Komputerowa analiza danych doświadczalnych

Wykład 10
30.04.2021

dr inż. Łukasz Graczykowski
lukasz.graczykowski@pw.edu.pl

Semestr letni 2018/2019

Przykłady funkcji wiarygodności i prawo kombinacji niepewności

Własności asymptotyczne

Prawo kombinacji niepewności

Prawo kombinacji niepewności

- Powróćmy do problemu z poprzedniego wykładu – wielokrotny pomiar tej samej wielkości z różną dokładnością, lub (równoważnie) problem pobierania próby z rozkładów normalnych o jednakowej wartości średniej λ i różnych, lecz znanych wariancjach σ_j

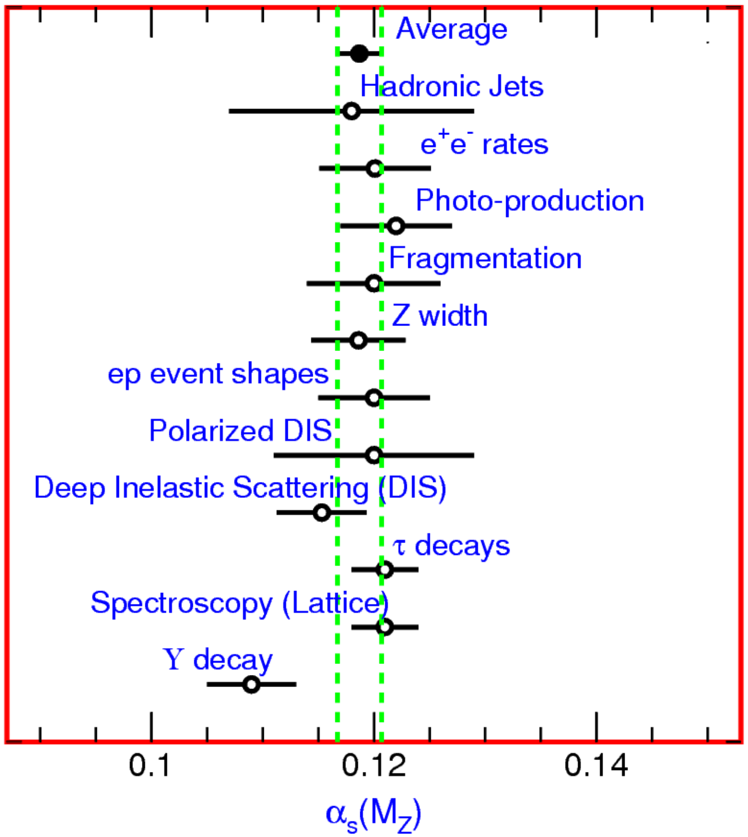


Figure 9.1: Summary of the value of $\alpha_s(M_Z)$ from various processes. The values shown indicate the process and the measured value of α_s extrapolated to $\mu = M_Z$. The error shown is the *total* error including theoretical uncertainties. The average quoted in this report which comes from these measurements is also shown. See text for discussion of errors.

Prawo kombinacji niepewności

- Jak pamiętamy, logarytmiczna funkcja wiarygodności i jej pochodna (równanie wiarygodności) dla takiego przypadku:

$$l=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(X^{(j)}-\lambda\right)^2}{\sigma_j^2}+const \qquad l'=\frac{dl}{d\lambda}=\sum_{j=1}^{N}\frac{X^{(j)}-\lambda}{\sigma_j^2}=0$$

- Możemy r. wiarygodności przekształcić:

$$l'=\sum_{j=1}^{N}\frac{X^{(j)}}{\sigma_j^2}-\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda}{\sigma_j^2}=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_j^2}\left(\frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{X^{(j)}}{\sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_j^2}}-\lambda\right)=0$$

- I jego rozwiązanie:

$$S=\tilde{\lambda}=\sum_{j=1}^{N}\frac{X^{(j)}}{\sigma_j^2}/\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_j^2}$$

- Estymator S jest nieobciążonym estymatorem wartości średniej λ.
- Jaka jest niepewność (wariancja) tego estymatora?
  - **W naszym przykładzie** – jaka jest niepewność wartości średniej stałej sprzężenia oddziaływania silnego na podstawie różnych pomiarów?

Przykład – estymacja rozkładu norm.

