi^* + \alpha^2 |\Phi|^2$$

~~Narzucając warunki:~~

$$\cancel{[\hat{\Phi}(x), \hat{\pi}(x')] = [\hat{\Phi}^+(x), \hat{\pi}^+(x')] = i\hbar}$$

Narzucając warunki:

$$[\hat{\Phi}(\vec{r},t), \hat{\pi}(\vec{r}',t)] = [\hat{\Phi}^+(\vec{r},t), \hat{\pi}^+(\vec{r}',t)] = i\hbar\, \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

otrzymujemy:

$$a(\vec{k}) \to \hat{a}(\vec{k})$$
$$b^*(\vec{k}) \to \hat{b}^+(\vec{k})$$

gdzie $[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^+(\vec{k}')] = [\hat{b}(\vec{k}), \hat{b}^+(\vec{k}')] = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$

oraz komutatory pomiędzy operatorami $\hat{a}(\vec{k})$ i $\hat{b}(\vec{k})$ znikają.

Wyrażając Hamiltonian $\hat{H} = \int d^3r\, \mathcal{H}$ przez operatory $\hat{a}$ i $\hat{b}$ otrzymamy:

$$\hat{H} = [redacted]\int d^3k\, \hbar\omega(\vec{k}) \left[ \hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + \hat{b}^+(\vec{k})\hat{b}(\vec{k}) \right] +$$

+ energia drgań zerowych próżni.

Zatem teoria pola (**) przewiduje występowanie dwóch rodzajów wzbudzeń pola (cząstek):

$$\hat{a}(\vec{k})|0\rangle \quad i \quad \hat{b}(\vec{k})|0\rangle$$

W teorii (**) te wzbudzenia ze sobą nie oddziałują.
Po skwantowaniu wielkość $Q$ staje się operatorem:

$$\hat{Q} = i\int d^3r \left[\hat{\Phi}\frac{\partial\hat{\Phi}^*}{\partial t} - \hat{\Phi}^*\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t}\right]$$

gdzie

$$\hat{\Phi}(x) = \int d^3k \left(\hat{a}(\vec{k})\, u_{\vec{k}}(x) + \hat{b}^+(\vec{k})\, u^*_{\vec{k}}(x)\right)$$

$$u_{\vec{k}}(x) = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})}}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t} = \int d^3k \left(-i\omega\, \hat{a}(\vec{k})\, u_{\vec{k}}(x) + i\omega\, \hat{b}^+(\vec{k})\, u^*_{\vec{k}}(x)\right)$$

Rozważmy zatem

$$i\int d^3r\, \hat{\Phi}\frac{\partial\hat{\Phi}^*}{\partial t} = \int d^3r \int d^3k\, d^3k' \left[a(\vec{k})u_{\vec{k}} + b^+(\vec{k})u^*_{\vec{k}}\right]\left[-\omega a^+(\vec{k}')u^*_{\vec{k}'} + \omega\, b(\vec{k}')u_{\vec{k}'}\right] =$$

$$= \int d^3k\, d^3k' \int d^3r \Big[a(\vec{k})a^+(\vec{k}')(-\omega)\, u_{\vec{k}}u^*_{\vec{k}'} + \omega\, u^*_{\vec{k}}u_{\vec{k}'}\, b^+(\vec{k})\, b(\vec{k}')$$
$$- \omega\, b^+(\vec{k})\, a^+(\vec{k}')\, u^*_{\vec{k}}u^*_{\vec{k}'} + \omega\, a(\vec{k})\, b(\vec{k}')\, u_{\vec{k}}u_{\vec{k}'}\Big]$$

ale

$$\int d^3r\, u_{\vec{k}}u^*_{\vec{k}'} = \frac{\hbar}{2(2\pi)^3\sqrt{\omega(\vec{k})\omega(\vec{k}')}}\int d^3r\, e^{i[(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r} - (\omega-\omega')t]} = \Big|\ \omega = \sqrt{c^2k^2+\alpha^2}$$

$$= \frac{\hbar\,(2\pi)^3}{2(2\pi)^3\,\omega(\vec{k})}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\int d^3r\, u_{\vec{k}}u_{\vec{k}'} = \frac{\hbar}{2(2\pi)^3\sqrt{\omega(\vec{k})\omega(\vec{k}')}}\int d^3r\, e^{i[(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r} - (\omega+\omega')t]} =$$

$$= \frac{\hbar(2\pi)^3}{2(2\pi)^3\omega(\vec{k})}\, e^{-2i\omega t}\,\delta(\vec{k}+\vec{k}')$$ ~~ten człon znika po wycałkowaniu względem $\vec{k}$~~

Analogicznie

$$-i\int d^3r\,\hat{\Phi}^*\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t} = \int d^3r\int d^3k\,d^3k'\left[\hat{a}^+(\vec{k})u^*_{\vec{k}} + b(\vec{k})u_{\vec{k}}\right]\left[-\omega a(\vec{k}')u_{\vec{k}'} + \omega b^+(\vec{k}')u^*_{\vec{k}'}\right] =$$

$$= \int d^3k\,d^3k'\int d^3r\left[-\omega a^+(\vec{k})a(\vec{k}')u^*_{\vec{k}}u_{\vec{k}'} + \omega b(\vec{k})b^+(\vec{k}')u_{\vec{k}}u^*_{\vec{k}'} + \right.$$
$$\left. + \omega a^+(\vec{k})b^+(\vec{k}')u^*_{\vec{k}}u^*_{\vec{k}'} - \omega b(\vec{k})a(\vec{k}')u_{\vec{k}}u_{\vec{k}'}\right]$$

Czyli

$$\hat{Q} = \int d^3k\left[-\omega(\vec{k})a(\vec{k})a^+(\vec{k})\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})} - \omega(\vec{k})a^+(\vec{k})a(\vec{k})\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})}\right.$$
$$+\omega(\vec{k})b^+(\vec{k})b(\vec{k})\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})} + \omega(\vec{k})b(\vec{k})b^+(\vec{k})\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})} +$$
$$\left(-\omega(\vec{k})b^+(\vec{k})a^+(-\vec{k}) + \omega(\vec{k})a^+(-\vec{k})b^+(\vec{k})\right)\frac{\hbar e^{-2i\omega t}}{2\omega(\vec{k})} +$$
$$\left. + \left(\omega(\vec{k})a(\vec{k})b(-\vec{k}) - \omega(\vec{k})b(-\vec{k})a(\vec{k})\right)\frac{\hbar e^{+2i\omega t}}{2\omega(\vec{k})}\right] =$$

$$= \int d^3k\,\hbar\left[b^+(\vec{k})b(\vec{k}) - a^+(\vec{k})a(\vec{k})\right] + \text{stała.}$$

Podobnie jak w przypadku Hamiltonianu możemy ustalić, że $\hat{Q}|0\rangle = 0$ i odrzucić stałą.

~~[illegible]~~

Stała $\hbar$ występująca w powyższym r-niu nie ma znaczenia. bo $\hat{Q}$ można przemnożyć przez dowolną liczbę.

Zauważmy, że

$$[\hat{Q},\hat{H}] = 0$$

~~czyli wartości własne $\hat{H}$ są jednocześnie wartościami własnymi operatora $\hat{Q}$~~

czyli stany własne $\hat{H}$ są jednocześnie stanami własnymi $\hat{Q}$

Ponieważ $\hat{Q} = \hat{Q}^+$ więc $\hat{Q}$ ma rzeczywiste wart. własne.

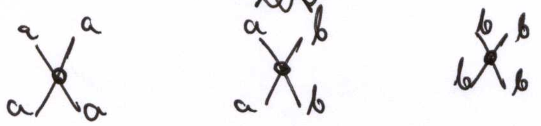
Wartości własne $\hat{Q}$ mierzą różnicę pomiędzy ilością cząstek typu "b" a ilością cząstek typu "a".

Z relacji komutacyjnej $[\hat{Q}, \hat{H}] = 0$ wynika, że ta różnica jest stałą ruchu, tzn. nie zmienia się w czasie.

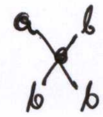
Akurat w tym przypadku jest to oczywiste ponieważ cząstki nie oddz. ze sobą. Jeśli jednak uwzględnimy teorię:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*}{\partial t} - c^2\,\bar{\nabla}\Phi\cdot\bar{\nabla}\Phi^* - \alpha^4|\Phi|^2 - \frac{\lambda}{4!}|\Phi|^4,$$

która również dopuszcza zachowanie wielkości $Q$, to w takim przypadku w pierwszym rzędzie rach. zaburzeń będziemy mieli tylko procesy:




Natomiast nie może zachodzić proces:




Teoria (**) jest naturalnym kandydatem do opisu cząstek bezspinowych, naładowanych.

Wtedy

$$\hat{Q} = e\int d^3k\,\left[b^+(\bar{k})\,b(\bar{k}) - a^+(\bar{k})\,a(\bar{k})\right]$$

mierzyłby ładunek elektryczny.

# Kwantowanie pola Schrödingera

Rozważmy klasyczną teorię pola, dla której równaniem Eulera-Lagrange'a jest równaniem Schrödingera:

$$(*)\quad \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\psi(\bar{r},t)=0$$

Powyższe r-nie można otrzymać z żądania stacjonarności działania:

$$S=\int dt\int d^3r\left(i\hbar\,\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\hbar^2}{2m}(\bar{\nabla}\psi)\cdot(\bar{\nabla}\psi^*)\right)$$

gdzie gęstość f. Lagrange'a:

$$\mathcal{L}=i\hbar\,\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\hbar^2}{2m}(\bar{\nabla}\psi)\cdot(\bar{\nabla}\psi^*)$$

Warunek $\delta S=0$ daje 2 r-nia:

$$\begin{cases}(a)\quad \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_t\psi)}+\sum_i\partial_i\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_i\psi)}-\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi}=0\\[2ex](b)\quad \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_t\psi^*)}+\sum_i\partial_i\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_i\psi^*)}-\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^*}=0\end{cases}$$

R-nia (a) daje:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*=0$$

a r-nie (b):

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi=0$$

Zatem otrzymujemy r-nie (*) i r-nie sprzężone do (*), które nie daje żadnej nowej informacji.

Pęd kanonicznie sprzężony do pola $\psi$ wynosi:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} = i\hbar\psi^*$$

podczas gdy pęd kanonicznie sprzężony do pola $\psi^*$:

$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi^*)} = 0$$

---

Dygresja:

W mechanice klasycznej jeśli w funkcji Lagrange'a nie występuje pochodna czasowa współrzędnej, tzn:

$$L = L(q_1, \dots, q_i, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \underset{\uparrow}{\ }, \dots, \dot{q}_N)$$

brak $\dot{q}_i$

wtedy $\qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$

a r-nie E-L dla $q_i$ : $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ jest po prostu r-niem więzów:

$$f(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) = 0$$

Zatem należy albo wybrać (jeśli to możliwe) nowe współrzędne zgodne z więzami, albo włączyć r-nie więzów do opisu układu.

---

W naszym przypadku więz jest związany z faktem, że r-nie Schrödingera sprzęga ze sobą $\mathrm{Re}\,\psi$ oraz $\mathrm{Im}\,\psi$, które w związku z tym nie są niezależne. Stąd $\psi$ i $\psi^*$ również nie są niezależnymi zmiennymi (polami).

