



Komputerowa analiza danych doświadczalnych

Wykład 9
23.04.2021

dr inż. Łukasz Graczykowski
lukasz.graczykowski@pw.edu.pl

Semestr letni 2020/2021



Metoda największej wiarygodności

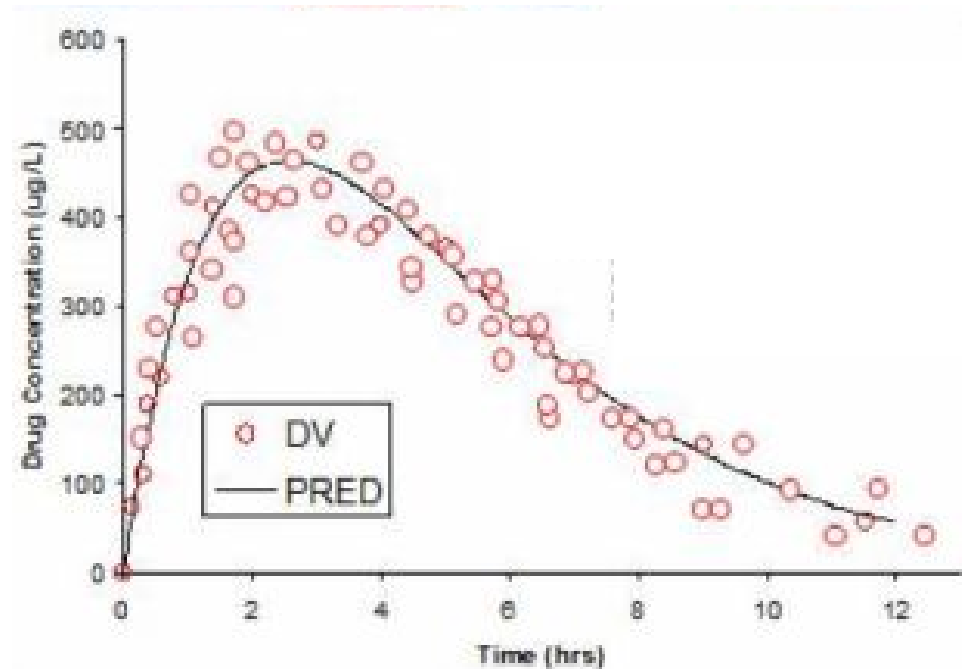
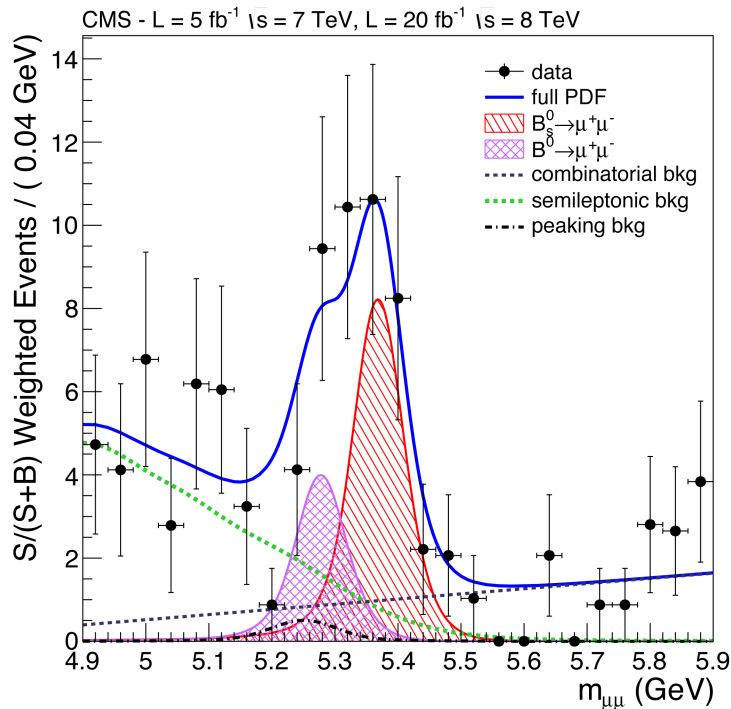
Nierówność informacyjna