– oraz logarytmiczną funkcję wiarygodności:

$$l(\hat{\mu},\hat{\sigma}) = \ln L(\hat{\mu},\hat{\sigma}) = \ln\left(\hat{\sigma}^{-N}(2\pi)^{-n/2}\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{j=1}^{N}\left(x^{(j)}-\hat{\mu}\right)^2\right]\right) = -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{j=1}^{N}\left(x^{(j)}-\hat{\mu}\right)^2 + const$$

– równania wiarygodności:

Wykład 9 - przypomnienie

$$\boxed{\frac{dl(\hat{\mu},\hat{\sigma})}{d\hat{\mu}} = 0 \qquad \frac{dl(\hat{\mu},\hat{\sigma})}{d\hat{\sigma}} = 0}$$

$$\frac{dl(\hat{\mu},\hat{\sigma})}{d\hat{\mu}} = \frac{-2\sum_{j=1}^{N}\left(x^{(j)}-\hat{\mu}\right)(-1)}{2\sigma} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{N}\left(x^{(j)}\right) - N\hat{\mu} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x^{(j)}}{n}}$$

$$\frac{dl(\hat{\mu},\hat{\sigma})}{d\hat{\sigma}} = -\frac{n}{2\hat{\sigma}} + \frac{\sum_{j=1}^{N}\left(x^{(j)}-\hat{\mu}\right)}{2\hat{\sigma}^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N}\left(x^{(j)}-\hat{\mu}\right)^2}{n}}$$

– dla formalności powinniśmy jeszcze sprawdzić drugie pochodne...

Prawo kombinacji niepewności

- Jeśli teraz porównamy:

$$l' = \sum_{j=1}^{N} \frac{X^{(j)}}{\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2} \left(\frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{X^{(j)}}{\sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2}} - \lambda \right) = \boxed{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2}} (\tilde{\lambda} - \lambda)$$

- Ze wzorem z ostatniego wykładu:

$$l' = A(\lambda)(S - E(S)) = A(\lambda)(S - B(\lambda) - \lambda)$$

$$dla\ S = \tilde{\lambda}\ i\ B(\lambda) = 0$$

$$l' = \boxed{A(\lambda)}(\tilde{\lambda} - \lambda)$$

- Widzimy, że estymator ten ma również ***minimalną wariancję***. Jaka ona jest? Posłużmy się wzorem z ostatniego wykładu:

$$\sigma^2(S) = \frac{1}{|A(\lambda)|}$$

- Czyli:

$$\sigma^2(\tilde{\lambda}) = 1 / \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2}$$

- Wzór ten określamy jako **prawo kombinacji niepewności**, lub (bardziej kolokwialnie) **“uśrednianie niepewności w kwadratach”**

Prawo kombinacji niepewności

- Możemy zauważyć, że jeżeli **wszystkie** pomiary mają jednakową dokładność, otrzymamy:

$$\tilde{\lambda}=\bar{X}\,,\quad \sigma^2(\tilde{\lambda})=\frac{\sigma^2}{N}$$

- Analogicznie jak na Wykładzie 7 i 8, gdy liczyliśmy wartość oczekiwaną i wariancję z próby za pomocą estymatorów
- **Wniosek:** w zależności od potrzeb, możemy stosować podejście zarówno poprzez obliczanie estymatorów bezpośrednio (jeżeli potrafimy je wprowadzić), jak i poprzez metodę największej wiarygodności

Estymator wartości oczekiwanej

Próba losowa

- **wariancja** średniej arytmetyczmej:

PRZYPOMNIENIE WYKŁAD 7 I 8

$$\sigma^2(\bar{X}) = E\{\bar{X} - E(\bar{X})\}^2 = E\left\{\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \hat{x}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2} E\{[(X_1 - \hat{x}) + (X_2 - \hat{x}) + \ldots + (X_n - \hat{x})]^2\}$$

- ponieważ elementy próby losowej są niezależne:

$$Cov(X_i, X_j) = E((X_i - \hat{x})(X_j - \hat{x})) = 0$$

- to upraszczamy nawias:

$$E\{[(X_1 - \hat{x}) + (X_2 - \hat{x}) + \ldots + (X_n - \hat{x})]^2\} = E\{(X_1 - \hat{x})^2 + (X_2 - \hat{x})^2 + \ldots + (X_n - \hat{x})^2\}$$
$$= E(X_1 - \hat{x})^2 + E(X_2 - \hat{x})^2 + \ldots + E(X_n - \hat{x})^2 = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n) = n\sigma^2(X)$$

- zatem ostatecznie wariancja średniej arytmetycznej:

$$\sigma^2(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2(X) = \frac{1}{n}\sigma^2(X)$$

- ponieważ wariancja rozkładu populacji jest jedną liczbą, to:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(\bar{X}) = 0$$

