Komputerowa analiza danych doświadczalnych

Wykład 12
20.05.2022

dr inż. Łukasz Graczykowski
lukasz.graczykowski@pw.edu.pl

Semestr letni 2021/2022

Test χ^2 – przykład ponownie

Metoda najmniejszych kwadratów

Warianty testu t-Studenta

Wstęp do ANOVA

Test χ^2 – przykład ponownie

Test χ^2

Wyobraźmy sobie, że rzucamy monetą 100 razy (N=100).

Prawdopodobieństwo uzyskania orła lub reszki wynosi 50%, a więc wartość oczekiwana wygląda następująco:

	Orzeł	**Reszka**
Wartość oczekiwana (N)	50	50

My jednak otrzymaliśmy: 52 orły i 48 reszek.

Czy nasze wyniki są zgodne z modelem teoretycznym (wartością oczekiwaną)? W celu sprawdzenia przeprowadzamy test chi kwadrat

Test χ^2

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(O-E)^2}{E}$$

PRZYKŁAD 1 – RZUT MONETĄ

- $\chi 2$ - wartość statystyki 'chi kwadrat'
- O - częstość obserwowana - (observed frequency)
- E - częstość oczekiwana - (expected frequency)

OBLICZANIE CHI KWADRAT - KROKI

1) Odejmujemy oczekiwane frekwencje od obserwowanych
2) Podnosimy do kwadratu
3) Dzielimy przez wartość oczekiwaną
4)Liczymy stopnie swobody (w tym wypadku liczba kategorii (orzeł/reszka) -1)

	Orzeł	Reszka	Suma
Wartość otrzymana (O)	52	48	100
Wartość oczekiwana (E)	50	50	50
Różnica (O-E)	2	-2	0
Kwadrat różnicy $(O-E)^2$	4	4	0
Iloraz kwadratu różnicy $\frac{(O-E)^2}{E}$	4/50=0,08	4/50=0,08	0,16

Chi kwadrat = 0,16

Df = 2-1=1

równanie więzów

2 biny!
$n=n_1+n_2$
100=48+52

Test χ^2 dobroci dopasowania

Porównujemy nasz wynik z wartościami krytycznymi rozkładu chi kwadrat (odcinającymi obszar krytyczny oznaczany przez alfę, tj. obszary odrzucenia/nieodrzucenia) odpowiadającym liczbie stopni swobody i poziomowi prawdopodobieństwa z jakim chcemy wnioskować.

Tablica wartości krytycznych dla wartości chi kwadrat

n/α	0,995	0,99	0,98	0,975	0,97	0,96	0,95	0,9	0,1	0,05	0,04	0,03	0,025	0,02	0,01	0,005
1	0,0000	0,0002	0,0006	0,0010	0,0014	0,0025	0,0039	0,0158	2,7055	$\boxed{3,8415}$	4,2179	4,7093	5,0239	5,4119	6,6349	7,8794
2	0,0100	0,0201	0,0404	0,0506	0,0609	0,0816	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	6,4378	7,0131	7,3778	7,8240	9,2103	10,5966
3	0,0717	0,1148	0,1848	0,2158	0,2451	0,3002	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	8,3112	8,9473	9,3484	9,8374	11,3449	12,8382
4	0,2070	0,2971	0,4294	0,4844	0,5351	0,6271	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	10,0255	10,7119	11,1433	11,6678	13,2767	14,8603
5	0,4117	0,5543	0,7519	0,8312	0,9031	1,0313	1,1455	1,6103	9,2364	11,0705	11,6443	12,3746	12,8325	13,3882	15,0863	16,7496
6	0,6757	0,8721	1,1344	1,2373	1,3296	1,4924	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	13,1978	13,9676	14,4494	15,0332	16,8119	18,5476
7	0,9893	1,2390	1,5643	1,6899	1,8016	1,9971	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	14,7030	15,5091	16,0128	16,6224	18,4753	20,2777
8	1,3444	1,6465	2,0325	2,1797	2,3101	2,5366	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	16,1708	17,0105	17,5345	18,1682	20,0902	21,9550
9	1,7349	2,0879	2,5324	2,7004	2,8485	3,1047	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	17,6083	18,4796	19,0228	19,6790	21,6660	23,5894
10	2,1559	2,5582	3,0591	3,2470	3,4121	3,6965	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	19,0207	19,9219	20,4832	21,1608	23,2093	25,1882
11	2,6032	3,0535	3,6087	3,8157	3,9972	4,3087	4,5748	5,5778	17,2750	19,6751	20,4120	21,3416	21,9200	22,6179	24,7250	26,7568
12	3,0738	3,5706	4,1783	4,4038	4,6009	4,9385	5,2260	6,3038	18,5493	21,0261	21,7851	22,7418	23,3367	24,0540	26,2170	28,2995
13	3,5650	4,1069	4,7654	5,0088	5,2210	5,5838	5,8919	7,0415	19,8119	22,3620	23,1423	24,1249	24,7356	25,4715	27,6882	29,8195
14	4,0747	4,6604	5,3682	5,6287	5,8556	6,2426	6,5706	7,7895	21,0641	23,6848	24,4855	25,4931	26,1189	26,8728	29,1412	31,3193
15	4,6009	5,2293	5,9849	6,2621	6,5032	6,9137	7,2609	8,5468	22,3071	24,9958	25,8162	26,8479	27,4884	28,2595	30,5779	32,8013

(…)

0,16<3,8415 → nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

Metoda najmniejszych kwadratów
(least squares method)

Metoda najmniejszych kwadratów

- Jedną z najważniejszych metod estymacji parametrów jest zaproponowana przez Legendre'a i Gaussa
- Metoda ta jest szczególnym przypadkiem ogólniejszej metody największej wiarygodności (można ją z niej wyprowadzić)
- Założenia:
  - wynik pomiaru y_j przedstawiamy jako sumę nieznanej wielkości x oraz niepewności pomiarowej ε_j: $y_j = x + \epsilon_j$
  - dobieramy wielkości ε_j tak, aby ich **suma kwadratów** była najmniejsza: $\sum_j \epsilon_j^2 = \sum_j (x - y_j)^2 = min$
- Metoda ta może być również użyta, gdy wielkości y_j nie są wprost związane z x, lecz są to na przykład kombinacje liniowe (lub nieliniowe) wielu zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- **Warto przejrzeć rozdział o MNK w podręczniku Brandta, gdzie jest to wszystko bardzo dokładnie omówione**

Pomiary bezpośrednie

- Przedstawione wyżej założenia to najprostszy przypadek **pomiaru bezpośredniego o równej dokładności**
- Wykonujemy n pomiarów nieznanej wielkości x (np. długość stołu). Wyniki pomiarów obarczone są niepewnościami ε_j o których zakładamy, że opisane są rozkładem normalnym z wartością średnią równą zeru:

$$y_j = x + \epsilon_j \qquad E(\epsilon_j) = 0 \qquad E(\epsilon_j^2) = \sigma^2$$

- Zatem prawdopodobieństwo uzyskania wartości y_j jako wyniku pojedynczego pomiaru (wewnątrz małego przedziału $\mathrm{d}y$) wynosi:

$$f_j\, dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_j - x)^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

- Logarytmiczna funkcja wiarygodności (dla n pomiarów):

$$l = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (y_j - x)^2 + const$$

- Oczywiście, szukamy maksimum funkcji (warunek wiarygodności)

Pomiary bezpośrednie

- Możemy zauważyć, że warunek ten jest równoważny warunkowi (**najmniejszych kwadratów**):

$$M=\sum_{j=1}^{n}(y_j-x)^2=\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j^2=min$$

- W tym przypadku estymatory:

$$\tilde{x}=\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}y_j \qquad \sigma^2(\bar{y})=\sigma^2/n$$

- W ogólniejszym przypadku, gdy mamy **różne dokładności** wyników pomiaru σ_j:

$$y_j=x+\epsilon_j \qquad E(\epsilon_j)=0 \qquad E(\epsilon_j^2)=\sigma_j^2=1/g_j$$

- **Wówczas warunek najmniejszych kwadratów wymaga dodatkowej wagi:**

$$M=\sum_{j=1}^{n}\frac{(y_j-x)^2}{\sigma_j^2}=\sum_{j=1}^{n}g_j(y_j-x)^2=\sum_{j=1}^{n}g_j\epsilon_j^2=min$$

- Wtedy estymatory:

$$\tilde{x}=\frac{\sum_{j=1}^{n}g_j y_j}{\sum_{j=1}^{n}g_j} \qquad \sigma^2(\tilde{x})=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sigma_j^2}\right)^{-1}=\left(\sum_{j=1}^{n}g_j\right)^{-1} \qquad \boxed{\tilde{\epsilon}_j=y_j-\tilde{x}}$$

Średnia ważona z pomiarów o różnej dokł.