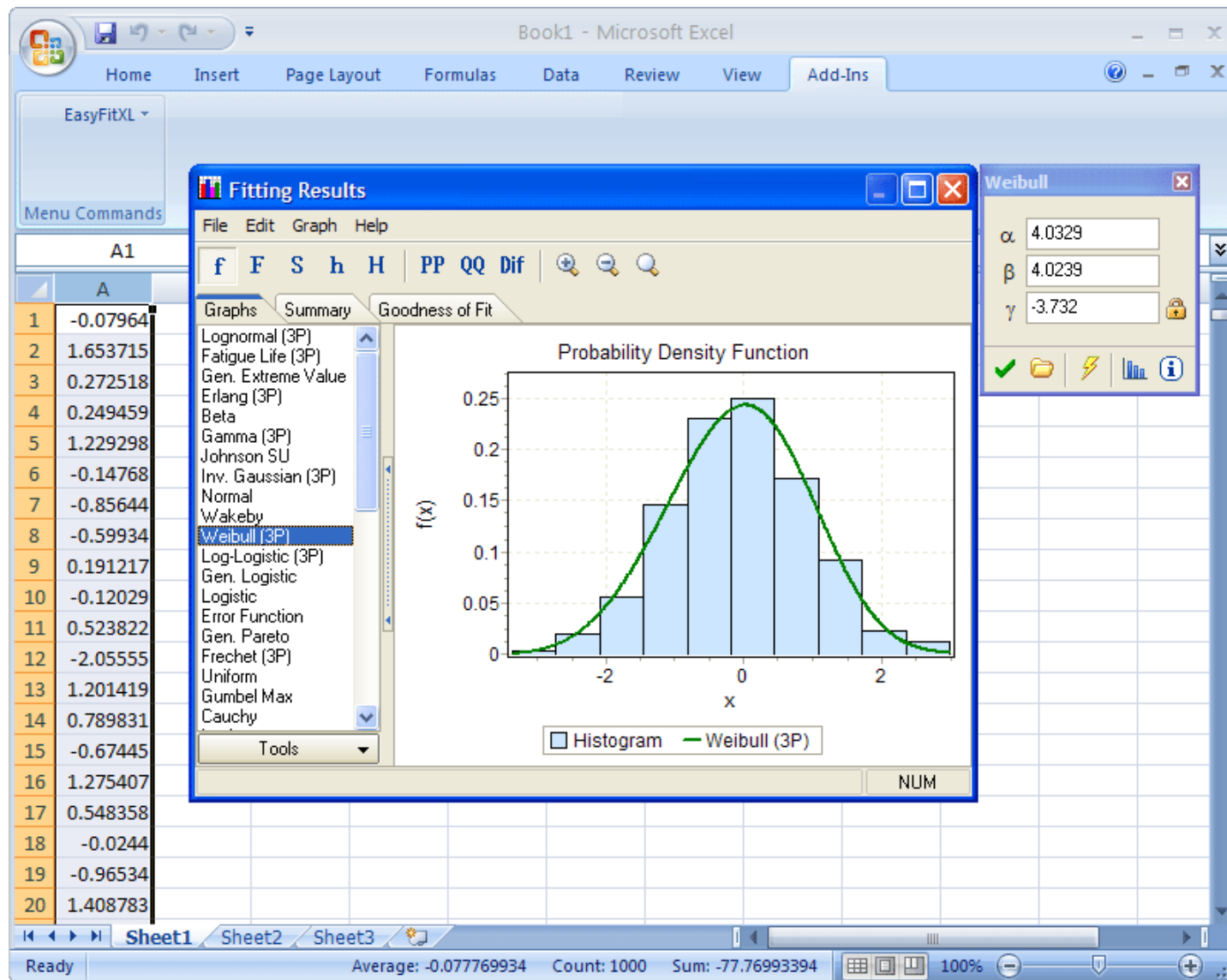
Metoda największej wiarygodności

“Magiczna” funkcja fit

- Do tej pory zajmowaliśmy się estymacją parametrów rozkładów, wprowadziliśmy estymatory i warunki, jakie powinny spełniać. Nie zajmowaliśmy się natomiast sposobem ich konstruowania (oprócz estymatora wartości oczekiwanej i wariancji)
- W praktyce mamy pewien zestaw danych (punkty pomiarowe) i chcemy do niego dopasować jakiś model teoretyczny, który pozwoli nam określić jego parametry



“Magiczna” funkcja fit



<http://www.mathwave.com/articles/fit-distributions-excel.html>

“Magiczna” funkcja fit

7.1 The Fit Method

The Fit method is implemented in ROOT for the histogram classes `TH1`, the sparse histogram classes, `THnSparse`, the graph classes, `TGraph`, `TGraph2D` and `TMultiGraph` for fitting a collection of Graphs with the same function.