Wykazaliśmy, że estymator jest **zgodny**

Własności asymptotyczne estymatorów i funkcji wiarygodności

Własności asymptotyczne estymatorów

- Omówimy teraz niektóre własności funkcji wiarygodności i estymatorów największej wiarygodności dla dużych prób, czyli $N \to \infty$
- Estymator $S = \tilde{\lambda}$ jest zdefiniowany jako rozwiązanie równania wiarygodności:

$$l'(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{f'(X^{(j)}; \lambda)}{f(X^{(j)}; \lambda)} \right)_{\tilde{\lambda}} = 0 \qquad I(\lambda) = E(l'^2) = NE\left(\left(\frac{f'(x^{(j)}; \lambda)}{f(x^{(j)}; \lambda)} \right)^2 \right)$$

- Rozwijamy $l'(\lambda)$ na szereg Taylora wokół punktu $\lambda = \tilde{\lambda}$
- Czyli: $l'(\lambda) = l'(\tilde{\lambda}) + (\lambda - \tilde{\lambda}) l''(\tilde{\lambda}) + \ldots$
- Pierwszy wyraz z prawej strony znika (z uwagi na r. wiar.), drugą pochodną możemy zaś zapisac jako (w granicy $N \to \infty$):

$$l''(\tilde{\lambda}) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{f'(X^{(j)}; \lambda)}{f(X^{(j)}; \lambda)} \right)'_{\tilde{\lambda}} \Rightarrow l''(\tilde{\lambda}) = NE\left(\left(\frac{f'(X^{(j)}; \lambda)}{f(X^{(j)}; \lambda)} \right)'_{\tilde{\lambda}} \right)$$

- Jeśli teraz posłużymy się wzorem (poprz wykład): $I(\lambda) = E(l'^2) = -E(l'')$

Własności asymptotyczne estymatorów

- W takim przypadku możemy zapisać:

$$l''(\tilde{\lambda}) = E(l''(\tilde{\lambda})) = -E(l'^2(\tilde{\lambda})) = -I(\tilde{\lambda}) = -1/b^2 \leftarrow \text{stała}$$

analogicznie do

$$\sigma^2(S) = \frac{1}{|A(\tilde{\lambda})|}$$

$$\sigma^2(S) = \frac{1}{I(\tilde{\lambda})} = \frac{1}{E(l'^2)}$$

- **Innymi słowy:** zastąpiliśmy drugą pochodną logarytmicznej funkcji wiarygodności $l''(\tilde{\lambda})$, która jest funkcją próby, liczbą, która zależy jedynie od gęstości f i estymatora $\tilde{\lambda}$
- Czyli nasze rozwinięcie na szereg Taylora (pomijając wyższe wyrazy):

$$l'(\lambda) = (-1/b^2)(\lambda - \tilde{\lambda}) \Rightarrow l(\lambda) = (-1/2b^2)(\lambda - \tilde{\lambda})^2 + c$$

- Stałą c wzynaczamy podstawiając: $\lambda = \tilde{\lambda} \Rightarrow c = l(\tilde{\lambda})$
- I ostatecznie dostajemy (k=const):

$$\boxed{l(\lambda) - l(\tilde{\lambda}) = -\frac{1}{2}\frac{(\lambda - \tilde{\lambda})^2}{b^2} \Rightarrow L(\lambda) = k \exp\left(-\frac{(\lambda - \tilde{\lambda})^2}{2b^2}\right)}$$

- **Funkcja wiarygodności (dla dużych N) ma więc <u>rozkład normalny</u>**

Własności asymptotyczne estymatorów

- Funkcja wiarygodności (dla dużych N) ma więc **rozkład normalny**

$$\boxed{L(\lambda) = k \exp\left(-\frac{(\lambda - \tilde{\lambda})^2}{2b^2}\right)}$$

dla $\lambda = \tilde{\lambda}, \; u(\tilde{\lambda}) = b$ $\qquad \lambda = \tilde{\lambda} \pm b$

otrzymujemy $-(l(\lambda) - l(\tilde{\lambda})) = \frac{1}{2}$

- Ponieważ estymowaliśmy parametr λ mamy więc:

$$S = \tilde{\lambda}, \; E(S) = \lambda$$

- Czyli $\tilde{\lambda}$ jest <u>nieobciążonym estymatorem o minimalnej wariancji wynoszącej</u>:

$$\boxed{\sigma^2(\tilde{\lambda}) = b^2} = \frac{1}{I(\tilde{\lambda})} = \frac{1}{E(l'^2(\tilde{\lambda}))} = -\frac{1}{E(l''(\tilde{\lambda}))}$$

- Estymator ma wszystkie właściwości (nieobciążony, zgodny, z minimalną wariancją) **jedynie** w granicy $N \rightarrow \infty$
- Taki estymator nazywany jest estymatorem **asymptotycznie nieobciążonym**
- Analogicznie możemy powiedzieć, że funkcja wiarygodności jest **asymptotycznie normalna**