- Spodziewamy się, że wielkość $\tilde{\epsilon}_j = Y_j - \tilde{x}$ ma rozkład normalny z wartością średnią 0 i wariancją σ_j:
- Oczywiście wtedy wielkość $\tilde{\epsilon}_j / \sigma_j$ ma standardowy rozkład Gaussa
- Co to oznacza już dobrze wiemy, suma:
- Ma znany już nam rozkład χ^2 o n-1 stopniach swobody

$$M = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\tilde{\epsilon}_j}{\sigma_j} \right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{Y_j - \tilde{x}}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^{n} g_j (Y_j - \tilde{x})^2$$

- **Przykład:** średnia ważona z pomiarów o różnej dokładności
  – obliczamy wartość stałej ficzycznej (np. masy neutralnej cząstki K) poprzez średnią ważoną otrzymaną w różnych grupach eksperymentalnych

$$M = 7{,}2, \text{liczba st. swob. } n = 4 - 1 = 3, \alpha = 0.05, \chi^2_{0{,}95} = 7{,}82$$

$$\tilde{x} = \sum_{j=1}^{4} \frac{Y_j g_j}{g_j} = 497{,}9$$

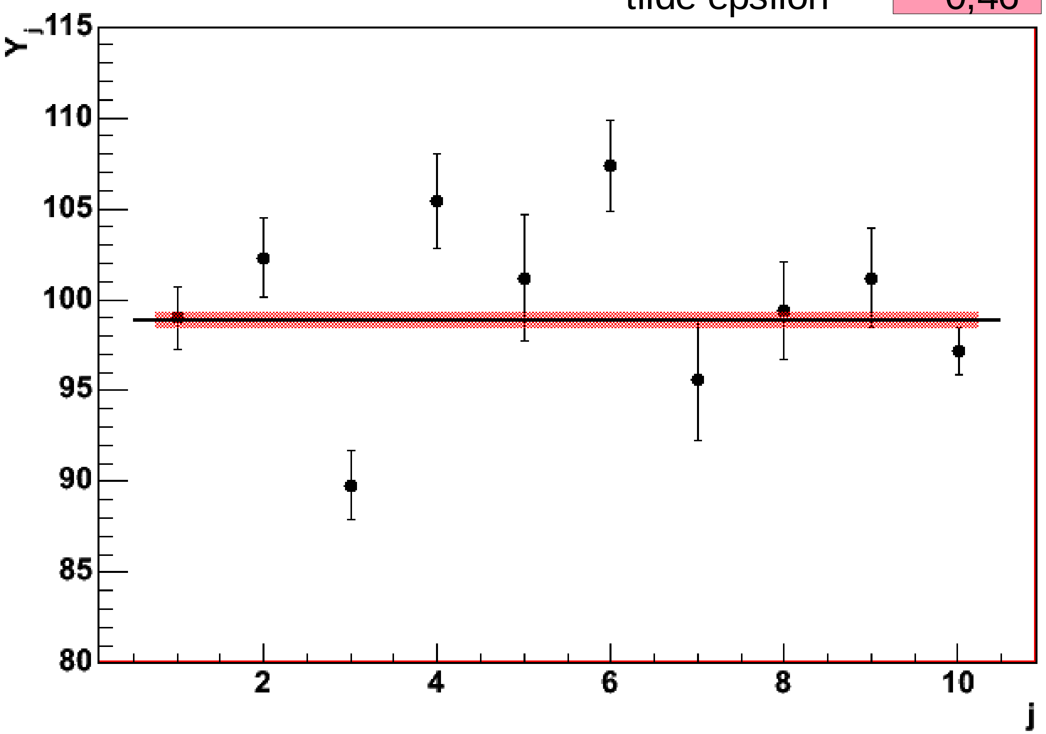
$$u(\tilde{x}) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{x})} = \left(\sum_{j=1}^{4} g_j \right)^{-1/2} = 0{,}2$$

j	y_j	σ_j	$g_j = 1/\sigma_j^2$	$y_j g_j$	$y_j - \tilde{x}$	$(y_j - \tilde{x})^2 g_j$
1	498.1	0.4	6.3	3038.0	0.2	0.3
2	497.4	0.33	10	4974.4	-0.46	2.1
3	498.9	0.5	4	1995.6	1.0	4.0
4	497.4	0.5	4	1989.8	-0.46	0.8
∑			24.3	11997.8		7.2

Średnia ważona z pomiarów o różnej dokł.

nr pomiaru	Yj	sigma_j	sigma_j^2	g_j	g_j x_j	Y_j – tilde x	e^2	e^2*g_j
1	99	1,7	2,89	0,35	34,26	0,19	0,04	0,01
2	102,3	2,2	4,84	0,21	21,14	3,49	12,19	2,52
3	89,8	1,9	3,61	0,28	24,88	-9,01	81,15	22,48
4	105,4	2,6	6,76	0,15	15,59	6,59	43,45	6,43
5	101,2	3,5	12,25	0,08	8,26	2,39	5,72	0,47
6	107,4	2,5	6,25	0,16	17,18	8,59	73,81	11,81
7	95,6	3,3	10,89	0,09	8,78	-3,21	10,29	0,95
8	99,4	2,7	7,29	0,14	13,64	0,59	0,35	0,05
9	101,2	2,7	7,29	0,14	13,88	2,39	5,72	0,78
10	97,2	1,3	1,69	0,59	57,51	-1,61	2,59	1,53

	sum(g_j)	2,18	
Ilość pomiarów 10	sum(x_j g_j)	215,12	M 47,02
	tilde x	98,81	
	tilde epsilon	0,46	



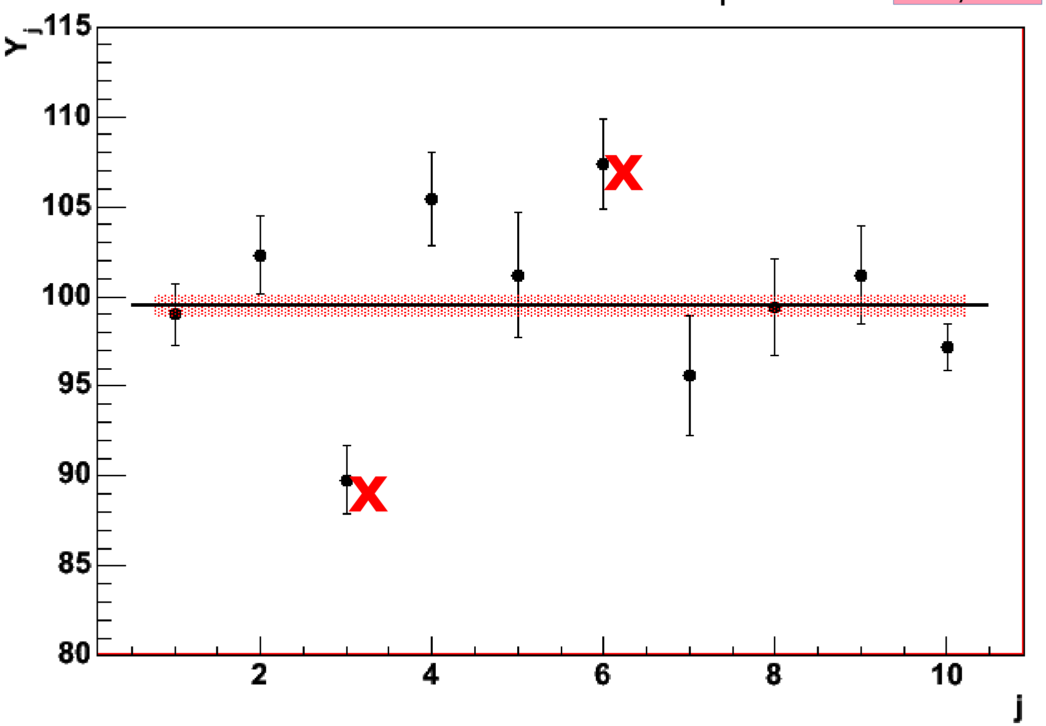
- Przeprowadzając test χ^2 na M widzimy, że hipotezę należy odrzucić:

Kwantyle:

$$\chi^2_{0,9}(9)=14,7$$
$$\chi^2_{0,95}(9)=16,9$$
$$\chi^2_{0,99}(9)=21,7$$

Przykład – odrzucenie pomiarów

nr pomiaru	Yj	sigma_j	sigma_j^2	g_j	g_j x_j	Y_j – tilde x	e^2	e^2*g_j
1	99	1,7	2,89	0,35	34,26	0,19	0,04	0,01
2	102,3	2,2	4,84	0,21	21,14	3,49	12,19	2,52
~~3~~								
4	105,4	2,6	6,76	0,15	15,59	6,59	43,45	6,43
5	101,2	3,5	12,25	0,08	8,26	2,39	5,72	0,47
~~6~~								
7	95,6	3,3	10,89	0,09	8,78	-3,21	10,29	0,95
8	99,4	2,7	7,29	0,14	13,64	0,59	0,35	0,05
9	101,2	2,7	7,29	0,14	13,88	2,39	5,72	0,78
10	97,2	1,3	1,69	0,59	57,51	-1,61	2,59	1,53
			sum(g_j)	1,74				
Ilość pomiarów	10		sum(x_j g_j)	173,06			M	12,73
			tilde x	99,45				
			tilde epsilon	0,57				