Zgodnie z przepisem kwantowania kanonicznego żądamy:

$$[\hat{\psi}(\bar{r},t), \hat{\pi}(\bar{r}',t)] = i\hbar\,\delta(\bar{r}-\bar{r}')$$

zatem

$$(*)\quad [\hat{\psi}(\bar{r},t), \hat{\psi}^{+}(\bar{r}',t)] = \delta(\bar{r}-\bar{r}')$$

Rozwiązaniem r-nia $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\psi(\bar{r},t) = 0$ jest

$$(**)\quad \psi(\bar{r},t) = \int\frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}}\, a(\bar{k})\, e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)}$$

gdzie $\hbar\omega(\bar{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ - r-nie dyspersyjne

---

<u>Uwaga</u>:

Zauważmy, że w przeciwieństwie do r-nia K-G i pola $\Phi$ wyrażenie (**) <u>nie zawiera</u> członu: $\sim e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)}$

Ta funkcja <u>nie jest</u> rozwiązaniem r-nia Schrödingera:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)} = \left(-\hbar\omega - \frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)} \neq 0$$

bo $\hbar\omega = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$

Obecność tylko członu $\sim e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)}$ jest spowodowana tym, że ~~dla danej~~ krzywa dyspersyjna ma tylko jedną gałąź: $\hbar\omega(\bar{k}) = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$

a nie dwie, jak w przypadku r-nia K-G:

$$\omega(\bar{k}) = \pm\sqrt{c^2k^2+\alpha^2}$$

Zatem:

$$\psi(\bar{r},t) \to \hat{\psi}(\bar{r},t)$$
$$a(\bar{k}) \to \hat{a}(\bar{k})$$

i relacja (*) implikuje:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, d^3k'\, e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)}\, e^{-i(\bar{k}'\cdot\bar{r}'-\omega' t)}\left[\hat{a}(\bar{k}),\hat{a}^+(\bar{k}')\right] = \delta(\bar{r}-\bar{r}')$$

Jeśli zażądamy aby $\left[\hat{a}(\bar{k}),\hat{a}^+(\bar{k}')\right] = \delta(\bar{k}'-\bar{k})$

to

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\bar{k}\cdot(\bar{r}-\bar{r}')} = \delta(\bar{r}-\bar{r}')$$

i relacja (*) będzie spełniona

$\boxed{\text{Zatem w przypadku pola Schrödingera operator pola zależy \underline{tylko} od operatorów anihilacji (jak } \hat{\psi}\text{) albo \underline{tylko} od operatorów kreacji (jak } \hat{\psi}^+\text{).}}$

Ta różnica ma istotne konsekwencje. Jedną z nich jest brak antycząstek w teorii oraz brak procesów polegających na kreacji par: cząstka - antycząstka

Gęstość funkcji Hamiltona:

$$\mathcal{H} = \pi \partial_t \psi - \mathcal{L} = i\hbar \psi^* \partial_t \psi - i\hbar \psi^+ \partial_t \psi + \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\psi|^2$$

Zatem

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\psi|^2$$

Zatem Hamiltonian:

$$\hat{H} = \int d^3r \, \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla}\hat{\psi}^+) \cdot (\vec{\nabla}\hat{\psi}) =$$

$$= \int d^3r \, \frac{\hbar^2}{2m} \int \frac{d^3k \, d^3k'}{(2\pi)^3} \, a^+(\vec{k})(-i\vec{k}) \cdot a(\vec{k}')(i\vec{k}') \times$$

$$\times e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega t)} =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \int \frac{d^3k \, d^3k'}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \, k^2 \, a^+(\vec{k}) \, a(\vec{k}) =$$

$$= \int d^3k \, \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \, a^+(\vec{k}) \, a(\vec{k})$$

Nie otrzymałem w tym przypadku nieskończonego wkładu do energii drgań zerowych, ale mógłbym go otrzymać gdybym wybrał inne uporządkowanie op. pola w $\hat{H}$ ($\vec{\nabla}\hat{\psi} \cdot \vec{\nabla}\hat{\psi}^+$ zamiast $\vec{\nabla}\hat{\psi}^+ \vec{\nabla}\hat{\psi}$).

Równanie ruchu dla pola $\hat{\psi}$:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi} = [\hat{\psi}, \hat{H}]}$$

zatem

$$\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}}\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a(\bar{k}) e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)} = \int d^3k \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} [a(\bar{k}), a^\dagger(\bar{k}')a(\bar{k}')] \times e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)}$$

$$\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hbar\omega\, a(\bar{k}) e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)} = \int d^3k \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} a(\bar{k}')\delta(\bar{k}-\bar{k}') e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)}$$

czyli

$$\hat{\psi}(\bar{r},t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}} a(\bar{k}) e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)}$$

spełnia r-nie ruchu.

Skorzystaliśmy przy tym z faktu:

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{B}]\hat{C}$$

Zauważmy jednak, że mamy również inną możliwość:

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \\
&= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} = \\
&= (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})\hat{C} - \hat{B}(\hat{C}\hat{A} + \hat{A}\hat{C}) = \\
&= \{\hat{A},\hat{B}\}\hat{C} - \hat{B}\{\hat{A},\hat{C}\}
\end{aligned}$$

gdzie $\{\cdot,\cdot\}$ oznacza antykomutator, tzn.

$$\boxed{\{\hat{A},\hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}}$$

Ponieważ $\hat{H}$ jest biliniowy ze względu na operatory pola $\hat{\psi}$ zatem r-nia ruchu:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\bar{r},t) = \left[\hat{\psi}(\bar{r},t), \hat{H}\right]$$

nie zmienią się jeśli zamiast warunku komutacji narzucimy warunek antykomutacji:

$$\boxed{\left\{\hat{\psi}(\bar{r},t), \hat{\psi}^{+}(\bar{r}',t)\right\} = \delta(\bar{r}-\bar{r}')}$$

Stąd ponieważ

$$\hat{\psi}(\bar{r},t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}}\, \hat{a}(\bar{k})\, e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)}$$

zatem
$$\boxed{\left\{\hat{a}(\bar{k}), \hat{a}^{+}(\bar{k}')\right\} = \delta(\bar{k}-\bar{k}')}$$

oraz

$$\hat{H} = \int d^3k \frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}\hat{\psi}^{+})\cdot(\vec{\nabla}\hat{\psi}) = \int d^3k \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\hat{a}^{+}(\bar{k})\hat{a}(\bar{k})$$

Narzucenie relacji antykomutacyjnych zamiast komutacyjnych determinuje antysymetrię funkcji falowych.
Rozważmy funkcję falową dwóch cząstek:

$$\psi_{\bar{k}_1\bar{k}_2}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \langle \vec{r}_1\, \vec{r}_2 | a^{+}(\bar{k}_1)\, a^{+}(\bar{k}_2)|0\rangle =$$

$$= \langle 0| a(\bar{r}_1)\, a(\bar{r}_2)\, a^{+}(\bar{k}_1)\, a^{+}(\bar{k}_2)|0\rangle =$$

$$= \int \frac{d^3k_1'}{\sqrt{(2\pi)^3}}\frac{d^3k_2'}{\sqrt{(2\pi)^3}}\, e^{i(\bar{k}_1'\cdot\bar{r}_1+\bar{k}_2'\cdot\bar{r}_2)}\langle 0| a(\bar{k}_1')\, a(\bar{k}_2')\, a^{+}(\bar{k}_1)\, a^{+}(\bar{k}_2)|0\rangle$$

ale

$$\langle 0|a(\bar{k}_1')a(\bar{k}_2')a^+(\bar{k}_1)a^+(\bar{k}_2)|0\rangle = \langle 0|a(\bar{k}_1')\left(\delta(\bar{k}_1-\bar{k}_2') - a^+(\bar{k}_1)a(\bar{k}_2')\right)a^+(\bar{k}_2)|0\rangle =$$

$$= \delta(\bar{k}_1-\bar{k}_2')\delta(\bar{k}_1'-\bar{k}_2) - \langle 0|a(\bar{k}_1')a^+(\bar{k}_1)a(\bar{k}_2')a^+(\bar{k}_2)|0\rangle =$$

$$= \delta(\bar{k}_1-\bar{k}_2')\delta(\bar{k}_1'-\bar{k}_2) - \langle 0|\left(\delta(\bar{k}_1-\bar{k}_1') - a^+(\bar{k}_1)a(\bar{k}_1')\right)\left(\delta(\bar{k}_2-\bar{k}_2') - a^+(\bar{k}_2)a(\bar{k}_2')\right)|0\rangle =$$

$$= \delta(\bar{k}_1-\bar{k}_2')\delta(\bar{k}_1'-\bar{k}_2) - \delta(\bar{k}_1-\bar{k}_1')\delta(\bar{k}_2-\bar{k}_2')$$

Czyli

$$\varphi_{\bar{k}_1\bar{k}_2}(\bar{r}_1,\bar{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3}\left[e^{i(\bar{k}_2\cdot\bar{r}_1+\bar{k}_1\cdot\bar{r}_2)} - e^{i(\bar{k}_1\cdot\bar{r}_1+\bar{k}_2\cdot\bar{r}_2)}\right]$$

zatem $\varphi_{\bar{k}_1\bar{k}_2}(\bar{r}_1,\bar{r}_2) = -\varphi_{\bar{k}_1\bar{k}_2}(\bar{r}_2,\bar{r}_1)$

co w szczególności oznacza, że $\varphi_{\bar{k}_1\bar{k}_2}(\bar{r},\bar{r}) = \varphi_{\bar{k}\bar{k}}(\bar{r}_1,\bar{r}_2) = 0$

Zatem w ogólności dla dowolnego stanu N cząstek:

$$|\psi\rangle = \sum_{\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_N} c(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_N)\, a^+(\bar{k}_1)\dots a^+(\bar{k}_N)|0\rangle$$

suma lub całka: $\frac{1}{(2\pi)^{3N/2}}\int d^3k_1\dots d^3k_N$

związana z tym stanem funkcja falowa jest antysymetryczna:

$$\psi(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_i,\dots,\vec{r}_j,\dots\vec{r}_N) = -\psi(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_j,\dots,\vec{r}_i,\dots,\vec{r}_N)$$

czyli $\psi(\vec{r}_1,\dots,\vec{r},\dots,\vec{r},\dots,\vec{r}_N) = 0$

Zatem prawdopodobieństwo znalezienia 2 cząstek w tym samym punkcie (lub ogólniej: w tym samym stanie) jest równa zero

Zasada Pauliego

Narzucenie reguł antykomutacyjnych na operatory pola zapewnia spełnienie zasady Pauliego.

Przestrzeń Focka dla bozonów i fermionów:

$$F = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \ldots$$

$|0\rangle \in \mathcal{H}_0$

$a^+_{\mu_1}|0\rangle$ - tworzą bazę w przestrzeni $\mathcal{H}_1$ (przestrzeń stanów 1 cząstki)
$\mathcal{H}_1$ jest taka sama dla fermionów i bozonów

$a^+_{\mu_1} a^+_{\mu_2}|0\rangle$ - tworzą bazę w przestrzeni $\mathcal{H}_2$ (przestrzeń stanów 2 cząstek)
$\mathcal{H}_2$ są <u>różne</u> dla fermionów i bozonów, bo: np.

$$a^+_\mu a^+_\mu |0\rangle = -a^+_\mu a^+_\mu |0\rangle = 0 \quad \text{dla fermionów}$$
$$a^+_\mu a^+_\mu |0\rangle = |2_\mu\rangle \quad \text{dla bozonów}$$

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$$

antysym. ↙ ↘ sym.