7.1.1 The TH1::Fit Method

To fit a histogram programmatically, you can use the `TH1::Fit` method. Here is the signatures of `TH1::Fit` and an explanation of the parameters:

```
TFitResultPtr Fit(TF1 *function, Option_t *option, Option_t *goption,  
                 Axis_t xmin, Axis_t xmax)
```

- `function` a pointer to the fitted function (the fit model) object. One can also use the function name. This name may be one of ROOT pre-defined function names or a user-defined function. See the next paragraph for the list of pre-defined functions.
- `*option`: The second parameter is the fitting option. Here is the list of fitting options:
 - “ `W` ” Set all weights to 1 for non empty bins; ignore error bars
 - “ `WW` ” Set all weights to 1 including empty bins; ignore error bars
 - “ `I` ” Use integral of function in bin instead of value at bin center
 - “ `L` ” Use log likelihood method (default is chi-square method). To be used when the histogram represents counts
 - “ `WL` ” Weighted log likelihood method. To be used when the histogram has been filled with weights different than 1.
 - “ `P` ” Use Pearson chi-square method, using expected errors instead of the observed one given by `TH1::GetBinError` (default case). The expected error is instead estimated from the the square-root of the bin function value.

Funkcja wiarygodności

- Do tej pory zajmowaliśmy się estymacją parametrów rozkładów, wprowadziliśmy estymatory i warunki, jakie powinny spełniać. Nie zajmowaliśmy się natomiast sposobem ich konstruowania (oprócz estymatora wartości oczekiwanej i wariancji)
- Problem ogólny:
 - mamy zbiór p parametrów: $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$
 - określony gęstością prawdopodobieństwa: $f = f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda})$
 - dla n zmiennych losowych: $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$
- Jeden pomiar wielkości \mathbf{X} , czyli pobranie próby o liczności 1, prowadzi do uzyskania wyniku $\mathbf{x}^{(j)} = (X_1 = x_1^{(j)}, X_2 = x_2^{(j)}, \dots, X_n = x_n^{(j)})$
- Takiemu doświadczeniu przypisujemy liczbę:
$$dP^{(j)} = f(\mathbf{x}^{(j)}; \boldsymbol{\lambda}) dx$$
- Która jest tzw. **prawdopodobieństwem a posteriori**. Mówi ona po uzyskaniu wyniku, jakie było prawdopodobieństwo jego uzyskania

Funkcja wiarygodności

- **Funkcją wiarygodności** nazywamy iloczyn postaci:

$$L = \prod_{j=1}^N f(\mathbf{x}^{(j)}; \boldsymbol{\lambda})$$

- Funkcja wiarygodności **jest zmienną losową** (jest funkcją próby)
- **Przykład:** iloraz wiarygodności – rzut asymetryczną monetą

– na podstawie rzutu asymetryczną monetą i wyników tych rzutów chcemy ustalić, czy moneta należy do klasy A lub klasy B

– założmy, że próba to 5 rzutów:
1 orzeł i 4 reszki

– stąd funkcja wiarygodności:

$$L_A = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \quad L_B = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \quad Q = \frac{L_A}{L_B} = 8$$

	A	B
orzeł	1/3	2/3
reszka	2/3	1/3

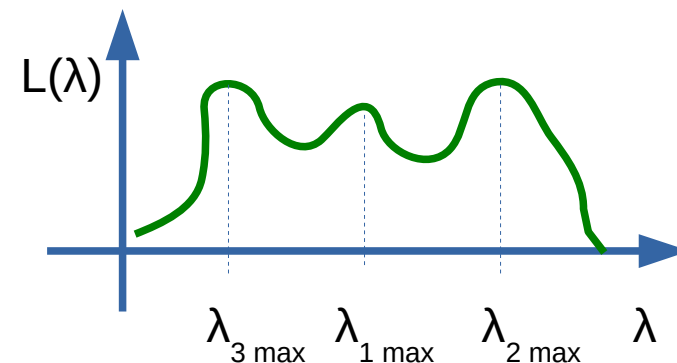
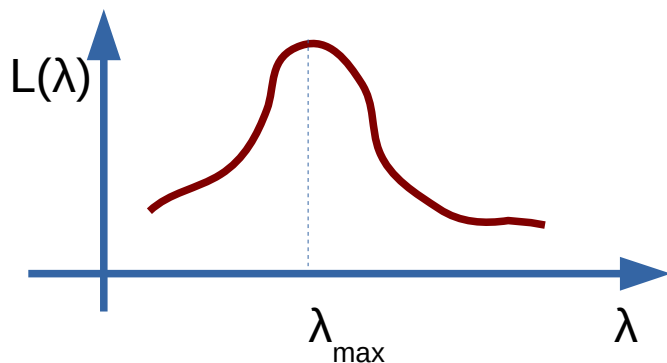
– z dużą dozą prawdopodobieństwa moneta należy do klasy A