- Odrzucając pomiary najbardziej odbiegające od średniej mamy wynik spełniający test χ^2:

Kwantyle:

$$\chi^2_{0,9}(7)=12,02$$

$$\chi^2_{0,95}(7)=14,07$$

$$\chi^2_{0,99}(7)=18,47$$

Pomiary pośrednie – przypadek liniowy

- Rozważymy teraz bardziej ogólny przypadek wielu (r) nieznanych wielkości x_i ($i=1,2,\ldots,r$) **mierzonych pośrednio**
- Interesujące nas wielkości fizyczne x nie podlegają pomiarom bezpośrednim, mierzymy natomiast liniowe kombinacje wielkości x_i mierzonych już bezpośrednio wielkości η_j:

$$\eta_j = p_{j0} + p_{j1} x_1 + p_{j2} x_2 + \ldots + p_{jr} x_r \qquad j=1,2,\ldots,n$$

wielkości mierzonych bezpośrednio

- Dla uproszczenia rachunków, można to zapisać inaczej:

$$f_j = \eta_j + a_{j0} + a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \ldots + a_{jr} x_r = 0$$

- W postaci wektorowej:

$$\boldsymbol{a_j} = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \ldots \\ a_{jr} \end{pmatrix} \qquad f_j = \eta_j + a_{j0} + \boldsymbol{a_j}^T \boldsymbol{x} = 0 \qquad j=1,2,\ldots,n$$

- Jeśli wszystko zdefiniujemy wektorowo:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_{j1} \\ \eta_{j2} \\ \ldots \\ \eta_{jr} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_0 = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \ldots \\ a_{n0} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nr} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{a}_0 + A\boldsymbol{x} = 0$$

http://www.if.pw.edu.pl/~majanik/files/wiel.ps

Pomiary pośrednie – przypadek liniowy

- Rozważymy teraz bardziej ogólny przypadek wielu (r) nieznanych wielkości x_i ($i=1,2,\ldots,r$) **mierzonych pośrednio**

- Interesujące nas wielkości fizyczne x nie podlegają pomiarom bezpośrednim, mierzymy natomiast liniowe kombinacje wielkości x_i mierzonych już bezpośrednio wielkości η_j:

$$\eta_j = p_{j0} + p_{j1}x_1 + p_{j2}x_2 + \ldots + p_{jr}x_r \qquad j=1,2,\ldots,n$$

wielkości mierzonych bezpośrednio

- Dla uproszczenia rachunków, można to zapisać inaczej:

$$f_j = \eta_j + a_{j0} + a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jr}x_r = 0$$

- W postaci wektorowej:

$$\boldsymbol{a_j} = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \ldots \\ a_{jr} \end{pmatrix} \qquad f_j = \eta_j + a_{j0} + \boldsymbol{a_j}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} = 0$$

$$j=1,2,\ldots,n$$

- Jeśli wszystko zdefiniujemy wektorowo:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_{j1} \\ \eta_{j2} \\ \ldots \\ \eta_{jr} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_0 = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \ldots \\ a_{n0} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nr} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{a}_0 + A\boldsymbol{x} = 0$$

Pomiary pośrednie – przypadek liniowy

- Oczywiście nadal zakładamy, że każdy pomiar obarczony jest niepewnością o rozkładzie normalnym:

$$y_j = \eta_j + \epsilon_j, \quad E(\epsilon_j) = 0, \quad E(\epsilon_j^2) = \sigma_j^2 = 1/g_j \qquad\qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

- Ponieważ zmienne y_j są zmiennymi niezależnymi, możemy wariancje przedstawić w postaci diagonalnej macierzy kowariancji:

$$C_y = C_\epsilon = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \qquad G_y = G_\epsilon = C_y^{-1} = C_\epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_n \end{pmatrix}$$

- Wstawiając $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon}$ do wzoru $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{a}_0 + A\boldsymbol{x} = 0$ otrzymujemy:

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{a}_0 + A\boldsymbol{x} = 0$$

- Rozwiązujemy ten układ ze względu na $\boldsymbol{x}$ stosując metodę największej wiarygodności (zakładając rozkład normalny pomiarów y_j). Wtedy:

$$M = \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon_j^2}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(y_j + \boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{x} + a_{j0}\right)}{\sigma_j^2} = \boldsymbol{\epsilon}^T G_y \boldsymbol{\epsilon} = \left(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}_0 + A\boldsymbol{x}\right)^T G_y \left(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}_0 + A\boldsymbol{x}\right) = min$$

Pomiary pośrednie – przypadek liniowy

- Jeśli wprowadzimy: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}_0$
- Wówczas: $M = (\boldsymbol{c} + A\,\boldsymbol{x})^T G_y (\boldsymbol{c} + A\,\boldsymbol{x}) = min$
- Można to dalej uprościć:

$$G_y = H^T H \qquad H = H^T = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma_n \end{pmatrix}$$

- Jeśli teraz wprowadzimy: $\boldsymbol{c}' = H\,\boldsymbol{c} \quad A' = H\,A$
- Wówczas warunek nam się upraszcza: $M = (A'\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}')^2 = min$
- Po rozwiązaniu dostajemy:

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = -A^{+'}\boldsymbol{c}'$$

- W praktyce używamy wzoru: $\tilde{\boldsymbol{x}} = -(A'^T A')^{-1} A^T \boldsymbol{c}' = -(A^T G_y A) A^T G_y \boldsymbol{c}$
- Żeby wyznaczyć niepewności pomiarowe musimy policzyć macierz kowariancji: $G_{\tilde{x}}^{-1} = (A^T G_y A)^{-1} = (A'^T A')^{-1}$
- Pierwiaski kwadratowe z elementów diagonalnych to niepewności pomiarowe $\tilde{\boldsymbol{x}}$ (mimo, że $\boldsymbol{x}$ <u>nie podlegało bezpośredniemu pomiarowi</u>)

Pomiary pośrednie – przypadek liniowy

- Dla pomiarów bezpośrednich η_j:

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = A\tilde{\boldsymbol{x}} + c = -A(A^T G_y A)^{-1} A^T G_y c + c$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{y} - \tilde{\epsilon} = \boldsymbol{y} + A(A^T G_y A)^{-1} A^T G_y c - c$$ - pomiary “poprawione”

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = A(A^T G_y A)^{-1} A^T G_y c - a_0$$

$$G_{\tilde{\eta}}^{-1} = A(A^T G_y A)^{-1} A^T = A G_{\tilde{x}}^{-1} A^T$$

- Wzór $\eta_j = p_{j0} + p_{j1} x_1 + p_{j2} x_2 + \ldots + p_{jr} x_r$ będzie również prawdziwy dla estymatorów

Pomiary pośrednie – przypadek liniowy

- **Przykład:** dopasowanie prostej do zbioru pomiarów
  - mamy pomiary y_j zależne od pewnej zmiennej kontrolnej t_j (np. czasu)
  - zakładamy, że wartości zmiennej kontrolnej są dokładnie znane (zaniedbywane niepewności) – inaczej przypadek nieliniowy
  - zakładamy liniową postać: $\eta_j = y_j - \epsilon_j = x_1 + x_2 t_j$
  - i szukamy wielkości x mierzonych pośrednio
  - posługując się notacją macierzową: $\boldsymbol{\eta} - x_1 - x_2 \boldsymbol{t} = 0$ $\qquad \boldsymbol{a}_0 = 0$
  - czyli szukamy ostatecznie wektor: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
  - wyniki pomiarów:

j	0	1	2	3
t_j	0.0	1.0	2.0	3.0
y_j	1.4	1.5	3.7	4.1
σ_j	0.5	0.2	1.0	0.5

Pomiary pośrednie – przypadek liniowy

- Obliczenia:

$$A = -\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} = -\begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.5 \\ 3.7 \\ 4.1 \end{pmatrix}$$

$$G_y = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A' = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 5 \\ 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c}' = -\begin{pmatrix} 2.8 \\ 7.5 \\ 3.7 \\ 8.2 \end{pmatrix} \qquad A'^T \boldsymbol{c}' = -\begin{pmatrix} 62.2 \\ 94.1 \end{pmatrix}$$