$\mathcal{H}_2$ (dla fermionów) $\mathcal{H}_2$ (dla bozonów)

[Ogólnie przestrzeń Hilberta N cząstek $\mathcal{H}_N$ jest zbudowana z tylko z symetrycznych (antysymetrycznych) kombinacji stanów jednocząstkowych dla bozonów (fermionów)]

$$\begin{cases} \mathcal{H}_N^F = A(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_1) & \text{- fermiony} \\ \mathcal{H}_N^B = S(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_1) & \text{- bozony} \end{cases}$$

## Przykład

1) Słabo oddziałujący gaz bozonów (w temperaturze $T=0$)

Hamiltonian:

$$\hat{H} = \int d^3r \left[ \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla}\hat{\psi}^+)\cdot(\vec{\nabla}\hat{\psi}) + \frac{1}{2} g \hat{\psi}^+ \hat{\psi}^+ \hat{\psi} \hat{\psi} \right]$$

gdzie $g$ jest stałą sprzężenia określającą oddziaływanie między cząstkami (oddziaływanie ma zerowy zasięg)

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \hat{a}(\vec{k},t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Gdyby $g=0$ (gaz nieoddziałujących bozonów) to

$$\hat{a}(\vec{k},t) = \hat{a}(\vec{k})\, e^{i\omega t} \quad ; \quad \omega(\vec{k}) = \frac{k^2}{2m}$$

Natomiast w tym ogólniejszym przypadku zachodzi:

$$(*)\begin{cases} \hat{\psi}(\vec{r},t) = e^{-\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}\, \hat{\psi}(\vec{r},0)\, e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t} \\ \hat{a}(\vec{k},t) = e^{-\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}\, \hat{a}(\vec{k},0)\, e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t} \end{cases}$$

co jest konsekwencją r-ń ruchu:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\vec{r},t) = [\hat{\psi}(\vec{r},t), \hat{H}] \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{a}(\vec{k},t) = [\hat{a}(\vec{k},t), \hat{H}] \end{cases}$$

Z postaci $(*)$ wynika, że $\hat{H}$ nie zależy od czasu:

$$\hat{H} = \int d^3r \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \left(\vec{\nabla}\hat{\psi}^+(\vec{r})\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\hat{\psi}(\vec{r})\right) + \frac{1}{2} g\, \hat{\psi}^+(\vec{r})\, \hat{\psi}^+(\vec{r})\, \hat{\psi}(\vec{r})\, \hat{\psi}(\vec{r}) \right]$$

gdzie $\hat{\psi}(\vec{r}) = \hat{\psi}(\vec{r},0)$ jest operatorem anihilacji w repr. położeniowej

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \hat{a}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Zatem $\hat{H}$ w reprezentacji pędowej ma postać:

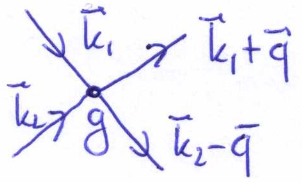
$$\hat{H} = \int d^3k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+(\vec{k}) a(\vec{k}) + \frac{1}{2} g \int d^3r \int \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4}{(2\pi)^6} a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) a(\vec{k}_3) a(\vec{k}_4) \times e^{-i(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k}_4)\cdot\vec{r}}$$

$$\hat{H} = \int d^3k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+(\vec{k}) a(\vec{k}) + \frac{1}{2}\frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3k_1 d^3k_2 d^3q \, a^+(\vec{k}_1+\vec{q}) a^+(\vec{k}_2-\vec{q}) a(\vec{k}_2) a(\vec{k}_1)$$

gdzie $[a(\vec{k}_1), a(\vec{k}_2)] = [a^+(\vec{k}_1), a^+(\vec{k}_2)] = 0$

$[a(\vec{k}_1), a^+(\vec{k}_2)] = \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$

Z postaci oddziaływania w repr. pędowej widać, że proces oddziaływania ma postać:




Jeśli $g=0$ to stan podstawowy układu N bozonów ma postać: $(a^+(\vec{k}=0))^N|0\rangle$

Oddziaływanie spowoduje, że część bozonów będzie wypraszana do stanów o $\vec{k}\neq 0$. Jednak założenie o słabości oddz. implikuje, że liczba $\Delta N_0$ bozonów w stanach o $\vec{k}\neq 0$ jest mała w porównaniu z N.

Zamknijmy układ w obj. $V$ i przejdźmy do postaci dyskretnej:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} g \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\frac{(2\pi)^3}{V}\right]^3 \left[\frac{V}{(2\pi)^3}\right]^2 \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} a^+_{\vec{k}_1+\vec{q}} a^+_{\vec{k}_2-\vec{q}} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_1} =$$

$$= \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \frac{g}{V} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \vec{q}}} a^+_{\vec{k}_1+\vec{q}} a^+_{\vec{k}_2-\vec{q}} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_1} =$$

$$= \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} +$$

$\boxed{\mathrm{I}}$ $+ \frac{1}{2} \frac{g}{V} a^+_{\bar{0}} a^+_{\bar{0}} a_{\bar{0}} a_{\bar{0}}$ — oddz. cząstek w stanie $\vec{k}=0$

$\boxed{\mathrm{II}}$ $+ \frac{1}{2} \frac{g}{V} \sum_{\bar{q}\neq 0} a^+_{\bar{q}} a^+_{-\bar{q}} a_{\bar{0}} a_{\bar{0}}$ — emisja pary cząstek ze stanu $\vec{k}=0$

$\boxed{\mathrm{III}}$ $+ \frac{1}{2} \frac{g}{V} \sum_{\bar{q}\neq 0} a^+_{\bar{0}} a^+_{\bar{0}} a_{\bar{q}} a_{-\bar{q}}$ — absorpcja pary do stanu $\vec{k}=0$

$\boxed{\mathrm{IV}}$ $+ \frac{g}{V} \sum_{\bar{q}\neq 0} a^+_{\bar{q}} a^+_{\bar{0}} a_{\bar{0}} a_{\bar{q}}$ — rozproszenie cząstki na cząstkach w stanie $\vec{k}=0$

$\boxed{\mathrm{V}}$ $+ \frac{1}{2} \frac{g}{V} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q} \\ \vec{k}_1\neq 0,\ \vec{k}_2\neq 0 \\ \vec{k}_1+\vec{q}\neq 0,\ \vec{k}_2-\vec{q}\neq 0}} a^+_{\vec{k}_1+\vec{q}} a^+_{\vec{k}_2-\vec{q}} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_1}$ — oddziaływanie cząstek w stanach $\vec{k}\neq 0$.

Powyższa dekompozycja $\hat{H}$ pozwala wyodrębnić człony ~~istotne~~ dające istotny wkład przy założeniu, że oddziaływanie jest słabe.

Człon $\mathrm{I}$ daje wkład $\sim N_0^2$ ($N_0$ - liczba cząstek w stanie $\vec{k}=0$)

Człony $\mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}$ dają wkłady $\sim \Delta N\, N_0$ ($\Delta N$ - liczba cząstek w stanach $\vec{k}\neq 0$)

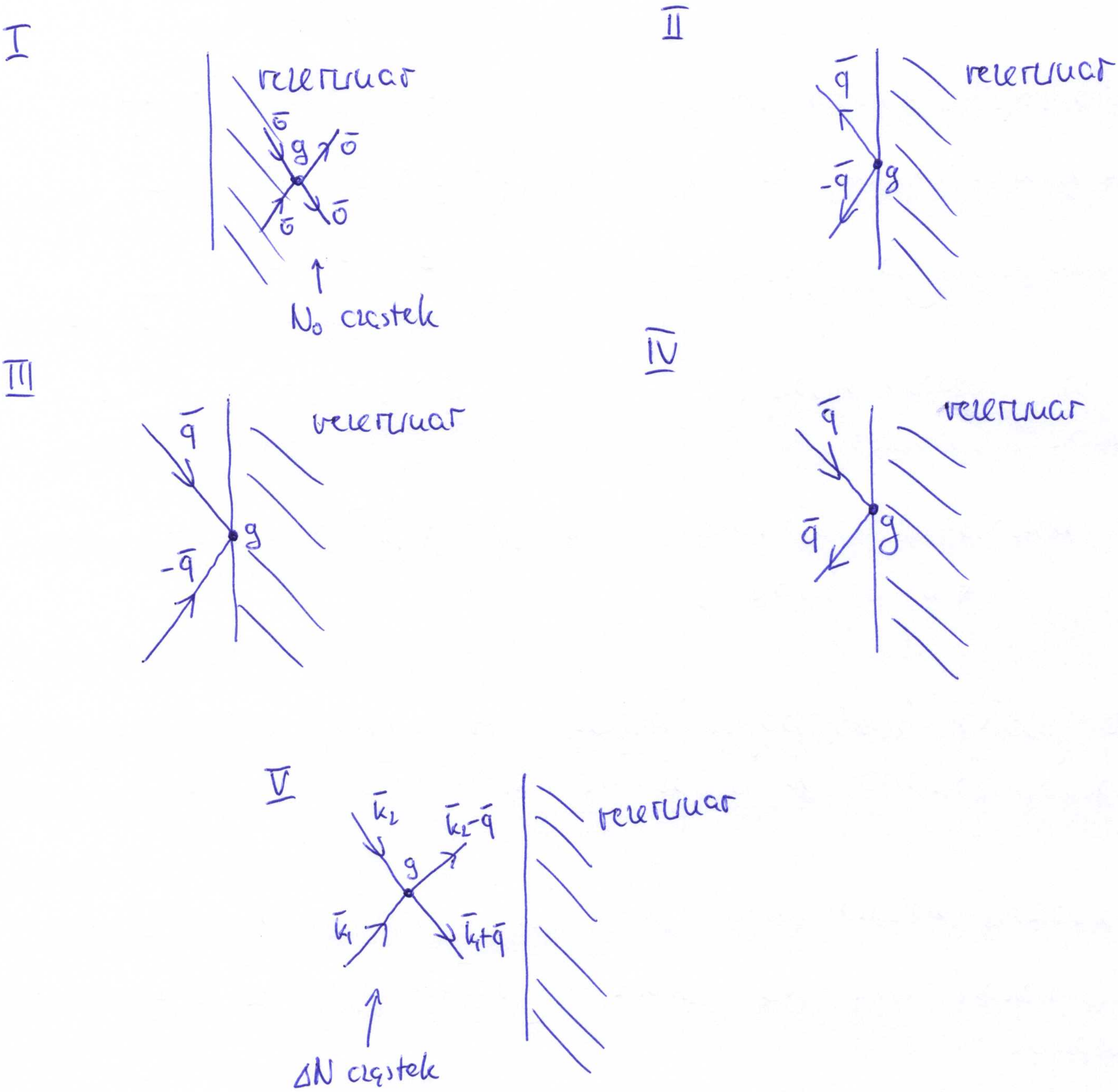
Człon $\mathrm{V}$ daje wkład $\sim (\Delta N)^2$ ; $N = N_0 + \Delta N$

Jeśli oddziaływanie jest słabe to $\Delta N \ll N_0, N$ i człon $\mathrm{V}$ można pominąć.

Ponadto cząstki w stanie $\vec{k}=0$ możemy potraktować jako nieskończony rezerwuar cząstek.

Sprowadza się to do potraktowania op. $\hat{a}_{\bar{0}}, \hat{a}^{+}_{\bar{0}}$ jako klasycznych amplitud: $a_{\bar{0}}, a^{*}_{\bar{0}}$

Procesy opisane poszczególnymi członami $\hat{H}$:




Ten proces pomijamy w naszym przybliżeniu

Zatem

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} a_{\vec{0}} + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\neq 0} \hat{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

liczba    operator

gdzie $a_{\vec{0}} = \sqrt{N_0}$

Czyli

$$\hat{H} \approx \hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\frac{g}{V} N_0^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} g \frac{N_0}{V} \sum_{\vec{q}\neq 0} \left( a^+_{\vec{q}} a^+_{-\vec{q}} + a_{-\vec{q}} a_{\vec{q}} \right) +$$

$$+ g \frac{N_0}{V} \sum_{\vec{q}\neq 0} a^+_{\vec{q}} a_{\vec{q}}$$

oznaczmy gęstość cząstek w stanie $\vec{k}=0$ przez $n_0 = \frac{N_0}{V}$

wtedy

$$\boxed{\hat{H}_0 = \frac{1}{2} g n_0 V + \sum_{\vec{k}\neq 0} \left[ \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g n_0 \right) a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} g n_0 \left( a^+_{\vec{k}} a^+_{-\vec{k}} + a_{-\vec{k}} a_{\vec{k}} \right) \right]}$$

Hamiltonian $\hat{H}_0$ jest biliniowy w op. kreacji i anihilacji i można go łatwo zdiagonalizować, tzn. zapisać w postaci:

$$(*) \quad \hat{H}_0 = \text{const} + \sum_{\vec{k}\neq 0} \varepsilon(\vec{k})\, b^+_{\vec{k}} b_{\vec{k}}$$

dokonując następującej transformacji operatorów

$$\begin{cases} a_{\vec{k}} = u(\vec{k})\, b_{\vec{k}} + v^*(-\vec{k})\, b^+_{-\vec{k}} \\ a^+_{\vec{k}} = u^*(\vec{k})\, b^+_{\vec{k}} + v(-\vec{k})\, b_{-\vec{k}} \end{cases}$$

tr. Bogoliubowa

Aby operatory $b_{\vec{k}}, b^{+}_{\vec{k}}$ spełniały bozonowe reguły komutacyjne:

$$[b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}'}] = 0$$

$$[b_{\vec{k}}, b^{+}_{\vec{k}'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

funkcje $u(\vec{k})$ i $v(\vec{k})$ muszą spełniać warunek:

$$[a_{\vec{k}}, a^{+}_{\vec{k}'}] = \left[\left(u(\vec{k})b_{\vec{k}} + v^{*}(\vec{k})b^{+}_{-\vec{k}}\right), \left(u^{*}(\vec{k}')b^{+}_{\vec{k}'} + v(\vec{k}')b_{-\vec{k}'}\right)\right] =$$

$$= u(\vec{k})u^{*}(\vec{k}')[b_{\vec{k}}, b^{+}_{\vec{k}'}] + v^{*}(\vec{k})v(\vec{k}')[b^{+}_{-\vec{k}}, b_{-\vec{k}'}] =$$

$$= \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\left(|u(\vec{k})|^2 - |v(\vec{k})|^2\right)$$

zatem $|u(\vec{k})|^2 - |v(\vec{k})|^2 = 1$

Aby doprowadzić $\hat{H}_0$ do postaci (*) należy ustalić do $\hat{H}_0$ op. $b_{\vec{k}}, b^{+}_{\vec{k}}$ i dobrać odpowiednio $u(\vec{k})$ i $v(\vec{k})$