Metoda największej wiarygodności

- **Największą ufnością** obdarzamy zbiór parametrów, dla którego funkcja wiarygodności osiąga **maksymalną wartość**
- **Jak wyznaczyć maksimum?**
 - **warunek konieczny: przyrównać pierwszą pochodną L do zera**
- Różniczkowanie iloczynu jest jednak niewygodne, wprowadzamy więc **logarytm funkcji wiarygodności L** :

$$l = \ln L = \sum_{j=1}^N \ln f(x^{(j)}; \lambda)$$

- **Funkcją wiarygodności** jest odpowiednikiem gęstości prawdopodobieństwa, tylko określona dla parametrów. Ponieważ jest funkcją próby losowej, jest również zmienną losową



Metoda największej wiarygodności – pods.

- Funkcją wiarygodności nazywamy iloczyn postaci:

$$L = \prod_{j=1}^N f(\mathbf{x}^{(j)}; \boldsymbol{\lambda})$$

- Funkcja wiarygodności **jest zmienną losową** (jest funkcją próby)
- **Największą ufnością** obdarzamy zbiór parametrów, dla którego funkcja wiarygodności osiąga **maksymalną wartość**
- **Jak wyznaczyć maksimum?**

– warunek konieczny: przyrównać pierwszą pochodną L do zera

- Różniczkowanie iloczynu jest jednak niewygodne, wprowadzamy więc **logarytm funkcji wiarygodności** l :

$$l = \ln L = \sum_{j=1}^N \ln f(\mathbf{x}^{(j)}; \boldsymbol{\lambda})$$

- **Funkcją wiarygodności** jest odpowiednikiem gęstości prawdopodobieństwa, tylko określona dla parametrów. Ponieważ jest funkcją próby losowej, jest również zmienną losową

- Równania wiarygodności: $\frac{\partial l}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$

$$l' = \sum_{j=1}^N \frac{f'(\mathbf{x}^{(j)}; \boldsymbol{\lambda})}{f(\mathbf{x}^{(j)}; \boldsymbol{\lambda})}$$

Metoda największej wiarygodności

- **Przykład:** powtarzanie pomiarów o różnej dokładności
 - pomiar danej wielkości różnymi przyrządami pomiarowymi:
 - pomiary $X^{(j)}$ będą się układały wokół wartości rzeczywistej λ
 - niepewności będą miały rozkład normalny
 - mamy 1 wielkość, więc z wektora $\mathbf{x}^{(j)}$ robi się jedna zmienna $X^{(j)}$
 - **Wniosek:** pojedynczy pomiar to pobranie próby o liczebności 1 z rozkładu Gaussa o wartości średniej λ i wariancji σ_j
 - Prawdopodobieństwo *a posteriori* możemy zatem wyrazić jako:

$$dP^{(j)} = f(X^{(j)}; \lambda) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left(-\frac{(x^{(j)} - \lambda)^2}{2\sigma_j^2}\right) dx$$

- Zatem dla N pomiarów funkcja wiarygodności wynosi:

$$L = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left(-\frac{(x^{(j)} - \lambda)^2}{2\sigma_j^2}\right)$$

Najbardziej wiarygodny wynik

- Logarytmiczna funkcja wiarygodności wynosi:

$$l = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{(x^{(j)} - \lambda)^2}{\sigma_j^2} + const$$

- Równanie wiarygodności przybiera postać:

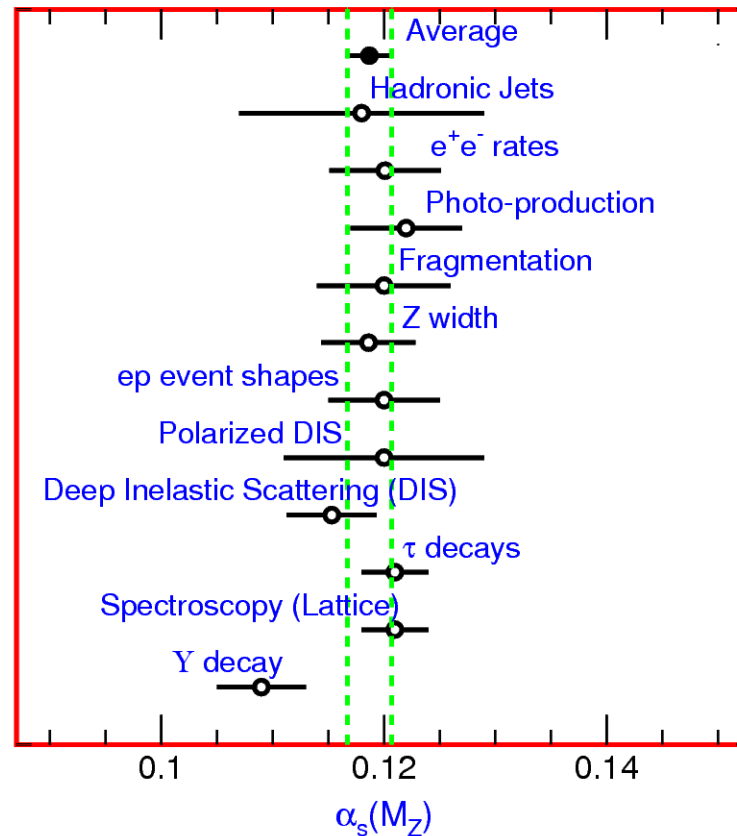
$$\frac{dl}{d\lambda} = \sum_{j=1}^N \frac{x^{(j)} - \lambda}{\sigma_j^2} = 0$$

- A jego rozwiązanie to:

$$\tilde{\lambda} = \sum_{j=1}^N \frac{x^{(j)}}{\sigma_j^2} / \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2}$$

- **Wniosek:** wynik najbardziej wiarygodny jest średnią ważoną N pomiarów **tej samej cechy**, gdzie waga każdego pomiaru jest odwrotnością jego wariancji

Uśrednianie wielu pomiarów – przykład



S. Eidelman et al.,
Phys. Lett. B 592, 1 (2004)

Figure 9.1: Summary of the value of $\alpha_s(M_Z)$ from various processes. The values shown indicate the process and the measured value of α_s extrapolated to $\mu = M_Z$. The error shown is the *total* error including theoretical uncertainties. The average quoted in this report which comes from these measurements is also shown. See text for discussion of errors.

- Pomiar stałej sprzężenia oddziaływań silnych – szukanie najbardziej wiarygodnego wyniku → uśredniamy wszystkie wyniki z różnych pomiarów ważąc je odwrotnością wariancji

Przykład – estymacja rozkładu norm.

- **Przykład:** badamy rozkład wagi studentek amerykańskich college'ów
 - rozkład wagi studentek w populacji jest opisany rozkładem normalnym o wartości średniej μ i wariancji σ^2
 - założmy, że wybraliśmy $N=10$ reprezentantów, których wagi (w kg) $x^{(j)}$ układają się następująco:
 - 52,2 55,3 59,0 57,6 67,6 72,6 68,9 62,6 67,6 81,6
 - **Zadanie:** na podstawie wyniku pomiaru znajdź najbardziej wiarygodną estymację parametrów rozkładu
 - oczywiście funkcja rozkładu prawdopodobieństwa każdego wyniku (wagi studentek) dana jest wzorem:
$$f(x^{(j)}; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x^{(j)} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
 - konstruujemy funkcję wiarygodności:

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \sigma^{-n} (2\pi)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{j=1}^N (x^{(j)} - \hat{\mu})^2\right]$$

Przykład – estymacja rozkładu norm.

- oraz logarytmiczną funkcję wiarygodności:

$$l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \ln L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \ln \left(\hat{\sigma}^{-N} (2\pi)^{-n/2} \left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{j=1}^N (x^{(j)} - \hat{\mu})^2 \right] \right) = -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{j=1}^N (x^{(j)} - \hat{\mu})^2 + \text{const}$$

- równania wiarygodności:

$$\frac{dl(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{d\hat{\mu}} = 0 \quad \frac{dl(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{d\hat{\sigma}} = 0$$

$$\frac{dl(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{d\hat{\mu}} = \frac{-2 \sum_{j=1}^N (x^{(j)} - \hat{\mu})(-1)}{2\hat{\sigma}} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N (x^{(j)}) - N\hat{\mu} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^N x^{(j)}}{n}$$

$$\frac{dl(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{d\hat{\sigma}} = -\frac{n}{2\hat{\sigma}} + \frac{\sum_{j=1}^N (x^{(j)} - \hat{\mu})}{2\hat{\sigma}^2} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (x^{(j)} - \hat{\mu})^2}{n}$$

- dla formalności powinniśmy jeszcze sprawdzić drugie pochodne...