Pomiary pośrednie – przypadek liniowy

- Obliczenia c.d.:

$$(A'^T A')^{-1} = -\begin{pmatrix} 34 & 39 \\ 39 & 65 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{689}\begin{pmatrix} 65 & -39 \\ -39 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0943 & -0.0556 \\ -0.0556 & 0.0493 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = -(A'^T A')^{-1} A^T \boldsymbol{c}' = -(A^T G_y A) A^T G_y \boldsymbol{c}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0.0943 & -0.0556 \\ -0.0556 & 0.0493 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 63.2 \\ 94.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.636 \\ 1.066 \end{pmatrix}$$

$$C_{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 0.0943 & -0.0556 \\ -0.0556 & 0.0493 \end{pmatrix} \qquad u(\tilde{x}_1) = 0.307 \qquad u(\tilde{x}_2) = 0.222$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = -A\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0.636 \\ 1.702 \\ 2.768 \\ 3.834 \end{pmatrix}$$

- Zminimalizowana suma kwadr.:

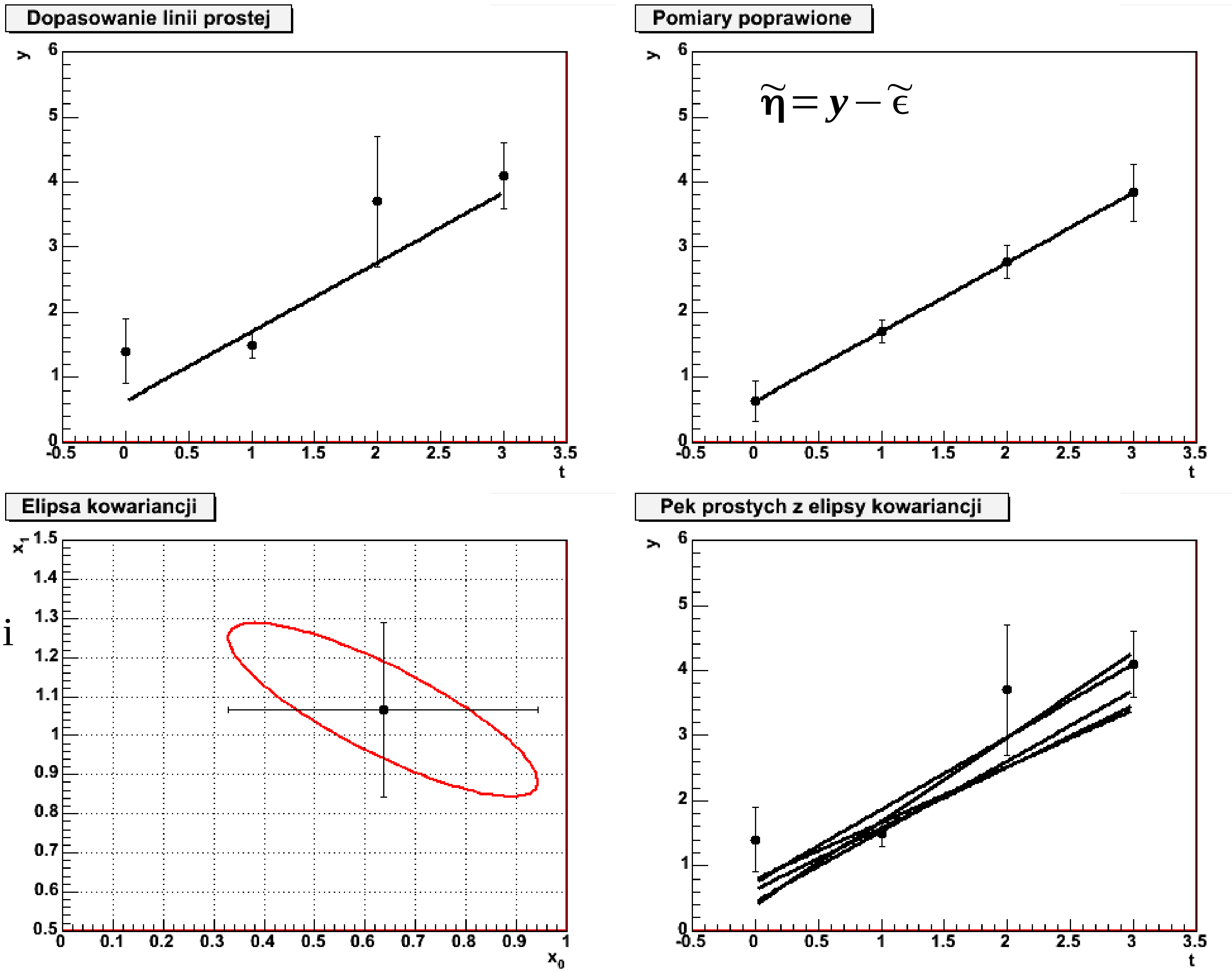
$$M = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j - \tilde{\eta}_j}{\sigma_j}\right)^2 = 4.507$$

N= 4 pomiary, 2 parametry, co daje
n-2 = r =2 stopnie swobody.
Zakładając poziom istotności 5% z tabel X^2:
$X^2_{0.95}$ = 5.99.
<u>Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.</u>

Pomiary pośrednie – przypadek liniowy

- Wykresy:

elipsa kowariancji
z macierzy kowariancji
$C_{\tilde{x}}$



Dopasowanie wielomianu

- Poprzedni przykład można uogólnić na wielomian wyższego rzędu:

$$\eta_j = h_j = x_1 + x_2 t_j + x_3 t_j^2 + \ldots + x_r t_j^{r-1}$$

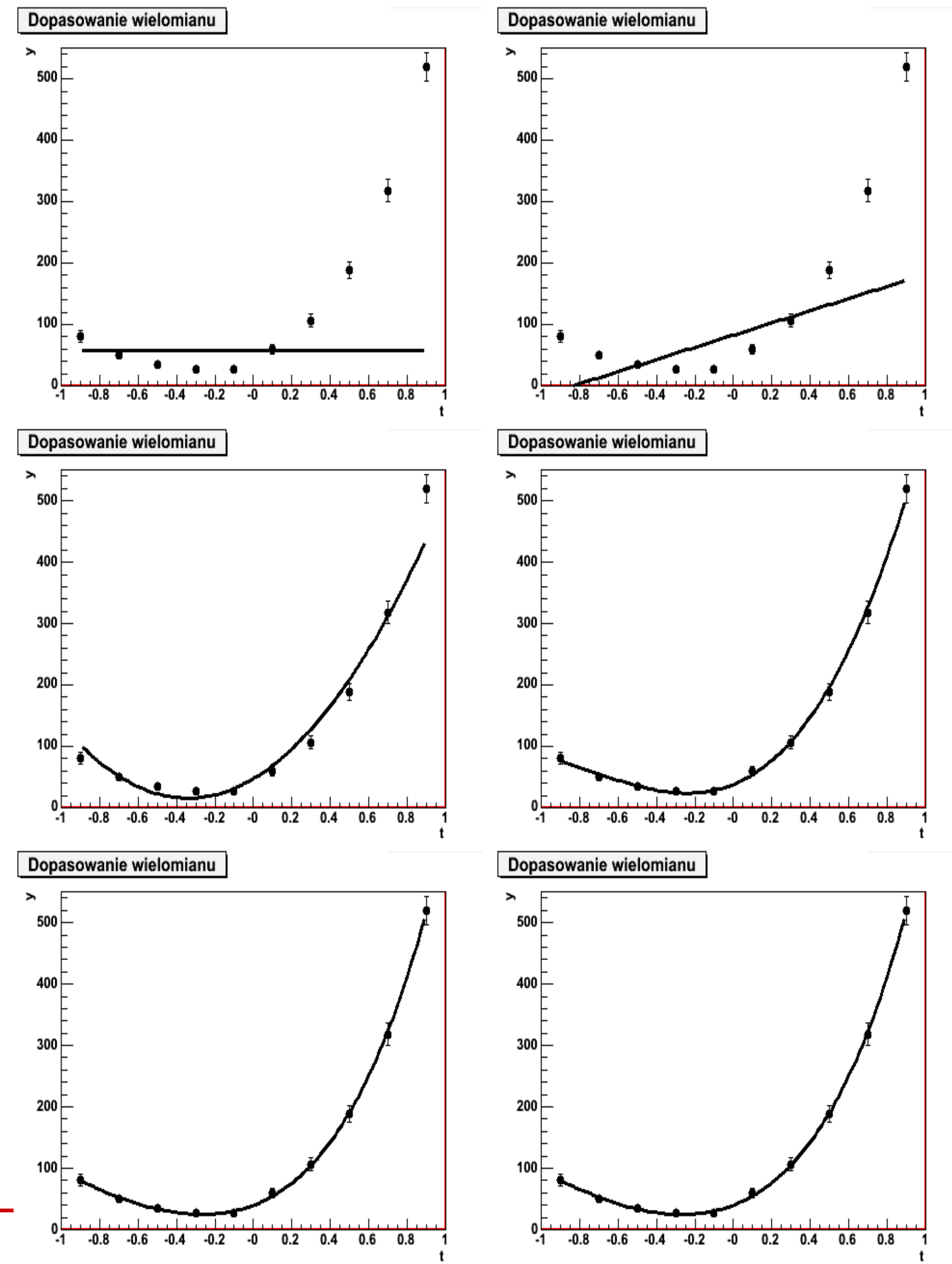
$$\boldsymbol{a_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{r-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^{r-1} \end{pmatrix}$$