Okazuje się że (sprawdzić!):

$$\boxed{\begin{aligned} |u(\vec{k})|^2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{\hbar^2k^2}{2m} + gn_0}{\varepsilon(\vec{k})} + 1\right] \\ |v(\vec{k})|^2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{\hbar^2k^2}{2m} + gn_0}{\varepsilon(\vec{k})} - 1\right] \end{aligned}}$$

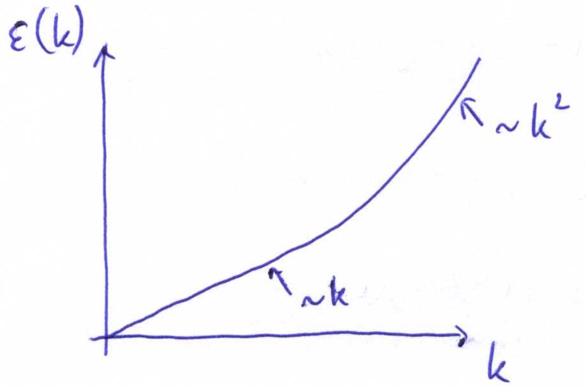
gdzie $\boxed{\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + 2gn_0\right)}}$

wtedy $\hat{H}_0 = E_0 + \sum_{\vec{k}} \varepsilon(k) b^{+}_{\vec{k}} b_{\vec{k}}$

gdzie $\boxed{E_0 = \frac{1}{2}gn_0^2V - \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + gn_0 - \varepsilon(k)\right)}$

Wielkość $\varepsilon(k)$ określa energię stanów wzbudzonych układu (kwazicząstek)

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\sqrt{1+\frac{4gn_0 m}{\hbar^2 k^2}} \quad \xrightarrow{k\to 0} \sqrt{\frac{gn_0}{m}}\,\hbar k, \qquad \xrightarrow{k\to\infty} \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$




Nachylenie krzywej dla małych k definiuje <u>prędkość dźwięku</u> w gazie bozonów:

$$\varepsilon(k) \overset{k\to 0}{\approx} c\hbar k \quad ; \quad c = \sqrt{\frac{gn_0}{m}} \quad ; \quad g>0 \,!$$

Zatem na skutek oddziaływania między bozonami zmieniła się diametralnie relacja dyspersyjna w układzie.

bez oddziaływania : $\varepsilon(k) \sim k^2$

z oddziaływaniem : $\varepsilon(k) \sim k$ (jak dla fononów lub fotonów).

Zauważmy również, że wskutek oddziaływania zmieniła się struktura wzbudzeń elementarnych układu. Z tr. Bogoliubova wynika, że stan $b_k^+|\tilde{0}\rangle$ ($|\tilde{0}\rangle$ jest <u>nową</u> próżnią!) jest <u>kombinacją cząstki i dziury bozonowej</u>.

Uwaga:

Zauważmy, że wielkość $\frac{E_0}{V}$ (gęstość energii) jest rozbieżna.

$$\frac{E_0}{V} = \frac{1}{2} g n_0^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g n_0 - \varepsilon(k) \right) = \infty$$

dla dużych $k$:

$$\varepsilon(k) \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left( 1 + \frac{2 g n_0 m}{\hbar^2 k^2} - \left( \frac{2 g n_0 m}{\hbar^2 k^2} \right)^2 + \dots \right)$$

zatem wyrażenie:

$$\left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g n_0 - \varepsilon(k) \right) \approx \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g n_0 - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - g n_0 + (g n_0)^2 \frac{2m}{\hbar^2 k^2} + \dots \right) =$$

$$= (g n_0)^2 \frac{2m}{\hbar^2 k^2} + \dots$$

ale $\int d^3k \frac{1}{k^2}$ jest rozbieżna !

Przyczyna tkwi w założeniu, że oddziaływanie jest zerowego zasięgu, co daje taką samą stałą oddziaływania niezależnie od przekazu pędu. To założenie jest słuszne dla małych $\vec{k}$. Dlatego powyższą całkę należy zregularyzować wprowadzając np. pęd obcięcia $k_c$

Wtedy $g \to g(k_c) = g + \delta g(k_c)$

$$\frac{E_0}{V} = \frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ta poprawka skasuje człon } \sim \frac{1}{k^2} \text{ w całce}}}{(g + \delta g(k_c))} n_0^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k<k_c} d^3k \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g n_0 - \varepsilon(k) \right)$$

Uwagi:

1) Nadciekłość (argument Landaua)

2) Zmniejszenie ilości cząstek w stanie $\vec{k}=0$ na skutek oddziaływania:

$$\hat{N} = \sum_{\vec{k}} a^{+}_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \quad \text{- operator liczby cząstek}$$

Podstawiając tr. Bogoliubowa otrzymujemy:

$$\cancel{\hat{N} = N_0 + \sum_{\vec{k}\neq 0} |v_{\vec{k}}|^2}$$

$$\hat{N} = N_0 + \sum_{\vec{k}\neq 0} |v(\vec{k})|^2 + \sum_{\vec{k}\neq 0} \left(|u(\vec{k})|^2 + |v(\vec{k})|^2\right) b^{+}_{\vec{k}} b_{\vec{k}}$$

$$- \sum_{\vec{k}\neq 0} u(\vec{k}) v(\vec{k}) \left( b^{+}_{\vec{k}} b^{+}_{-\vec{k}} + b_{-\vec{k}} b_{\vec{k}} \right)$$

Zatem w stanie podstawowym układu z oddz. (czyli dla próżni op. $b_{\vec{k}}$)

$$\langle \hat{N} \rangle = N_0 + \sum_{\vec{k}\neq 0} |v(\vec{k})|^2 = N_0 + \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \, |v(\vec{k})|^2$$

ale $|v(\vec{k})|^2 = \frac{1}{2}\left[ \frac{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g n_0}{\varepsilon(k)} - 1 \right]$

czyli gęstość cząstek poza stanem $\vec{k}=0$ wynosi

$$\Delta n = \frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty k^2 dk \left[ \frac{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g n_0}{\varepsilon(k)} - 1 \right] = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{g n_0 m}{\hbar^2} \right)^{3/2}$$

2) Gaz elektronowy

$$\hat{H}_e = \frac{\hbar^2}{2m}\int d^3r \left(\vec{\nabla}\hat{\psi}^+(\vec{r})\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\hat{\psi}(\vec{r})\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}e^2\int d^3r\, d^3r'\, \hat{\psi}^+(\vec{r})\hat{\psi}^+(\vec{r}\,')\,\frac{e^{-\alpha|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\hat{\psi}(\vec{r}\,')\hat{\psi}(\vec{r})$$

↑
oddziaływanie
kulombowskie otrzymamy dla $\alpha = 0$

Aby jako całość układ był obojętny elektrycznie dodamy jednorodnie naładowane dodatnio tło:

$$\hat{H}_b = \frac{1}{2}e^2\left(\frac{N}{V}\right)^2\int d^3r\, d^3r'\, \frac{e^{-\alpha|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$ – Hamiltonian tła

$$\hat{H}_{e-b} = -e^2\left(\frac{N}{V}\right)\int d^3r\, d^3r'\, \frac{e^{-\alpha|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\hat{\psi}^+(\vec{r}\,')\hat{\psi}(\vec{r}\,')$$ – Hamiltonian oddziaływania tła z elektronami.

Zatem

$$\hat{H} = \hat{H}_e + \hat{H}_b + \hat{H}_{e-b} =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\int d^3r\left(\vec{\nabla}\hat{\psi}^+(\vec{r})\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\hat{\psi}(\vec{r})\right) - e^2\frac{N}{V}\int d^3r\, d^3r'\,\frac{e^{-\alpha|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\hat{\psi}^+(\vec{r}\,')\hat{\psi}(\vec{r}\,')$$

$$+ \frac{1}{2}e^2\int d^3r\, d^3r'\,\hat{\psi}^+(\vec{r})\hat{\psi}^+(\vec{r}\,')\,\frac{e^{-\alpha|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\hat{\psi}(\vec{r}\,')\hat{\psi}(\vec{r})$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}e^2\left(\frac{N}{V}\right)^2\int d^3r\, d^3r'\,\frac{e^{-\alpha|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\text{stała}}$$

Ostatni człon można wyliczyć:

$$\frac{1}{2}e^2n^2\int d^3r\, d^3r'\, \frac{e^{-\alpha|\bar r-\bar r'|}}{|\bar r-\bar r'|} = \frac{1}{2}e^2n^2\int d^3x\, d^3y\, \frac{e^{-\alpha y}}{y} =$$

$$= \frac{1}{2}e^2n^2\, 4\pi \int d^3x \int_0^\infty dy\, y e^{-\alpha y} = \frac{1}{2}e^2n^2 \int d^3x\, \frac{4\pi}{\alpha^2} = \frac{1}{2}e^2n^2 V\, \frac{4\pi}{\alpha^2}$$

Przechodząc do reprezentacji pędowej otrzymamy:

$$\left(\hat\psi(\bar r) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, \hat a(\bar k)\, e^{i\bar k\cdot\bar r}\right)$$

$$\hat H = \int d^3k\, \frac{\hbar^2k^2}{2m} a^+(\bar k)a(\bar k) - e^2n\int d^3r\, d^3r' \int d^3k\, d^3k'\, \frac{1}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{-\alpha|\bar r-\bar r'|}}{|\bar r-\bar r'|}\, a^+(\bar k)a(\bar k')\, e^{-i(\bar k-\bar k')\cdot\bar r'}$$

$$+ \frac{1}{2}e^2\int d^3r\, d^3r' \int \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4}{(2\pi)^6}\, \frac{e^{-\alpha|\bar r-\bar r'|}}{|\bar r-\bar r'|}\, a^+(k_1)a^+(\bar k_2)a(\bar k_4)a(\bar k_3)\, e^{-i(\bar k_1-\bar k_3)\cdot\bar r}\, e^{-i(\bar k_2-\bar k_4)\cdot\bar r'}$$

---

$$-e^2n\int d^3k\, d^3k' \int d^3r' \int d^3y\, \frac{1}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{-\alpha y}}{y}\, a^+(\bar k)a(\bar k')\, e^{-i(\bar k-\bar k')\cdot\bar r'} =$$

$$= -e^2n\int d^3k\, d^3k'\, \frac{4\pi}{\alpha^2}\, a^+(\bar k)a(\bar k')\,\delta(\bar k-\bar k') = -e^2n\,\frac{4\pi}{\alpha^2}\int d^3k\, a^+(\bar k)a(\bar k)$$

---

$$\frac{1}{2}e^2\int d^3r\, d^3r' \int \frac{d^3k_1\ldots d^3k_4}{(2\pi)^6}(\ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}e^2\int d^3r\, \underset{y=\bar r-\bar r'}{d^3y} \int \frac{d^3k_1\ldots d^3k_4}{(2\pi)^6}\, \frac{e^{-\alpha y}}{y}\, e^{-i(\bar k_1-\bar k_3)\cdot\bar r}\, e^{-i(\bar k_2-\bar k_4)\cdot(\bar r-\bar y)} =$$

$$= \frac{1}{2}e^2\int d^3r \int \frac{d^3k_1\ldots d^3k_4}{(2\pi)^6}\, \frac{4\pi}{|\bar k_2-\bar k_4|^2+\alpha^2}\, e^{-i(\bar k_1+\bar k_2-\bar k_3-\bar k_4)\cdot\bar r}(\ldots) = \left|\begin{array}{l}\bar k_1+\bar k_2=\bar k_3+\bar k_4\\ \bar k_1=\bar k_3+\bar q\\ \bar k_2=\bar k_4-\bar q\end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{2}e^2\int \frac{d^3k_3\, d^3k_4\, d^3q}{(2\pi)^3}\, \frac{4\pi}{q^2+\alpha^2}\, a^+(\bar k_3+\bar q)a^+(\bar k_4-\bar q)a(\bar k_4)a(\bar k_3)$$