Przykład – estymacja rozkładu norm.

- liczymy estymatory:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^n x^{(j)}}{n} = 645/10 = 64,5$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (x^{(j)} - \hat{\mu})^2}{n} = 714/10 = 71,4$$

- otrzymaliśmy (poprzez metodę największej wiarygodności) estymację parametrów rozkładu normalnego całej populacji na podstawie pomiaru próby
- **Koniec**



Przykłady funkcji wiarygodności

Przykłady funkcji wiarygodności

- Rozkład Poissona

$$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- Funkcja wiarygodności

$$l = \sum_{j=1}^N \left\{ k^{(j)} \ln \lambda - \ln(k^{(j)}!) - \lambda \right\}$$

- oraz jej pochodna

$$\frac{dl}{d\lambda} = l' = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{k^{(j)}}{\lambda} - 1 \right\} =$$

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^N \left\{ k^{(j)} - \lambda \right\} = \frac{N}{\lambda} (\bar{K} - \lambda)$$

- Średnia arytmetyczna z k jest nieobciążonym estymatorem λ o minimalnej wariancji równej $\frac{\lambda}{N}$

- Rozkład dwumianowy

$$L(k; \lambda) = \binom{n}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k}$$

- Stąd:

$$l = \ln L = k \ln \lambda + (n-k) \ln(1-\lambda) + \ln \binom{n}{k}$$

$$l' = \frac{k}{\lambda} - \frac{n-k}{1-\lambda} = \frac{n}{\lambda(1-\lambda)} \left(\frac{k}{n} - \lambda \right)$$

- czyli średnia arytmetyczna k/n jest estymatorem o minimalnej wariancji równej $\lambda(1-\lambda)/n$



Nierówność informacyjna

Nierówność informacyjna

- **Pytanie:** jak skonstruować estymator o optymalnych własnościach?
 - estymator jest nieobciążony, jeżeli **wartość obciążenia B dla każdej próby:** $E(S) = \lambda + B(\lambda)$ $B(\lambda) = E(S) - \lambda = 0$
 - oraz **wariancja estymatora jest jak najmniejsza** (estymator jest **zgodny**, gdy dąży do 0 dla liczebności próby losowej dążącej do nieskończoności): $\sigma^2(S)$ - *minimalna*
 - bardzo często istnieje jednak związek pomiędzy obciążeniem a wiarancją i musimy szukać kompromisu – taki związek nazywamy **nierównością informacyjną**

- Po dłuższych przekształceniach (Brandt) otrzymujemy nierówność informacyjną – związek między obciążeniem, wariancją i informacją zawartą w próbie:

$$I(\lambda) = E(l'^2) = -E(l'') \quad l' = \sum_{j=1}^N \frac{f'(x^{(j)}; \lambda)}{f(x^{(j)}; \lambda)}$$

Informacja Fishera

$$I(\lambda) = E(l'^2) = NE \left(\left(\frac{f'(x^{(j)}; \lambda)}{f(x^{(j)}; \lambda)} \right)^2 \right)$$

$$\frac{(B'(\lambda) + 1)^2}{I(\lambda)} \leq \sigma^2(S)$$

Nierówność informacyjna

- **Nierówność informacyjna:**

$$\frac{(B'(\lambda)+1)^2}{I(\lambda)} \leq \sigma^2(S)$$

$$I(\lambda) = E(l'^2)$$

$$l' = \sum_{j=1}^N \frac{f'(x^{(j)}; \lambda)}{f(x^{(j)}; \lambda)}$$

- **Nierówność informacyjna** to związek pomiędzy obciążeniem, wariancją i informacją zawartą w próbie
- Jest to definicja ogólna. Prawa strona jest dolnym ograniczeniem dla wariancji danego (dowolnego) estymatora – ograniczenie to nazywamy **ograniczeniem minimalnej wariancji** albo **ograniczeniem Cramea-Rao**
- Kiedy obciążenie nie zależy od λ , a w szczególności gdy znika (równa się zero, estymator nieobciążony), nierówność redukuje się do:

$$\sigma^2(S) \geq \frac{1}{I(\lambda)}$$

Nierówność informacyjna

- **Możemy teraz zadać pytanie:** jaki jest warunek osiągnięcia minimalnej wariancji? Innymi słowy, kiedy we wzorze Cramea-Rao zachodzi równość?