- Pomiary:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_j	-0,9	-0,7	-0,5	-0,3	-0,1	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
y_j	81	50	35	27	26	60	106	189	318	520

- Wynik:

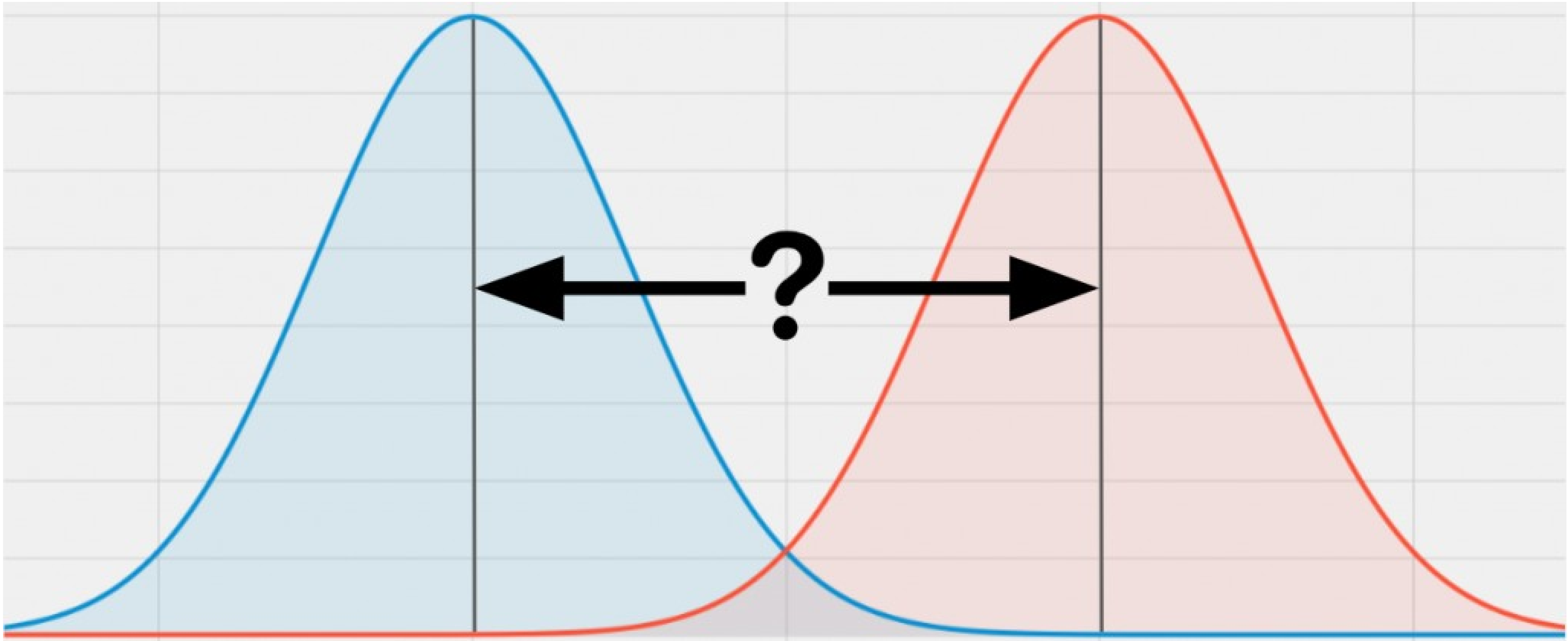
r	~x_1	~x_2	~x_3	~x_4	~x_5	~x_6	f	M
1	57,85						9	833,55
2	82,66	99,1					8	585,45
3	47,27	185,96	273,61				7	36,41
4	37,95	126,55	312,02	137,59			6	2,85
5	39,62	119,1	276,49	151,91	52,6		5	1,69
6	39,88	121,38	273,19	136,57	56,9	16,73	4	1,66



Wersje testu t-Studenta

Test wartości średnich (t-Studenta)

- Na poprzednim wykładzie wprowadziliśmy jeden przykładowy test t-Studenta na porównanie średnich populacji z **prób niezależnych**



Test wartości średnich (t-Studenta)

- Na poprzednim wykładzie wprowadziliśmy jeden przykładowy test t-Studenta na porównanie średnich populacji z **prób niezależnych**

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}}$$

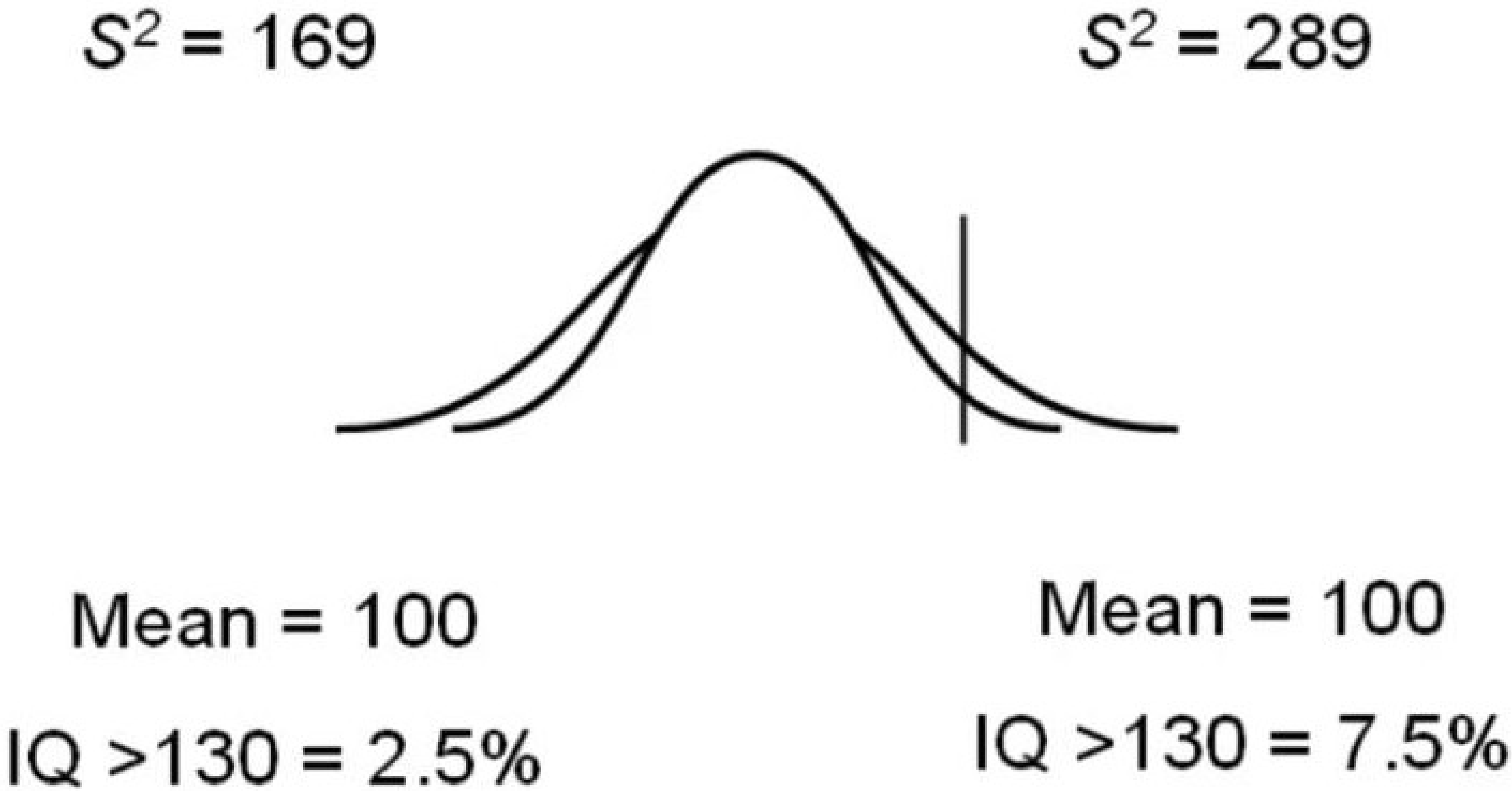
Gdzie $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ – średnie odpowiednio 1 i 2 grupy,

s_1^2, s_2^2 - odchylenia standardowe odpowiednio grup 1 i 2.

n_1, n_2 – liczebności grup 1 i 2,

- Tego typu test ma pewne założenia:
  - rozkład obu grup jest normalny
  - grupy powinny być równoliczne
  - spełniona powinna być **jednorodność** (homogeniczność) wariancji – grupy powinny mieć podobne wariancje
- Testy t są **odporne** na niespełnienie założeń (np. rozkład nie musi być normalny, ale musi grupy muszą być liczne i rozkład musi być symetryczny)

Jak sprawdzić jednorodność wariancji?