---

Zatem

$$\hat H = \int d^3k\left[\frac{\hbar^2k^2}{2m} - e^2n\,\frac{4\pi}{\alpha^2}\right]a^+(\bar k)a(\bar k) + \frac{1}{2}e^2n\, N\,\frac{4\pi}{\alpha^2}$$

$$+ \frac{1}{2}e^2\,\frac{1}{2\pi^2}\int d^3k_1\, d^3k_2\, d^3q\, \frac{1}{q^2+\alpha^2}\, a^+(\bar k_1+\bar q)a^+(\bar k_2-\bar q)\, a(\bar k_2)\, a(\bar k_1)$$

W Hamiltonianie powinniśmy również uwzględnić spin elektronów:

$$\hat{H} = \sum_{\sigma=\pm 1} \int d^3k \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - e^2 n \frac{4\pi}{\alpha^2}\right] a^+_\sigma(\vec{k})\, a_\sigma(\vec{k}) + \frac{1}{2} e^2 N n \frac{4\pi}{\alpha^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} e^2 \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma_1,\sigma_2=\pm 1} \int d^3k_1 d^3k_2 d^3q \frac{1}{q^2+\alpha^2} a^+_{\sigma_1}(\vec{k}_1+\vec{q})\, a^+_{\sigma_2}(\vec{k}_2-\vec{q})\, a_{\sigma_2}(\vec{k}_2)\, a_{\sigma_1}(\vec{k}_1)$$

i w postaci dyskretnej

$$\hat{H} = \sum_{\sigma,\vec{k}} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - e^2 n \frac{4\pi}{\alpha^2}\right) a^+_{\sigma\vec{k}} a_{\sigma\vec{k}} + \frac{1}{2} e^2 n N \frac{4\pi}{\alpha^2} +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} e^2 \left[\frac{(2\pi)^3}{V}\right]^3 \left[\frac{V}{(2\pi)^3}\right]^2 \sum_{\substack{\vec{k}_1,\sigma_1\\ \vec{k}_2,\sigma_2,\vec{q}}} \frac{1}{q^2+\alpha^2} a^+_{\sigma_1 \vec{k}_1+\vec{q}}\, a^+_{\sigma_2 \vec{k}_2-\vec{q}}\, a_{\sigma_2 \vec{k}_2}\, a_{\sigma_1 \vec{k}_1}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{H} = &\sum_{\sigma,\vec{k}} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - e^2 n \frac{4\pi}{\alpha^2}\right) a^+_{\sigma\vec{k}} a_{\sigma\vec{k}} + \frac{1}{2} e^2 n N \frac{4\pi}{\alpha^2} \\ &+ \frac{1}{2V} e^2 \sum_{\substack{\vec{k}_1,\sigma_1\\ \vec{k}_2,\sigma_2\\ \vec{q}}} \frac{4\pi}{q^2+\alpha^2} a^+_{\sigma_1 \vec{k}_1+\vec{q}}\, a^+_{\sigma_2 \vec{k}_2-\vec{q}}\, a_{\sigma_2 \vec{k}_2}\, a_{\sigma_1 \vec{k}_1}\end{aligned}}$$

Znajdziemy energię stanu podstawowego $N$ elektronów w objętości $V$ w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń, tzn.

$$E_0 = \langle \Psi_0 | \hat{H} | \Psi_0 \rangle$$

gdzie $|\Psi_0\rangle = \prod_{\substack{\sigma=\pm 1\\ \vec{k}<\vec{k}_F}} a^+_{\sigma\vec{k}} |0\rangle$ - stan własny układu bez oddziaływania

$$\langle\Psi_0|\hat{H}|\Psi_0\rangle = \sum_{\sigma,\vec{k}} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - e^2 n \frac{4\pi}{\alpha^2}\right)\langle a^+_{\sigma\vec{k}} a_{\sigma\vec{k}}\rangle + \frac{1}{2}e^2 n N \frac{4\pi}{\alpha^2}$$

$$+ \frac{1}{2V}e^2 \sum_{\substack{\vec{k}_1,\sigma_1\\ \vec{k}_2,\sigma_2\\ \vec{q}}} \frac{4\pi}{q^2+\alpha^2}\langle a^+_{\sigma_1\vec{k}_1+\vec{q}}\, a^+_{\sigma_2\vec{k}_2-\vec{q}}\, a_{\sigma_2\vec{k}_2}\, a_{\sigma_1\vec{k}_1}\rangle$$

---

$$\langle a^+_{\sigma\vec{k}} a_{\sigma\vec{k}}\rangle = \Theta(k_F - k)$$

zatem

$$\sum_{\sigma,\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\Theta(k_F-k) = \frac{3}{5}N\varepsilon_F \quad \text{gdzie } \varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}\ ; \quad k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

energia Fermiego

energia nieoddz. gazu Fermiego

$$\sum_{\sigma,\vec{k}} e^2 n \frac{4\pi}{\alpha^2}\Theta(k_F-k) = e^2 n \frac{4\pi}{\alpha^2}\frac{V}{(2\pi)^3}2\int d^3k\, \Theta(k_F-k) =$$

$$= e^2 n \frac{4\pi}{\alpha^2}\frac{2V}{(2\pi)^3}\frac{4}{3}\pi k_F^3 = e^2 n \frac{4\pi}{\alpha^2}\frac{V}{3\pi^2}3\pi^2 n =$$

$$= e^2 n N \frac{4\pi}{\alpha^2}$$

$$\langle a^+_{\sigma_1\vec{k}_1+\vec{q}}\, a^+_{\sigma_2\vec{k}_2-\vec{q}}\, a_{\sigma_2\vec{k}_2}\, a_{\sigma_1\vec{k}_1}\rangle = \left(\delta_{\vec{q}0} - \delta_{\sigma_1\sigma_2}\delta_{\vec{k}_1+\vec{q},\vec{k}_2}\right)\Theta(k_F-k_1)\Theta(k_F-k_2)\times$$
$$\times\Theta(k_F-|\vec{k}_1+\vec{q}|)\Theta(k_F-|\vec{k}_2-\vec{q}|)$$

zatem

$$\frac{1}{2V}e^2\sum_{\substack{\vec{k}_1,\sigma_1\\ \vec{k}_2,\sigma_2\\ \vec{q}}}\frac{4\pi}{q^2+\alpha^2}\left(\delta_{\vec{q}0} - \delta_{\sigma_1\sigma_2}\delta_{\vec{k}_1+\vec{q},\vec{k}_2}\right)\Theta(k_F-k_1)\Theta(k_F-k_2)\Theta(k_F-|\vec{k}_1+\vec{q}|)\Theta(k_F-|\vec{k}_2-\vec{q}|) =$$

$$= \frac{1}{2V}e^2\sum_{\substack{\vec{k}_1,\sigma_1\\ \vec{k}_2,\sigma_2}}\frac{4\pi}{\alpha^2}\Theta(k_F-k_1)\Theta(k_F-k_2) - \frac{1}{2V}e^2\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\sigma}\frac{4\pi}{(\vec{k}_2-\vec{k}_1)^2+\alpha^2}\Theta(k_F-k_1)\Theta(k_F-k_2) =$$

$$= \frac{1}{2V} e^2 \frac{4\pi}{\alpha^2} N^2 - \frac{1}{2V} e^2 2 \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int\limits_{\substack{k_1<k_F\\k_2<k_F}} d^3k_1\, d^3k_2 \frac{4\pi}{|\bar{k}_1-\bar{k}_2|^2+\alpha^2}$$

---

Zatem w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń:

$$E_0 = \langle \Psi_0 | \hat{H} | \Psi_0 \rangle =$$

$$= \frac{3}{5} N \varepsilon_F - e^2 n N \frac{4\pi}{\alpha^2} + \frac{1}{2} e^2 n N \frac{4\pi}{\alpha^2} + \frac{1}{2} e^2 n N \frac{4\pi}{\alpha^2}$$

$$- e^2 \frac{V}{(2\pi)^6} \int\limits_{\substack{k_1<k_F\\k_2<k_F}} d^3k_1\, d^3k_2 \frac{4\pi}{|\bar{k}_1-\bar{k}_2|^2+\alpha^2}$$

↑ człon wymienny

czyli

$$E_0 = \frac{3}{5} N \varepsilon_F - e^2 \frac{V}{(2\pi)^6} \int\limits_{\substack{k_1<k_F\\k_2<k_F}} d^3k_1\, d^3k_2 \frac{4\pi}{|\bar{k}_1-\bar{k}_2|^2+\alpha^2}$$

Zatem w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń poprawka do energii związana z oddz. elektronów pochodzi od członu wymiennego (konsekwencja antysymetrii f. falowej). Człon bezpośredni (direct) znosi się dokładnie z członami opisującymi dodatnio naładowane tło.

Granicę oddziaływania kulombowskiego otrzymamy dla $\alpha = 0$:

$$E_0 = \frac{3}{5} N \varepsilon_F - e^2 \frac{V}{(2\pi)^6} \int\limits_{\substack{k_1<k_F\\k_2<k_F}} d^3k_1\, d^3k_2 \frac{4\pi}{|\bar{k}_1-\bar{k}_2|^2} =$$

$$= \frac{3}{5} N \varepsilon_F - \frac{3}{4} e^2 n^{1/3} N \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}$$

zatem energia na elektron:

$$\frac{E_0}{N} = \frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3} - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} e^2 n^{1/3}$$

W układzie są dwie charakterystyczne skale długości:

$$\frac{\hbar^2}{me^2} = a_0 \text{ - promień Bohra}$$

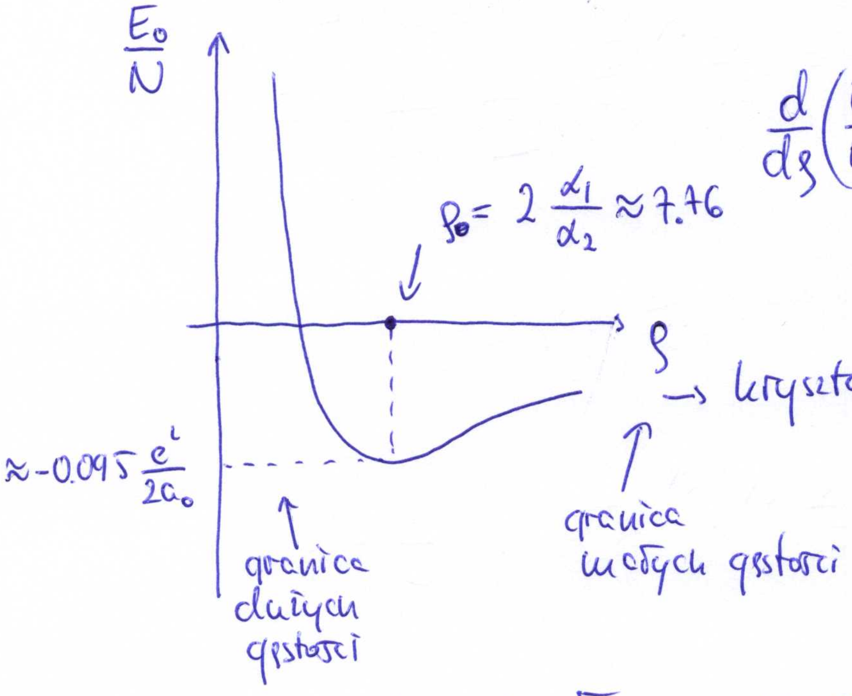
$$\frac{1}{n^{1/3}} = r_0 \text{ - średnia odległość między elektronami}$$

$$\frac{E_0}{N} = \frac{e^2}{2a_0}\left[\alpha_1 \frac{a_0^2}{r_0^2} - \alpha_2 \frac{a_0}{r_0}\right] = \frac{e^2}{2a_0}\left[\frac{\alpha_1}{\rho^2} - \frac{\alpha_2}{\rho}\right]$$

gdzie $\alpha_1 = \frac{3}{5}\left(3\pi^2\right)^{2/3} \approx 5.74$

$\alpha_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \approx 1.48$

$\rho = r_0/a_0$




$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{E_0}{N}\right) = \frac{e^2}{2a_0}\left[\frac{-2\alpha_1}{\rho^3} + \frac{\alpha_2}{\rho^2}\right] = 0$$

$$-2\alpha_1 + \alpha_2 \rho = 0$$

Otrzymany wynik jest słuszny w granicy dużych gęstości, gdzie dominuje energia kinetyczna elektronów.
Dla mniejszych gęstości ~~elektrony są~~ układ jest związany: $\frac{E_0}{N} = \min$
Dla małych gęstości elektrony tworzą kryształ Wignera (przejście fazowe)

Exp.