- Można pokazać (Brandt), że zajdzie tak, gdy: $E(S) = B(\lambda) + \lambda$

$$l' = A(\lambda)(S - E(S)) \quad l = B(\lambda)S + C(\lambda) + D \quad L = d \exp(B(\lambda)S + C(\lambda))$$

- Wtedy w przypadku estymatora nieobciążonego o minimalnej wariancji otrzymujemy:

$$\sigma^2(S) = \frac{1}{I(\lambda)} = \frac{1}{E(l'^2)}$$

$$\sigma^2(S) = \frac{1}{|A(\lambda)|}$$

- Estymatory spełniające powyższe warunki nazywamy **estymatorami o najniższej wariancji**



Prawo kombinacji niepewności

Prawo kombinacji niepewności

- Powróćmy do problemu z poprzedniego wykładu – wielokrotny pomiar tej samej wielkości z różną dokładnością, lub (równoważnie) problem pobierania próby z rozkładów normalnych o jednakowej wartości średniej λ i różnych, lecz znanych wariancjach σ_j

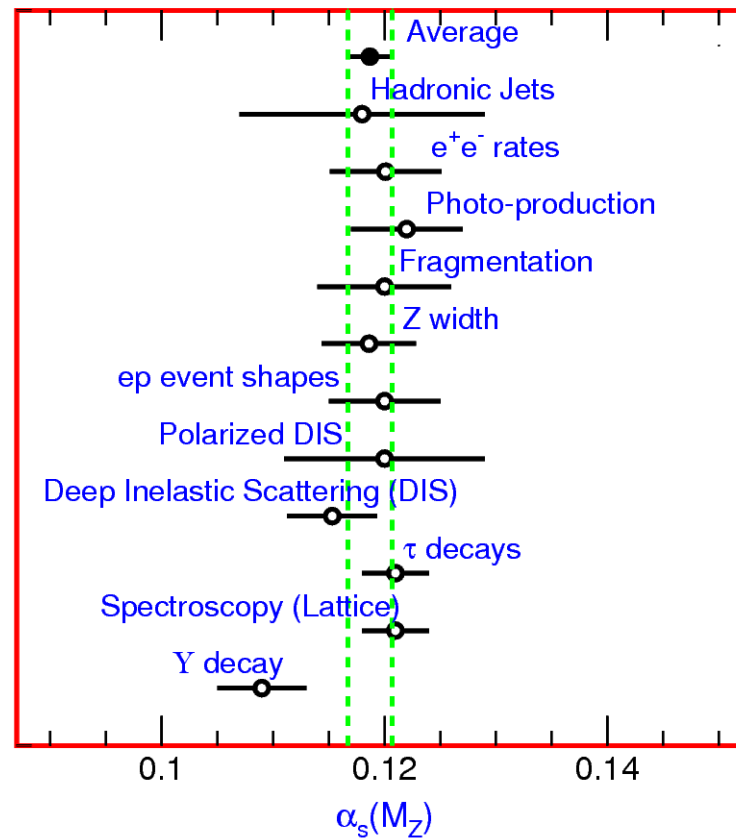


Figure 9.1: Summary of the value of $\alpha_s(M_Z)$ from various processes. The values shown indicate the process and the measured value of α_s extrapolated to $\mu = M_Z$. The error shown is the *total* error including theoretical uncertainties. The average quoted in this report which comes from these measurements is also shown. See text for discussion of errors.

Prawo kombinacji niepewności

- Jak pamiętamy, logarytmiczna funkcja wiarygodności i jej pochodna (równanie wiarygodności) dla takiego przypadku:

$$l = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{(X^{(j)} - \lambda)^2}{\sigma_j^2} + \text{const} \qquad l' = \frac{dl}{d\lambda} = \sum_{j=1}^N \frac{X^{(j)} - \lambda}{\sigma_j^2} = 0$$

- Możemy r. wiarygodności przekształcić:

$$l' = \sum_{j=1}^N \frac{X^{(j)}}{\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^N \frac{\lambda}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2} \left(\frac{\sum_{j=1}^N \frac{X^{(j)}}{\sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2}} - \lambda \right) = 0$$

- I jego rozwiązanie:

$$S = \tilde{\lambda} = \sum_{j=1}^N \frac{X^{(j)}}{\sigma_j^2} / \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2}$$

- Estymator S jest nieobciążonym estymatorem wartości średniej λ .
- Jaka jest niepewność (wariancja) tego estymatora?
 - **W naszym przykładzie** – jaka jest niepewność wartości średniej stałej sprzężenia oddziaływania silnego na podstawie różnych pomiarów?

Przykład – estymacja rozkładu norm.