Wariancje grup nie są jednorodne!

Jak sprawdzić jednorodność wariancji?

- Istnieje kilka różnych testów na równość wariancji (pokazywaliśmy test F na poprzednich zajęciach)
- Często do zbadania jednorodności wariancji używana jest jego wariancja nazywana testem **Levene'a**

H_0: wariancje w grupach są równe;

H_A: wariancje w grupach istotnie się od siebie różnią.

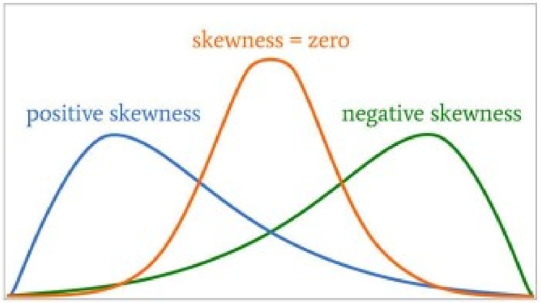
Wzór na test Levene'a dany jest wzorem:

$$F = \frac{(N-k)\sum_{i=1}^{k} N_i (Z_{i.} - Z_{..})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}(Z_{ij} - Z_{i.})^2}$$

Gdzie k- liczba grup, N- liczba obserwacji, N_i- liczba obserwacji w i-tej grupie, Z_{ij}- wartość bezwzględna z różnicy między j-tą obserwacją w i-tej grupie a średnią w tej grupie, $Z_{..} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i} Z_{ij}$ – średnia dla wszystkich obserwacji, $Z_{i.} = \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} Z_{ij}$ – średnia dla obserwacji w i-tej grupie. Homogeniczność wariancji jest jednym z założeń przy wykonywaniu testów parametrycznych.

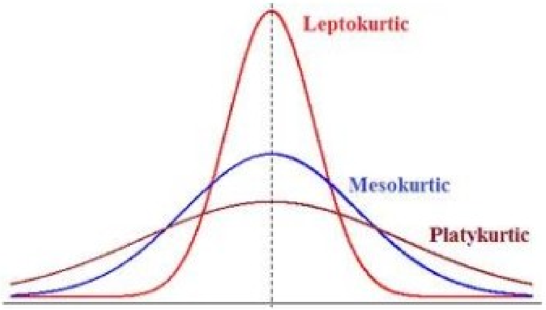
Jak sprawdzić normalność rozkładu?

Badanie normalności rozkładu na podstawie skośności i kurtozy



- W rozkładzie normalnym:

skośność = 0 → wyniki ujemne – rozkład lewoskośny, wyniki dodatnie – rozkład prawoskośny



kurtoza = 0 → wyniki ujemne – rozkład platykurtyczny,
wyniki dodatnie – rozkład leptokurtyczny
rozkład normalny – mezokurtyczny

Jakie współczynniki jesteśmy w stanie zaakceptować, żeby przyjąć rozkład jako normalny?

Zależy od autorów, najbardziej liberalne podejście to wartości obu statystyk w przedziale <-3 ; 3> (najczęściej <-2; 2>)

Jak sprawdzić normalność rozkładu?

Ocena normalności rozkładu na podstawie testów statystycznych

Hipotezy w testach normalności rozkładu:

Hipoteza zerowa: Brak różnic między rozkładem wyników w próbie a rozkładem normalnym

Hipoteza alternatywna: Jest różnica między rozkładem wyników w próbie a rozkładem normalnym

Zależy nam na tym, żeby rozkład w naszej próbie był normalny, więc w tym wypadku **bardzo nie chcemy odrzucać hipotezy zerowej.**

UWAGA: Jest to sytuacja odwrotna niż zwykle, zazwyczaj chcemy odrzucić hipotezę zerową, by przyjąć hipotezę alternatywną - badawczą

Test Shapiro-Wilka

Załóżmy, że pobraliśmy próbę $x_1, \ldots, x_n$ i chcemy sprawdzić czy pochodzi z rozkładu normalnego. Hipoteza zerowa i alternatywna w teście **Shapiro-Wilka** ma następującą postać:

H_0: Próba pochodzi z populacji o rozkładzie normalnym

H_1: Próba nie pochodzi z populacji o rozkładzie normalnym.

W celu przeprowadzenia testu wykorzystuje się statystykę W:

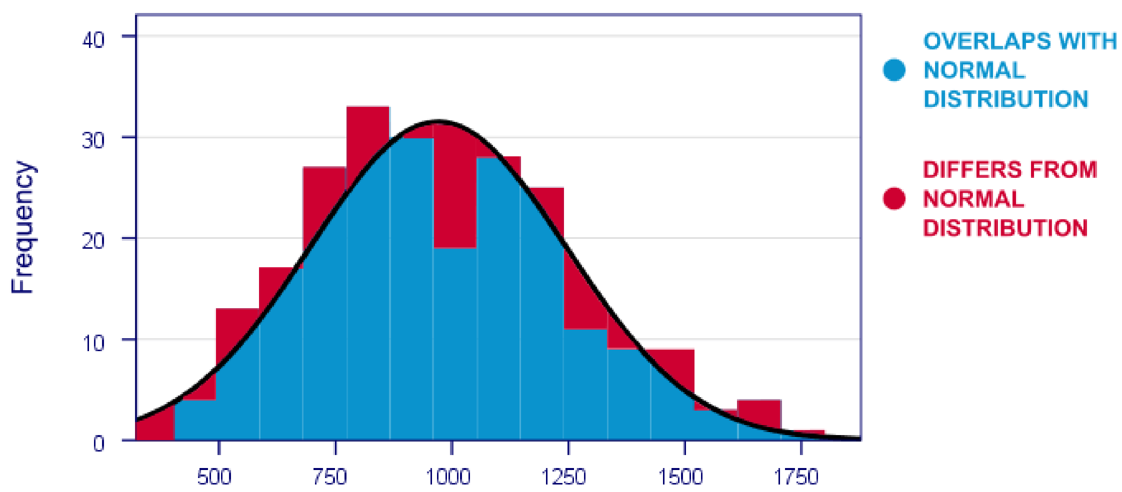
- Uporządkuj obserwacje niemalejąco: $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$
- Oblicz: $S^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
- Jeżeli n jest parzyste, niech $m = \frac{n}{2}$, w przeciwnym razie $m = \frac{n-1}{2}$
- Używając stabelaryzowanych wartości a_i oblicz $b = \sum_{i=1}^{m} a_i(y_{n+1-i} - y_i)$
- Oblicz statystykę $W = \frac{b^2}{S^2}$
- Porównaj wynik ze stabelaryzowanymi wartościami dla odpowiednich poziomów ufności i liczebności próby.

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} a_i(n)(\tilde{x}_{n-i+1} - \tilde{x}_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Gdzie $a_i(n)$- współczynniki testu podane w tablicach,

n-liczebność, $\bar{x}$- średnia.

SHAPIRO-WILK NORMALITY TEST



OBSERVED DISTRIBUTION FOLLOWS THEORETICAL DISTRIBUTION?

Inne warianty testu t

- **Test t-Studenta dla jednej próby**
  - pozwala porównać średnią w próbie ze średnią w populacji, sprawdzić istotność statystyczną tej różnicy

Inne warianty testu t

- **Test t-Studenta dla jednej próby**
  - pozwala porównać średnią w próbie ze średnią w populacji, sprawdzić istotność statystyczną tej różnicy

Test weryfikuje hipotezę:

H_0: nie ma różnic między średnią z próby a średnią teoretyczną;

H_A: występują istotne statystycznie różnice między średnią z próby a średnią teoretyczną.