Energia wiązania metalicznego sodu (Na): $-\frac{E_0}{N} = 1.13\,eV$

$$-\frac{E_0}{N} \approx 0.095\,\frac{e^2}{2a_0} = 1.29\,eV$$

Uwagi:

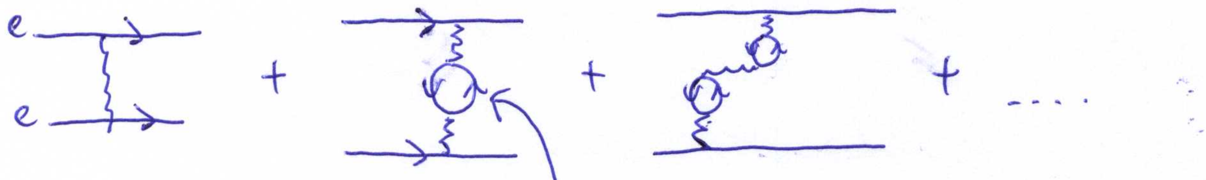
1) Dalsze poprawki do $E_0$ poza pierwszym rzędem rachunku zaburzeń noszą nazwę energii korelacji.

2) Naiwne zastosowanie rachunku zaburzeń do obliczenia następnych członów prowadzi do rozbieżnych całek:

$$E_0 = E_0^{(1)} + \infty + \infty + \infty + \dots$$

Przyczyna tkwi w tym, że w standardowym rach. zaburzeń używamy nieskorelowanych do obliczenia kolejnych członów f. falowych (stanów typu iloczynowego: $a^+_{\mu_1}\dots a^+_{\mu_N}|0\rangle$)

3) Aby otrzymać skończony wynik należy wysumować do końca pewne klasy diagramów Feynmana.
Dla dużych gęstości szczególne są następujące diagramy:




wzbudzenie cząstka-dziura

Wysumowanie tych diagramów powoduje, że oddziaływanie:

$$V(r) = \frac{e^2}{r} \to V_{eff}(r) \to \frac{e^2}{r} e^{-\mu r} \quad \text{gdzie } \mu \propto \sqrt{\varrho}\, k_F$$

Korelacje w ruchu elektronów powodują efektywne osłabienie (ekranowanie) oddziaływania

# Kwantowanie pola elektromagnetycznego

Przypomnienie: równania Maxwella (w jednostkach Gaussa)

$$(*) \begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi\varrho(\vec{r},t) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) + 4\pi\vec{j}(\vec{r},t)\right) \end{cases}$$

$\varrho(\vec{r},t)$ - gęstość ładunku

$\vec{j}(\vec{r},t)$ - gęstość prądu

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

równanie ciągłości

Wykonajmy przestrzenną transformatę Fouriera pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{k},t) = \int d^3r\, \vec{E}(\vec{r},t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \vec{B}(\vec{k},t) = \int d^3r\, \vec{B}(\vec{r},t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{cases}$$

Wtedy równania (*) będą mieć postać:

$$(**) \begin{cases} i\vec{k}\cdot\vec{E}(\vec{k},t) = 4\pi\varrho(\vec{k},t) \\ i\vec{k}\cdot\vec{B}(\vec{k},t) = 0 \\ i\vec{k}\times\vec{E}(\vec{k},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{k},t) \\ i\vec{k}\times\vec{B}(\vec{k},t) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{k},t) + 4\pi\vec{j}(\vec{k},t)\right) \end{cases}$$

a równanie ciągłości ma postać:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k},t) = 0$$

Każdy z wektorów $\vec{E}(\vec{k},t)$, $\vec{B}(\vec{k},t)$ i $\vec{j}(\vec{k},t)$ możemy jednoznacznie rozłożyć na dwie składowe:

$$\vec{E}(\vec{k},t) = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$$
$$\vec{B}(\vec{k},t) = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}$$
$$\vec{j}(\vec{k},t) = \vec{j}_{\parallel} + \vec{j}_{\perp}$$

gdzie symbol "$\parallel$" oznacza składową równoległą do $\vec{k}$, a symbol "$\perp$" - składową prostopadłą do $\vec{k}$.

Zatem
$$\vec{k}\cdot\vec{E}_{\perp} = \vec{k}\cdot\vec{B}_{\perp} = \vec{k}\cdot\vec{j}_{\perp} = 0$$
oraz
$$\vec{k}\times\vec{E}_{\parallel} = \vec{k}\times\vec{B}_{\parallel} = \vec{k}\times\vec{j}_{\parallel} = 0$$

Z równań Maxwella wynika zatem, że

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{B} = \vec{B}_{\perp} \end{cases}$$

Zauważmy bowiem że:

$$\begin{cases} 1)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}_{\parallel}+\vec{E}_{\perp}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{\parallel} = 4\pi\rho \\ 2)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{B}_{\parallel}+\vec{B}_{\perp}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{B}_{\parallel} = 0 \\ 3)\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times(\vec{E}_{\parallel}+\vec{E}_{\perp}) = \vec{\nabla}\times\vec{E}_{\perp} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}_{\parallel}+\vec{B}_{\perp}) \\ 4)\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{B}_{\parallel}+\vec{B}_{\perp}) = \vec{\nabla}\times\vec{B}_{\perp} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}_{\parallel}+\vec{E}_{\perp}) + 4\pi(\vec{j}_{\parallel}+\vec{j}_{\perp})\right) \end{cases}$$

oraz z r-nia ciągłości:

$$5)\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{\parallel} = 0$$

Stąd widać, że

1° Podłużna składowa pola elektrycznego jest wyznaczona przez rozkład gęstości ładunku (por. r-nie (1))

2° Podłużna składowa pola magnetycznego jest wszędzie równa zeru (por. r-nie (2) i (3))

3° Poprzeczna składowa pola elektrycznego jest wyznaczona przez zmiany w czasie poprzecznej składowej pola magnetycznego. (por. r-nie (3))

4° Poprzeczna składowa pola magnetycznego jest wyznaczona przez zmiany w czasie poprzecznej składowej pola elektrycznego i poprzeczną składową gęstości prądu. (por. r-nie (4))

5° Podłużna składowa pola elektrycznego i podłużna składowa gęstości prądu są ze sobą związane:

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_{\parallel} + 4\pi\vec{j}_{\parallel}\right) = 0 \qquad \text{(por. r-nie (4))}$$

czyli

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_{\parallel} = -4\pi\vec{j}_{\parallel}}$$

Biorąc dywergencję obu stron otrzymujemy r-nie ciągłości

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_{\parallel} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{\parallel} = \frac{\partial}{\partial t}4\pi\rho = -4\pi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{\parallel}$$

Czyli

6° Równanie ciągłości narzuca więź na podłużną składową gęstości prądu (tylko).

7° W przypadku braku źródeł ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) oba pola $\vec{E}$ i $\vec{B}$ są poprzeczne:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_\perp \\ \vec{B} = \vec{B}_\perp \end{cases}$$

## Potencjały pola elektromagnetycznego.

Równania Maxwella (2) i (3) są automatycznie spełnione gdy wyrazimy $\vec{E}$ i $\vec{B}$ przez potencjały $\varphi$ i $\vec{A}$:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t) \end{cases}$$

zatem

$$\vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}_\parallel + \vec{A}_\perp\right)$$

$$\vec{B}_\perp = \vec{\nabla}\times\left(\vec{A}_\parallel + \vec{A}_\perp\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A}_\perp$$

czyli

$$(*)\begin{cases} \vec{E}_\perp = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}_\perp \\ \vec{E}_\parallel = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}_\parallel \quad \leftarrow \\ \vec{B}_\perp = \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}_\perp\right) \end{cases}$$

Z r-ń (*) wynika, że mamy swobodę wyboru składowej podłużnej $\vec{A}_\parallel$:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \quad \leftarrow \text{modyfikacja składowej } \vec{A}_\parallel \\ \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

transformacja cechowania.

**Cechowanie kulombowskie:** $\vec{A}_\parallel = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

# Funkcja Lagrange'a dla pola e.m.

Niech $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$

$$L = \int d^3r \, \mathcal{L}(\vec{A}, \varphi)$$

gdzie
$$\boxed{\mathcal{L}(\vec{A}, \varphi) = -\frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=0}^{3} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad ; \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\vec{\partial}_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \quad ; \quad \vec{\partial}^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$$

$$\vec{A}_\mu = \left(\varphi, -\vec{A}\right) \quad ; \quad \vec{A}^\mu = \left(\varphi, \vec{A}\right)$$

czterowektor kowariantny

czterowektor kontrawariantny

$F_{\mu\nu}$ jest antysymetrycznym tensorem kowariantnym drugiego rzędu

$F^{\mu\nu}$ jest antysymetrycznym tensorem kontrawariantnym drugiego rzędu.

Stąd widać, że $\mathcal{L}$ jest skalarem (tzn. nie zmienia się przy zmianie inercjalnego układu odniesienia).

Tak samo jak działanie:

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L} \quad ; \quad d^4x = d^3r \, d(ct)$$

Warunek $\underline{\delta S = 0}$ powinien prowadzić do r-ń Maxwella.

Zauważmy, że $\mathcal{L}$ jest niezmiennicze ze względu na transformację cechowania, która w notacji czterowektorowej ma postać:

$$\vec{A}'_\mu = \vec{A}_\mu - \vec{\partial}_\mu f \quad ;$$

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu f) - \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu f) =$$

$$= F_{\mu\nu} - (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) f = F_{\mu\nu}$$

Czyli $F_{\mu\nu}$ (i oczywiście $F^{\mu\nu}$) są niezmiennikami transformacji cechowania.