- oraz logarytmiczną funkcję wiarygodności:

$$l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \ln L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \ln \left(\hat{\sigma}^{-N} (2\pi)^{-n/2} \left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{j=1}^N (x^{(j)} - \hat{\mu})^2 \right] \right) = -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{j=1}^N (x^{(j)} - \hat{\mu})^2 + \text{const}$$

- równania wiarygodności:

$$\frac{dl(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{d\hat{\mu}} = 0 \qquad \frac{dl(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{d\hat{\sigma}} = 0$$

$$\frac{dl(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{d\hat{\mu}} = \frac{-2 \sum_{j=1}^N (x^{(j)} - \hat{\mu})(-1)}{2\sigma} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N (x^{(j)}) - N\hat{\mu} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^N x^{(j)}}{n}$$

$$\frac{dl(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{d\hat{\sigma}} = -\frac{n}{2\hat{\sigma}} + \frac{\sum_{j=1}^N (x^{(j)} - \hat{\mu})}{2\hat{\sigma}^2} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (x^{(j)} - \hat{\mu})^2}{n}$$

- dla formalności powinniśmy jeszcze sprawdzić drugie pochodne...

Prawo kombinacji niepewności

- Jeśli teraz porównamy:

$$l' = \sum_{j=1}^N \frac{X^{(j)}}{\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^N \frac{\lambda}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2} \left(\frac{\sum_{j=1}^N \frac{X^{(j)}}{\sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2}} - \lambda \right) = \boxed{\sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2}} (\tilde{\lambda} - \lambda)$$

- Ze wzorem:

$$l' = A(\lambda)(S - E(S)) = A(\lambda)(S - B(\lambda) - \lambda)$$

$$\text{dla } S = \tilde{\lambda} \text{ i } B(\lambda) = 0$$

$$l' = \boxed{A(\lambda)} (\tilde{\lambda} - \lambda)$$

- Widzimy, że estymator ten ma również **minimalną wariancję**. Jaka ona jest? Posługując się wzorem:

$$\sigma^2(S) = \frac{1}{|A(\lambda)|}$$

- Czyli:

$$\sigma^2(\tilde{\lambda}) = 1 / \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2}$$

- Wzór ten określamy jako **prawo kombinacji niepewności**, lub (bardziej kolokwialnie) “**uśrednianie niepewności w kwadratach**”

Prawo kombinacji niepewności

- Możemy zauważyć, że jeżeli **wszystkie** pomiary mają jednakową dokładność, otrzymamy:

$$\tilde{\lambda} = \bar{X}, \quad \sigma^2(\tilde{\lambda}) = \frac{\sigma^2}{N}$$

- Analogicznie jak na Wykładzie 7 i 8, gdy liczyliśmy wartość oczekiwaną i wariancję z próby za pomocą definicji estymatorów
- Wniosek:** w zależności od potrzeb, możemy stosować podejście zarówno poprzez obliczanie estymatorów bezpośrednio (jeżeli potrafimy je wprowadzić), jak i poprzez metodę największej wiarygodności

Estymator wartości oczekiwanej

Próba losowa

- **wariancja średniej arytmetycznej:**

$$\sigma^2(\bar{X}) = E\{\bar{X} - E(\bar{X})\}^2 = E\left\{\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \hat{x}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2} E\{[(X_1 - \hat{x}) + (X_2 - \hat{x}) + \dots + (X_n - \hat{x})]^2\}$$

- **ponieważ elementy próby losowej są niezależne:**

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E\{(X_i - \hat{x})(X_j - \hat{x})\} = 0$$

- **to upraszczamy nawias:**

$$\begin{aligned} E\{[(X_1 - \hat{x}) + (X_2 - \hat{x}) + \dots + (X_n - \hat{x})]^2\} &= E\{(X_1 - \hat{x})^2 + (X_2 - \hat{x})^2 + \dots + (X_n - \hat{x})^2\} \\ &= E(X_1 - \hat{x})^2 + E(X_2 - \hat{x})^2 + \dots + E(X_n - \hat{x})^2 = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n) = n\sigma^2(X) \end{aligned}$$

- **zatem ostatecznie wariancja średniej arytmetycznej:**

$$\sigma^2(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2(X) = \frac{1}{n}\sigma^2(X)$$

- **ponieważ wariancja rozkładu populacji jest jedną liczbą, to:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\bar{X}) = 0$$

Wykazaliśmy, że estymator jest **zgodny**

**PRZYPOMNIENIE
WYKŁAD 7 I 8**



KONIEC