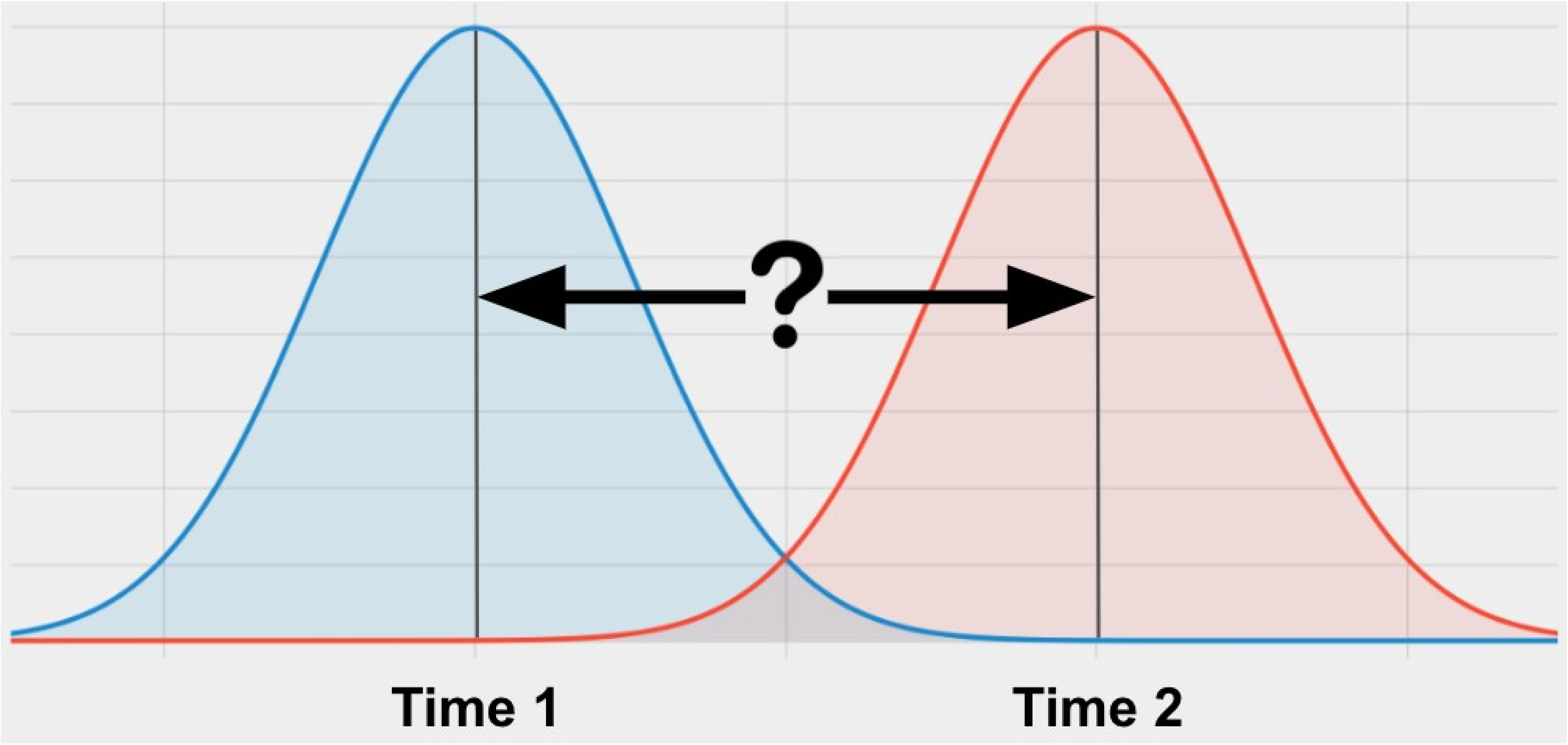
Wzór na ten test dany jest równaniem:

$$t = \frac{\bar{x} - m}{s}\sqrt{n}$$

Gdzie $\bar{x}$- średnia z próby, m- średnia teoretyczna, s- wariancja z próby, n- liczebność próby.

Inne warianty testu t

- **Test t-Studenta dla prób zależnych**
  - gdy chcemy porównać średnie populacji jednej grupy, gdy jakąś cechę mierzyliśmy dwa razy (np. w odstępach czasu)



Inne warianty testu t

- **Test t-Studenta dla prób zależnych**
  - gdy chcemy porównać średnie populacji jednej grupy, gdy jakąś cechę mierzyliśmy dwa razy (np. w odstępach czasu)

Test weryfikuje hipotezę:

H_0: nie ma różnic między średnimi w obu pomiarach;

H_A: występują istotne statystycznie różnice między średnimi w dwóch pomiarach.

Wzór na ten test dany jest równaniem:

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d}\sqrt{n}$$

Gdzie $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - x_{2i})$; $s_d = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - x_{2i} - \bar{d})^2}$.

Podsumowanie testów t-Studenta

- **Test t-Studenta dla pojedynczej próby**

$$t = \frac{\bar{x} - m}{s}\sqrt{n}$$

Gdzie $\bar{x}$- średnia z próby, m- średnia teoretyczna, s- wariancja z próby, n- liczebność próby.

- **Test t-Studenta dla prób niezależnych**

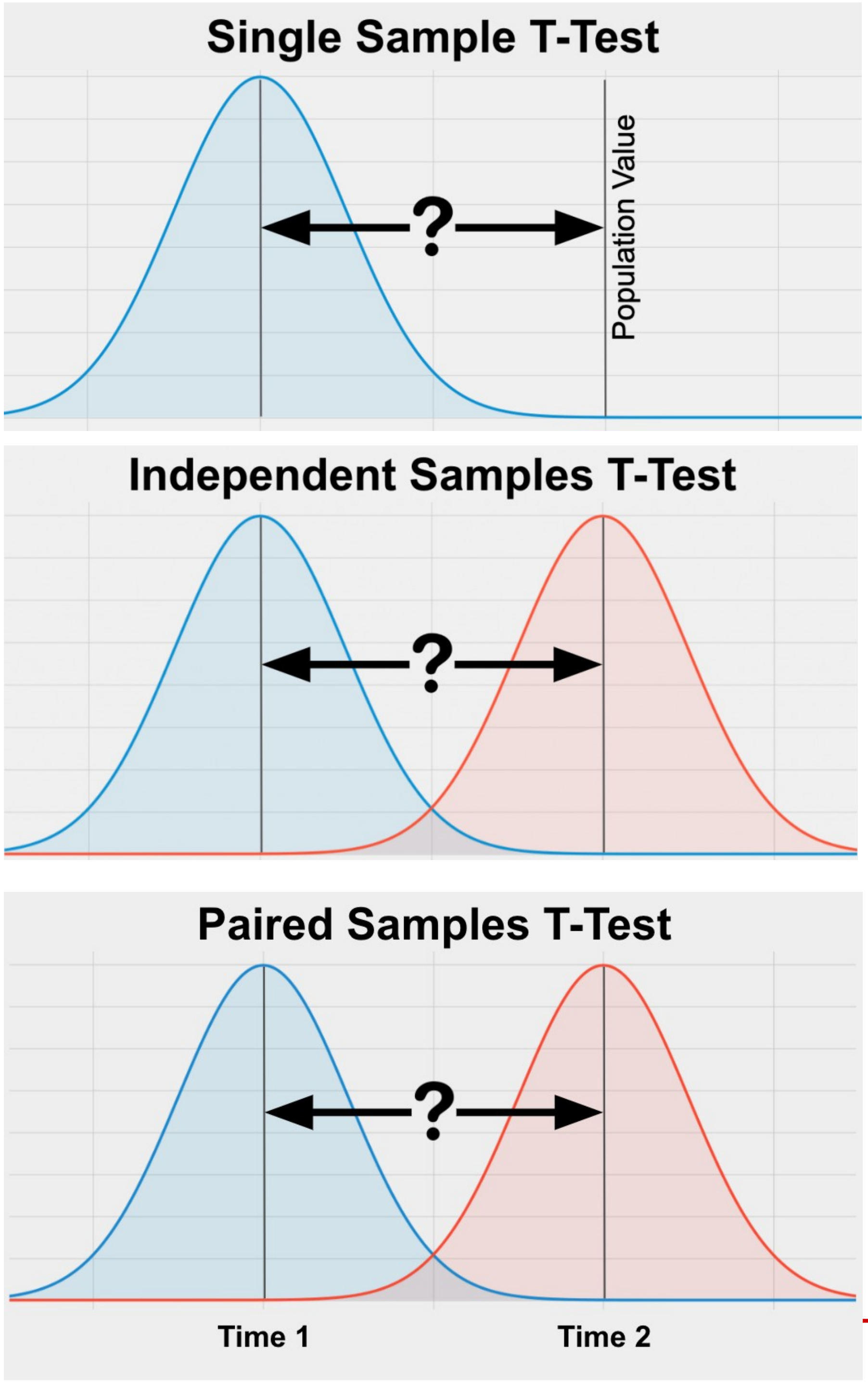
$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}}$$

Gdzie $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ – średnie odpowiednio 1 i 2 grupy, s_1^2, s_2^2- odchylenia standardowe odpowiednio grup 1 i 2. n_1, n_2 – liczebności grup 1 i 2.