Jawna postać $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem gęstość funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}$ wyraża się przez pola $\vec{E}$ i $\vec{B}$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=0}^{3} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} =$$

$$= \mathrm{Tr} \left\{ \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{4} (E^2 + E^2 - 2B^2)$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \Rightarrow L = \frac{1}{2} \int d^3 r \, (E^2 - B^2)}$$

Warunek $\delta S = 0$ oznacza:

$$\delta S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}\sum_{\mu,\nu} \left(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) - \frac{1}{4}\sum_{\mu,\nu} \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu\right)\right] =$$

... (trzeba scałkować przez części i skorzystać z warunku że pola mają znikać w nieskończoności, a wariacje w chwili początkowej i końcowej) ... =

$$= \int d^4x \left( \sum_\mu \left[\partial_\mu \left(\partial^\mu \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} A^\mu\right)\right]\delta\varphi - \left[\partial_\mu \left(\partial^\mu \vec{A} + \vec{\nabla} A^\mu\right)\right]\cdot \delta\vec{A}\right) = 0$$

Stąd mamy dwa równania:

$$(*) \begin{cases} (1) \sum_\mu \partial_\mu \left(\partial^\mu \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} A^\mu\right) = 0 \\ (2) \sum_\mu \partial_\mu \left(\partial^\mu \vec{A} + \vec{\nabla} A^\mu\right) = 0 \end{cases}$$

$$(1) \sum_\mu \left(\partial_\mu \partial^\mu \varphi - \frac{1}{c}\partial_\mu \frac{\partial}{\partial t} A^\mu\right) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} =$$

$$= -\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

$$(2) \sum_\mu \left(\partial_\mu \partial^\mu \vec{A} + \partial_\mu \vec{\nabla} A^\mu\right) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) =$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{B}$$

Zatem r-nia (*) odpowiadają r-niom Maxwella:

$$(*)\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Pozostałe 2 r-nia Maxwella: $\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$

są spełnione automatycznie z uwagi na relacje:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases}$$

Równania (*) są zatem r-niami Eulera-Lagrange'a dla

$$L = \frac{1}{2}\int d^3r\,(E^2 - B^2) = -\frac{1}{4}\int\sum_{\mu,\nu=0}^{3} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,d^3r$$

Należy pamiętać, że $\mathcal{L}$ nie jest wyznaczony jednoznacznie

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}f_0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{f}, \quad f_0 = f_0(\varphi, \vec{A})$$

daje te same r-nia E-L. $\quad \vec{f} = \vec{f}(\varphi, \vec{A})$

## Sprzężenie pola e.m. z naładowanymi cząstkami

### Klasycznie i nierelatywistycznie

$$L = L_{\text{cząstki}} + L_{\text{coupl.}} + L_{\text{em.}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} L_{em} &= \frac{1}{2}\int d^3r\,(E^2 - B^2) \\ L_{\text{cząstki}} &= \sum_{i=1}^{N}\frac{m\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} \\ L_{\text{coupl.}} &= -\sum_{i=1}^{N}\left(e\varphi(\vec{r}_i,t) - \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{A}(\vec{r}_i,t)\right) \quad ; \quad e \text{ - ładunek.} \end{aligned}}$$

Zatem

$$L(\vec{r}_i,\dot{\vec{r}}_i,\vec{A},\varphi)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2}-e\varphi(\vec{r}_i,t)+\frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{A}(\vec{r}_i,t)\right)+\frac{1}{2}\int d^3r\,(E^2-B^2)$$

Działanie:
$$S=\int_{t_0}^{t_1}d(ct)\,L$$

Sprawdzamy poprawność r-ń Eulera-Lagrange'a otrzymanych z warunku $\underline{\delta S=0}$.

$$\delta S=\int d(ct)\left(\delta L_{\text{cząstki}}+\delta L_{\text{coupl.}}+\delta L_{em}\right)=0$$

to już policzyliśmy (str. 79)

$$\delta L_{\text{cząstki}}=\sum_{i=1}^{N}m\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i=\sum_{i=1}^{N}m\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{N}\left(-m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right)$$

ten człon nie daje wkładu do $\delta S$

$$\delta L_{\text{coupl.}}(\vec{r}_i,\dot{\vec{r}}_i,\vec{A},\varphi)=\sum_{i=1}^{N}\Big(-e\,\delta\varphi-e\varphi(\delta\vec{r}_i,t)+\frac{e}{c}\delta\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{A}+$$
$$+\frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{A}+\frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{A}(\delta\vec{r}_i,t)\Big)=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\Big(-e\,\delta\varphi(\vec{r}_i,t)-e\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}_i,t)\cdot\delta\vec{r}_i+\frac{e}{c}\left(\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_i\cdot\vec{A})-\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\delta\vec{r}_i\right)$$
$$+\frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{A}(\vec{r}_i,t)+\frac{e}{c}\delta\vec{r}_i\cdot\vec{\nabla}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}_i\Big)$$

$\delta L_{em}$ ← patrz strona 79

Zatem ostatecznie:

$$\delta S = \int d(ct)\Big[-\sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{d}{dt}\Big(m_i\dot{\vec r}_i + \frac{e}{c}\vec A(\vec r_i,t)\Big) + e\vec\nabla\varphi(\vec r_i,t) - \frac{e}{c}\vec\nabla(\dot{\vec r}_i\cdot\vec A)\Big]\Big]\cdot\delta\vec r_i$$
$$+ \int d^4x\Big[-\sum_{i=1}^{N} e\,\delta(\vec r-\vec r_i) + \sum_\mu\Big[\partial_\mu\Big(\partial^\mu\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^\mu\Big)\Big]\Big]\delta\varphi(\vec r,t)$$
$$+ \int d^4x\Big[\sum_{i=1}^{N}\frac{e}{c}\dot{\vec r}_i\,\delta(\vec r-\vec r_i) - \sum_\mu\Big[\partial_\mu\Big(\partial^\mu\vec A + \vec\nabla A^\mu\Big)\Big]\Big]\cdot\delta\vec A(\vec r,t)$$

Zatem żądanie $\delta S = 0$ przy niezależnych wariacjach: $\delta r_i, \delta\varphi, \delta\vec A$ implikuje:

$$(*)\begin{cases}(1)\ \dfrac{d}{dt}\Big(m\dot{\vec r}_i + \dfrac{e}{c}\vec A(\vec r_i,t)\Big) = -e\vec\nabla\varphi(\vec r_i,t) + \dfrac{e}{c}\vec\nabla\big(\dot{\vec r}_i\cdot\vec A(\vec r_i,t)\big)\\ (2)\ \sum\limits_{\mu=0}^{3}\partial_\mu\Big(\partial^\mu\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}A^\mu\Big) = \sum\limits_{i=1}^{N} e\,\delta(\vec r-\vec r_i)\\ (3)\ \sum\limits_{\mu=0}^{3}\partial_\mu\Big(\partial^\mu\vec A + \vec\nabla A^\mu\Big) = \sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{e}{c}\dot{\vec r}_i\,\delta(\vec r-\vec r_i)\end{cases}$$

Rozważmy r-nie (*)(1):

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec r_i + \frac{e}{c}(\dot{\vec r}_i\cdot\vec\nabla)\vec A + \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec A = -e\vec\nabla\varphi + \frac{e}{c}\vec\nabla(\dot{\vec r}_i\cdot\vec A)$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec r_i = e\Big(-\vec\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec A\Big) + \frac{e}{c}\Big(\vec\nabla(\dot{\vec r}_i\cdot\vec A) - (\dot{\vec r}_i\cdot\vec\nabla)\vec A\Big)$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec r_i = e\Big(-\vec\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec A\Big) + \frac{e}{c}\dot{\vec r}_i\times\vec\nabla\times\vec A$$

czyli (*)(1) jest równoważne: $\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}\vec r_i = e\vec E + \frac{e}{c}\dot{\vec r}_i\times\vec B}$

Natomiast lewa strona równania (*)(2) jest równa: $\vec\nabla\cdot\vec E$ (por. 79)
a lewa strona (*)(3): $-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec E + \vec\nabla\times\vec B$ (por. str. 79)

Zatem r-nia (*) są równoważne:

$$(*)\quad \boxed{\begin{aligned} m\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} &= e\vec{E}(\vec{r}_i,t) + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i,t) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \sum_{i=1}^{N} e\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{N}\frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \end{aligned}}$$

oraz

$$(**)\quad \begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases}$$

R-nia (*) i (**) stanowią komplet r-ń elektrodynamiki klasycznej, gdzie cząstki traktujemy nierelatywistycznie.

<u>Kwantowanie kanoniczne</u>

Mamy do wyboru kilka strategii:

1) Kwantujemy powyższą teorię, tzn. daną f. Lagrange'a ze strony 81.
Otrzymamy w wyniku kwantową teorię pola e.m. i cząstek rozróżnialnych, nierelatywistycznych.

2) Kwantujemy teorię pola Schrödingera sprzężonego z polem e.m., tzn.:

$$\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}\psi)\cdot(\vec{\nabla}\psi^*) - e|\psi|^2\varphi + \frac{e}{c}\vec{j}\cdot\vec{A} + \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$

$$\text{gdzie}\quad \vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$$

Otrzymamy w wyniku kwantową teorię pola cząstek nieodróżnialnych (fermionów lub bozonów), nierelatywistycznych i pola e.m.

3) Kwantujemy teorię pola Diraca sprzężonego z polem e.m., tzn:

$$\mathcal{L} = i\hbar \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m_0 c \bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

gdzie $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$ ; $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi$

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

$$g = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}$$

Otrzymamy w wyniku kwantową teorię pola fermionów o spinie ½ sprzężonych z polem e.m.

Jest to pełna wersja QED, która opisuje również procesy kreacji par elektron-pozyton, które są poza zasięgiem teorii 1) i 2).

Tym niemniej teorie 1) i 2) działają bardzo dobrze gdy $\hbar\omega \ll m_0 c^2$ (optyka kwantowa: oddziaływanie światła z atomami)

Kwantowanie teorii danej funkcją Lagrange'a:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{m\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} - e\varphi(\vec{r}_i,t) + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i,t) \right) + \frac{1}{2}\int d^3r \left(E^2 - B^2\right)$$

Problem: w naszej teorii mamy nadmiar zmiennych opisujących pole e.m.

Zauważmy bowiem, że pęd kanonicznie sprzężony z polem $\varphi$ jest równy zero:

$$\Pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \quad , \quad \text{bo } \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Wyrazem tej nadmiarowości jest transformacja cechowania:
$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \\ \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

$$L'(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \vec{A}', \varphi') = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{m\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{A} + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{\nabla} f \right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int d^3r \left(E^2 - B^2\right) =$$
$$= L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \vec{A}, \varphi) + \sum_{i=1}^{N} \frac{e}{c}\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \vec{\nabla} f \right) =$$
$$= L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \vec{A}, \varphi) + \sum_{i=1}^{N} \frac{e}{c}\frac{df}{dt}$$

czyli
$$\boxed{L'(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \vec{A}', \varphi') = L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \vec{A}, \varphi) + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \frac{e}{c} f(\vec{r}_i, t)}$$

Stąd wynika, że $L'$ i $L$ są całkowicie równoważne, tzn. dają te same r-nia Eulera-Lagrange'a (por. (*) str 83).

Dygresja:

Zauważmy, że transformacja cechowania modyfikuje pędy cząstek:

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m\dot{\vec{r}}_i + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}_i, t)$$

$$(*)\quad \vec{p}\,'_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m\dot{\vec{r}}_i + \frac{e}{c}\vec{A}'(\vec{r}_i, t) = \vec{p}_i + \frac{e}{c}\vec{\nabla} f(\vec{r}_i, t)$$

Tym niemniej relacje kanoniczne między pędami i współrzędnymi pozostają nienaruszone:

Jeżeli: $\{(\vec{r}_i)_k, (\vec{p}_j)_l\} = \delta_{ij}\,\delta_{kl}$

to $\{(\vec{r}_i)_k, (\vec{p}\,'_j)_l\} = \{(\vec{r}_i)_k, (\vec{p}_j)_l + \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x_l} f(\vec{r}_i, t)\} =$

$$= \{(\vec{r}_i)_k, (\vec{p}_j)_l\} + \frac{e}{c}\underbrace{\{(\vec{r}_i)_k, \frac{\partial}{\partial x_l} f(\vec{r}_i, t)\}}_{=0} = \delta_{ij}\,\delta_{kl}$$

Zatem wykonanie transformacji cechowania dla pól: $\varphi$, $\vec{A}$ powoduje wykonanie transformacji kanonicznej postaci (*) dla cząstek.

---

Aby pozbyć się nadmiaru stopni swobody w opisie pola e.m. zastosujemy konkretną tr. cechowania prowadzącą do cechowania kulombowskiego: $\boxed{\vec{A}_{\parallel} = 0.}$

Uwaga: Elektrodynamiki kwantowe w różnych cechowaniach są unitarnie równoważne tzn. istnieje tr. unitarna operatorów pola i stanów.
(por. Dygresja)

## Cechowanie kulombowskie (poprzeczne)

$$\vec A_{\parallel} = 0 \Rightarrow \vec\nabla \cdot \vec A = 0$$

czyli $\vec E = -\vec\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec A = -\vec\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec A_{\perp} = \vec E_{\parallel} + \vec E_{\perp}$

gdzie $\begin{cases} \vec E_{\parallel} = -\vec\nabla\varphi \\ \vec E_{\perp} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec A \end{cases}$

zatem w cechowaniu kulombowskim podłużna składowa pola elektrycznego zależy tylko od $\varphi$.

$$L = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m\dot{\vec r}_i^{\,2}}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\dot{\vec r}_i \cdot \vec A_{\perp}\right) + \frac{1}{2}\int d^3r\left(E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2 - \underset{\vec B = \vec B_{\perp}}{B_{\perp}^2}\right)$$

ale $\int d^3r\, E_{\parallel}^2 = \int d^3r\, \vec\nabla\varphi \cdot \vec\nabla\varphi = \underbrace{\int \vec\nabla \cdot (\varphi\vec\nabla\varphi)\, d^3r}_{=0} - \int d^3r\, \varphi\nabla^2\varphi =$

$$= + \int d^3r\, \varphi\, \vec\nabla \cdot \vec E_{\parallel} = \int d^3r\, \varphi(\vec r, t)\sum_{i=1}^{N} e\,\delta(\vec r - \vec r_i) = \sum_{i=1}^{N} e\varphi(\vec r_i, t)$$

Zatem

$$L = \sum_{i=1}^{N}\frac{m\dot{\vec r}_i^{\,2}}{2} - \sum_{i=1}^{N}\left(e\varphi(\vec r_i, t) - \frac{1}{2}e\varphi(\vec r_i, t)\right) + \frac{e}{c}\sum_{i=1}^{N}\dot{\vec r}_i \cdot \vec A_{\perp}(\vec r_i, t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int d^3r\left(E_{\perp}^2 + B_{\perp}^2\right)$$

ale ponieważ $\nabla^2\varphi = -\sum_{i=1}^{N} e\,\delta(\vec r - \vec r_i)$

$$\cancel{4\pi\varphi(\vec r, t) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{e}{|\vec r - \vec r_i|}}$$

więc $\varphi(\vec r, t) = \sum_{i=1}^{N}\frac{e}{4\pi|\vec r - \vec r_i|}$

Czyli

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{e^2}{4\pi|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \frac{e}{c}\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{A}_\perp +$$

$$+ \frac{1}{2}\int d^3r \left[ \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \vec{A}_\perp}{\partial t}\right)^2 - \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}_\perp\right)^2 \right]$$

zatem pozbyliśmy się $\varphi$ i $L = L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \vec{A}_\perp)$

Człon $\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{N} \frac{e^2}{4\pi|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$ opisuje oddziaływanie kulombowskie między ładunkami (jest rozbieżny dla $i=j$ co odpowiada samooddziaływaniu cząstek).

## Funkcja Hamiltona

$$\begin{cases} \vec{p}_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m\dot{\vec{r}}_i + \dfrac{e}{c}\vec{A}_\perp \\ \vec{\Pi}_A = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_\perp)} = \dfrac{\partial}{\partial \dot{A}_\perp}\left[\dfrac{1}{2c^2}(\dot{A}_\perp)^2 + \dfrac{1}{2}(\vec{\nabla}\times\vec{A}_\perp)^2\right] = \dfrac{1}{c^2}\dot{A}_\perp \end{cases}$$

$$H = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i + \int d^3r \frac{1}{c^2}(\dot{A}_\perp)^2 - L =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \cdot \left(\frac{\vec{p}_i - \frac{e}{c}\vec{A}_\perp}{m}\right) + c^2\int d^3r\, \Pi_A^2 - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_i - \frac{e}{c}\vec{A}_\perp\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{e^2}{4\pi|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - \frac{e}{c}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\vec{p}_i - \frac{e}{c}\vec{A}_\perp}{m}\right)\cdot\vec{A}_\perp - \frac{1}{2}\int d^3r\left[c^2\Pi_A^2 - (\vec{\nabla}\times\vec{A}_\perp)^2\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\vec{p}_i - \frac{e}{c}\vec{A}_\perp\right)^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{e^2}{4\pi|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \frac{1}{2}\int d^3r\left[\Pi_A^2 + (\vec{\nabla}\times\vec{A}_\perp)^2\right]$$

Zatem

$$\boxed{H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_i - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{e^2}{4\pi|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \frac{1}{2}\int d^3r\left[\Pi_A^2 + \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)^2\right]}$$

przy warunku cechowania kulombowskiego $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

Warunek cechowania kulombowskiego implikuje, że jedynie 2 z 3 składowych $\vec{A}$ są niezależne.

Ponadto w nieobecności źródeł $\vec{A}$ spełnia równanie:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}_\perp}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)}_{=0} - \nabla^2\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}$$

czyli $\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0$ $\leftarrow$ zatem każda ze składowych $\vec{A}$ spełnia r-nie K-G z $m=0$

Ogólne rozwiązanie jest postaci (por. str. 8):

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{(2\pi)^3 2\omega(k)}}\left(\vec{a}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + \vec{a}^*(\vec{k})\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)}$$

gdzie $\omega^2(k) = (ck)^2$

Ponadto warunek $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ oznacza, że:

$$\vec{k}\cdot\vec{a}(\vec{k}) = 0$$

Wprowadzimy dwa wektory jednostkowe $\vec{\varepsilon}_\lambda$ ; $\lambda = \pm 1$

takie że $\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}_\lambda = 0$ oraz $\vec{\varepsilon}_\lambda\cdot\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$

$\uparrow$ w przypadku polaryzacji kołowej $\vec{\varepsilon}_\lambda$ mogą być zespolone np. $\vec{\varepsilon}_{+1} = \vec{e}_x + i\vec{e}_y$

Wtedy

$$\vec{A}(\bar{r},t) = \sum_{\lambda} \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2(2\pi)^3\omega(k)}} \left(\vec{\varepsilon}_\lambda a_\lambda(\bar{k}) e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)} + \vec{\varepsilon}_\lambda^{\,*} a_\lambda^*(\bar{k}) e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)}\right)$$

$$\bar{\Pi}_A(\bar{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} =$$

$$= \sum_{\lambda} \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2(2\pi)^3}} \left(-i\,\vec{\varepsilon}_\lambda a_\lambda(\bar{k}) e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)} + i\,\vec{\varepsilon}_\lambda^{\,*} a_\lambda^*(\bar{k}) e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)}\right)$$

po skwantowaniu $a_\lambda(\bar{k}) \to \hat{a}_\lambda(\bar{k})$

$a_\lambda^*(\bar{k}) \to \hat{a}_\lambda^+(\bar{k})$

oraz $[\hat{a}_\lambda(\bar{k}), \hat{a}_{\lambda'}^+(\bar{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(\bar{k}-\bar{k}')$

$\lambda$ - oznacza polaryzację fali.

$$\frac{1}{2}\int d^3r \left[\Pi_A^2 + (\vec{\nabla}\times\vec{A})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r \int d^3k\, d^3k' \sum_{\lambda,\lambda'} \Bigg( \sqrt{\frac{\hbar^2\omega(k)\omega(k')}{(2(2\pi)^3)^2}} \Big[ \vec{\varepsilon}_\lambda \cdot \vec{\varepsilon}_{\lambda'}^{\,*}\, \hat{a}_\lambda(\bar{k}t)\hat{a}_{\lambda'}^+(\bar{k}'t)\, e^{i(\bar{k}-\bar{k}')\cdot\bar{r}} +$$

$$+ \vec{\varepsilon}_\lambda^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\lambda'}\, \hat{a}_\lambda^+(\bar{k}t)\,\hat{a}_{\lambda'}(\bar{k}'t)\, e^{-i(\bar{k}-\bar{k}')\cdot\bar{r}} \Big] +$$

$$+ \sqrt{\frac{\hbar\omega(k)\omega(k')}{(2(2\pi)^3)^2}} \left( i\bar{k}\times\vec{\varepsilon}_\lambda\, \hat{a}_\lambda(\bar{k},t) e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} - i\bar{k}\times\vec{\varepsilon}_\lambda^{\,*}\hat{a}_\lambda^+(\bar{k},t) e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}} \right)\cdot$$

$$\cdot \left( i\bar{k}'\times\vec{\varepsilon}_{\lambda'} a_{\lambda'}(\bar{k}',t) e^{i\bar{k}'\cdot\bar{r}} - i\bar{k}'\cdot\vec{\varepsilon}_{\lambda'}^{\,*} a_{\lambda'}^+(\bar{k},t) e^{-i\bar{k}'\cdot\bar{r}} \right) \Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3k \sum_{\lambda} \left[ \frac{\hbar\omega}{2} \left( a_\lambda(\bar{k},t)\,\hat{a}_\lambda^+(\bar{k},t) + a_\lambda^+(\bar{k},t)\, a_\lambda(\bar{k},t) \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2}\int d^3k \sum_{\lambda} \left[ \frac{\hbar\omega}{2} \left( \hat{a}_\lambda(\bar{k},t)\,\hat{a}_\lambda^+(\bar{k},t) + a_\lambda^+(\bar{k},t)\, a_\lambda(\bar{k},t) \right) \right]$$

ale $a_\lambda(\bar{k},t) = a_\lambda(\bar{k})\, e^{-i\omega t}$ ;

czyli

$$\frac{1}{2}\int d^3r\left(\Pi_A^2 + (\vec{\nabla}\times\vec{A})^2\right) = \int d^3k \sum_\lambda \frac{\hbar\omega(k)}{2}\left(\hat{a}_\lambda(\vec{k})\hat{a}_\lambda^+(\vec{k}) + a_\lambda^+(\vec{k})a_\lambda(\vec{k})\right) =$$

$$= \int d^3k \sum_\lambda \hbar\omega(\vec{k})\, a_\lambda^+(\vec{k})\, a_\lambda(\vec{k}) + \infty$$

Zatem pełny Hamiltonian ma postać:

$$\boxed{\hat{H} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_i - \frac{e}{c}\hat{\vec{A}}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{e^2}{4\pi|\vec{r}_i-\vec{r}_j|} + \int d^3k \sum_{\lambda=\pm1}\hbar\omega(\vec{k})\hat{a}_\lambda^+(\vec{k})\hat{a}_\lambda(\vec{k}) + (\text{energia drgań zerowych pola e.m.}) + (\text{energia kulombowska samooddziaływania})}$$

$\hbar\omega(\vec{k}) = \hbar k c \ll mc^2$ – warunek stosowalności przybliżenia nierelatywistycznego.

Przestrzeń stanów:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{F}_f$$

gdzie $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_1$ – przestrzeń Hilberta N cząstek (rozróżnialnych)

$\mathcal{F}_f = \mathcal{H}_0^f \oplus \mathcal{H}_1^f \oplus \mathcal{H}_2^f \oplus \ldots$ – przestrzeń Focka dla fotonów

$\mathcal{H}_M^f$ – przestrzeń stanów M-fotonowych (tylko symetryczne stany)

Zatem w naszej teorii stan $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$ ewoluuje zgodnie z równaniem:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle}$$

przy czym

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\substack{\mu_1,\ldots,\mu_N \\ n_{\lambda_i}(\bar{k}_i)}} c_{\mu_1,\mu_2\ldots\mu_N, n_{\lambda_1}(\bar{k}_1), n_{\lambda_2}(\bar{k}_2),\ldots}(t)\,|\mu_1\rangle\ldots|\mu_N\rangle\,|n_{\lambda_1}(\bar{k}_1) n_{\lambda_2}(\bar{k}_2)\ldots\rangle$$

suma po stanach $\mu_i$ $i$-tej cząstki
oraz suma po liczbach obsadzeń $n_{\lambda_i}(\bar{k}_i) = 0, 1, 2, \ldots$
określających liczbę fotonów o pędzie $\bar{k}_i$
i polaryzacji $\lambda_i$.

Jest to <u>obraz Schrödingera</u>.

W <u>obrazie Heisenberga</u> ewoluują pola; np.:

$$\hat{A}(\bar{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,\hat{A}(\bar{r})\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

a stan układu się nie zmienia

W wersji dyskretnej, w której umieszczamy układ w dużym pudle o obj. $V$ i narzucamy periodyczne warunki brzegowe:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\hat{\bar{p}}_i - \frac{e}{c}\hat{\bar{A}}\right)^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{e^2}{4\pi|\bar{r}_i - \bar{r}_j|} + \sum_{\bar{k},\lambda} \hbar\omega(k)\left[a_\lambda^+(\bar{k})a_\lambda(\bar{k}) + \frac{1}{2}\right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{i\,\mathrm{coul}} \leftarrow \text{energia samooddz. (nieskończona)}$$

drgania zerowe

$$\hat{\bar{p}}_i = \frac{\hbar}{i}\bar{\nabla}_i$$

$$\hat{\bar{A}}(\bar{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\bar{k},\lambda}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(k)}}\left(\bar{\varepsilon}_\lambda\,\hat{a}_\lambda(\bar{k}, t)\,e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} + \bar{\varepsilon}_\lambda^*\,\hat{a}_\lambda^+(\bar{k}, t)\,e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}\right)$$