- **Test t-Studenta dla prób zależnych**

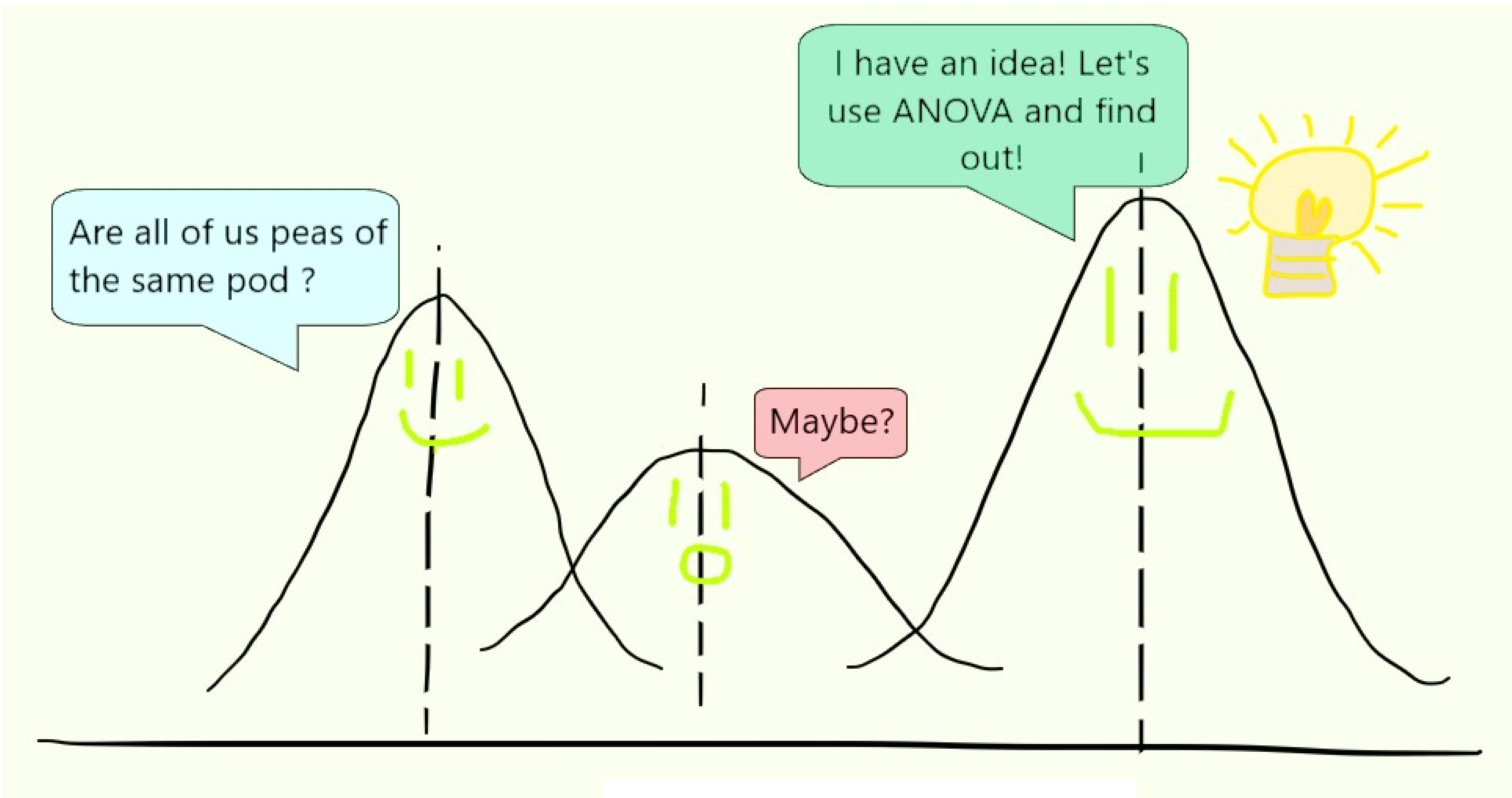
$$t = \frac{\bar{d}}{s_d}\sqrt{n}$$

Gdzie $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - x_{2i})$; $s_d = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - x_{2i} - \bar{d})^2}$.



Co zrobić jeżeli chcemy porównać średnie z więcej niż dwóch grup?

ANOVA


Are all of us peas of the same pod ?
Maybe?
I have an idea! Let's use ANOVA and find out!

Analiza wariancji (ANOVA – Analysis Of VAriance)

Testy t-Studenta a ANOVA

- Kilkukrotne stosowanie testów t-Studenta (pomiędzy parami grup) prowadziłoby do zwiększenia prawdopodobieństwa popełnienia błędu I-go rodzaju → **musimy stosować innego rodzaju testy**
- Przykład: **Czy natężenie szumu** (gadający studenci) **ma wpływ na efektywność rozumienia wykładu z KADD? :)**
  - Przeprowadzamy eksperyment, gdzie dzielimy studentów na 3 grupy:
    - I – słuchanie wykładu bez szumu
    - II – słuchanie wykładu z umiarkowanym szumem
    - III – słuchanie wykładu ze znacznym szumem
  - **Hipozeta zerowa (H_0):** szum nie zmienia efektywności rozumienia wykładu $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
  - Zmienną niezależną (**czynnikiem**) jest owo natężenie szumu (załóżmy, że może przyjąć trzy wartości – brak, umiarkowany, wysoki)
  - Testowanie tej hipotezy oparte jest na obliczaniu dwóch rodzajów **wariancji** (***międzygrypowej*** – odchyleń średnich między grupami, i ***wewnątrzgrupowej*** – średnia wariancji wewnątrz grup), które następnie pozwalają obliczyć **odpowiednią statystykę *F*** i

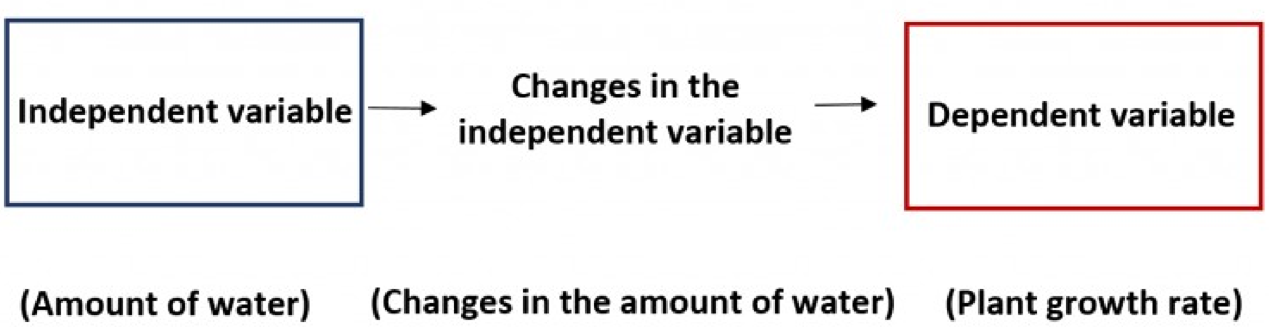
Zależność zmiennych

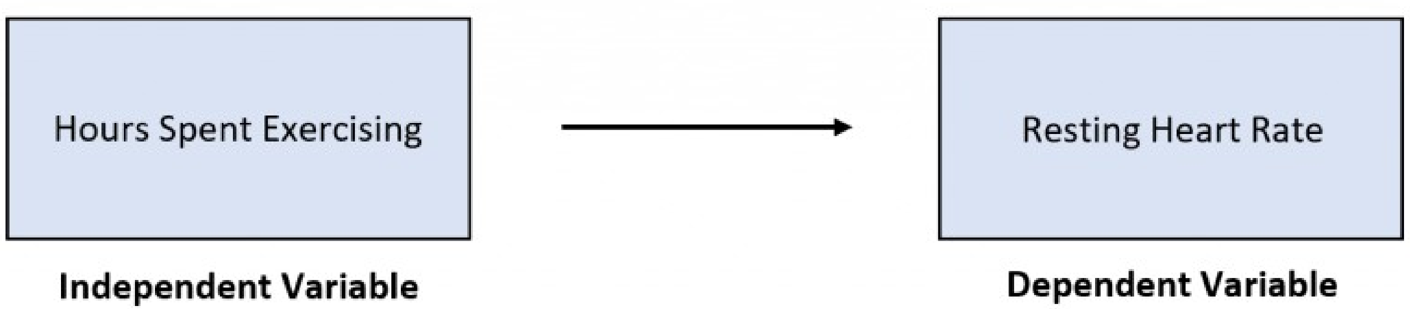
Wykład 3

- **Zmienna niezależna** (objaśniająca, predyktor)– to zmienna, którą my jako eksperymentator możemy kontrolować, by obserwować zmianę innej zmiennej zależnej

- **Zmienna zależna** (objaśniana) – zmienna, którą mierzymy w eksperymencie, która zależy od zmiennej niezależnej

- Zależność/relacja między owymi zmiennymi może wynikać z wpływu **trzeciej zmiennej**, którą może być ***moderator*** i/lub ***mediator***





KONIEC