Własności asymptotyczne estymatorów

- Powiedzieliśmy sobie poprzednio, że funkcja wiarygodności jest miarą prawdopodobieństwa (rozkładem prawdopodobieństwa), ale dla parametrów badanego rozkładu prawd. danej cechy
- Zatem estymację parametru możemy przedstawić jako **wynik i niepewność typu A**:

  $$\lambda=\tilde{\lambda}, \; u(\lambda)=\sigma(\tilde{\lambda})$$

- Ponieważ funkcja wiarygodności asymptotycznie dąży do rozkładu normalnego, możemy powiedzieć, że wartość prawdziwa estymowanego parametru zawarta jest w przedziale:

  $$\tilde{\lambda}-\sigma(\tilde{\lambda})<\lambda_0<\tilde{\lambda}+\sigma(\tilde{\lambda})$$

  z prawdopodobieństwem 68,3% ("jeden sigma")
- Podane związki możemy stosować jedynie **dla prób o dużym** N, dokładność przybliżeń zależy jednak również od rozpatrywanej funkcji gęstości – w każdym przypadku musimy zdecydować, czy powyższa procedura jest uprawniona do zastosowania

Przykład – wyznaczanie śr. czasu życia

- **Przykład:** chcemy zbadać średni czas τ życia jądra jakiegoś izotopu promieniotwórczego

- Prawdopodobieństwo że, istniejące w chwili $t=0$ jądro promieniotwórcze rozpadnie się w przedziale czasu od t do $t+dt$ wynosi:

$$f(t)\,dt=\frac{1}{\tau}\exp(-t/\tau)\,dt$$

- Badamy oczywiście pewną próbkę zawierającą wiele jąder – załóżmy, że zaobserwowaliśmy rozpady w chwilach: $t_{1,} t_{2,} \ldots, t_N$

- Konstruujemy zatem odpowiednią funkcję wiarygodności:

$$L(\tau)=\frac{1}{\tau^N}\exp\left(-\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{N} t_i\right)=\frac{1}{\tau^N}\exp\left(-\frac{N}{\tau}\bar{t}\right)$$

- Obliczamy logarytm i pierwszą pochodną:

$$l(\tau)=\ln L(\tau)=-\frac{N}{\tau}\bar{t}-N\ln\tau \qquad l'(\tau)=\frac{N}{\tau}\left(\frac{\bar{t}}{\tau}-1\right)=\frac{N}{\tau^2}(\bar{t}-\tau)$$

Przykład – wyznaczanie śr. czasu życia

- Porównując to ze wzorem:

$$l' = A(\lambda)(S - E(S)) = A(\lambda)(S - B(\lambda) - \lambda)$$

$$dla\ S = \tilde{\lambda}\ i\ B(\lambda) = 0$$

$$l' = A(\lambda)(\tilde{\lambda} - \lambda) \qquad \sigma^2(S) = \frac{1}{|A(\lambda)|}$$

$$l'(\tau) = \frac{N}{\tau}\left(\frac{\bar{t}}{\tau} - 1\right) = \frac{N}{\tau^2}(\bar{t} - \tau)$$

- Widzimy, że rozwiązaniem o największej wiarygodności jest:

$$\tilde{\tau} = \bar{t} \qquad \sigma^2(\tilde{\tau}) = \tau^2 / N \Rightarrow dla\ \tau = \tilde{\tau} = t\ \Rightarrow \sigma^2(\tilde{\tau}) = \bar{t} / N$$

- Wstawiając $\tau = \tilde{\tau} = \bar{t}$ do wzoru na *l* otrzymamy:

$$l(\tilde{\tau}) = l_{max} = -N(1 + \ln \bar{t})$$

- Czyli:

$$-(l(\tau) - l(\tilde{\tau})) = N\left(\frac{\bar{t}}{\tau} + \ln\frac{\tau}{\bar{t}} - 1\right)$$

- W tym wyrażeniu trudno jest rozpoznać asymptotyczną postać równania jak tutaj: $l(\lambda) - l(\tilde{\lambda}) = -\frac{1}{2}\frac{(\lambda - \tilde{\lambda})^2}{b^2} \Rightarrow L(\lambda) = k \exp\left(-\frac{(\lambda - \tilde{\lambda})^2}{2b^2}\right)$

Przykład – wyznaczanie śr. czasu życia

- Czyli nie możemy od razu zastosować rozumowania, że wartoć prawdziwa estymowanego parametru mieści się w przedziale:

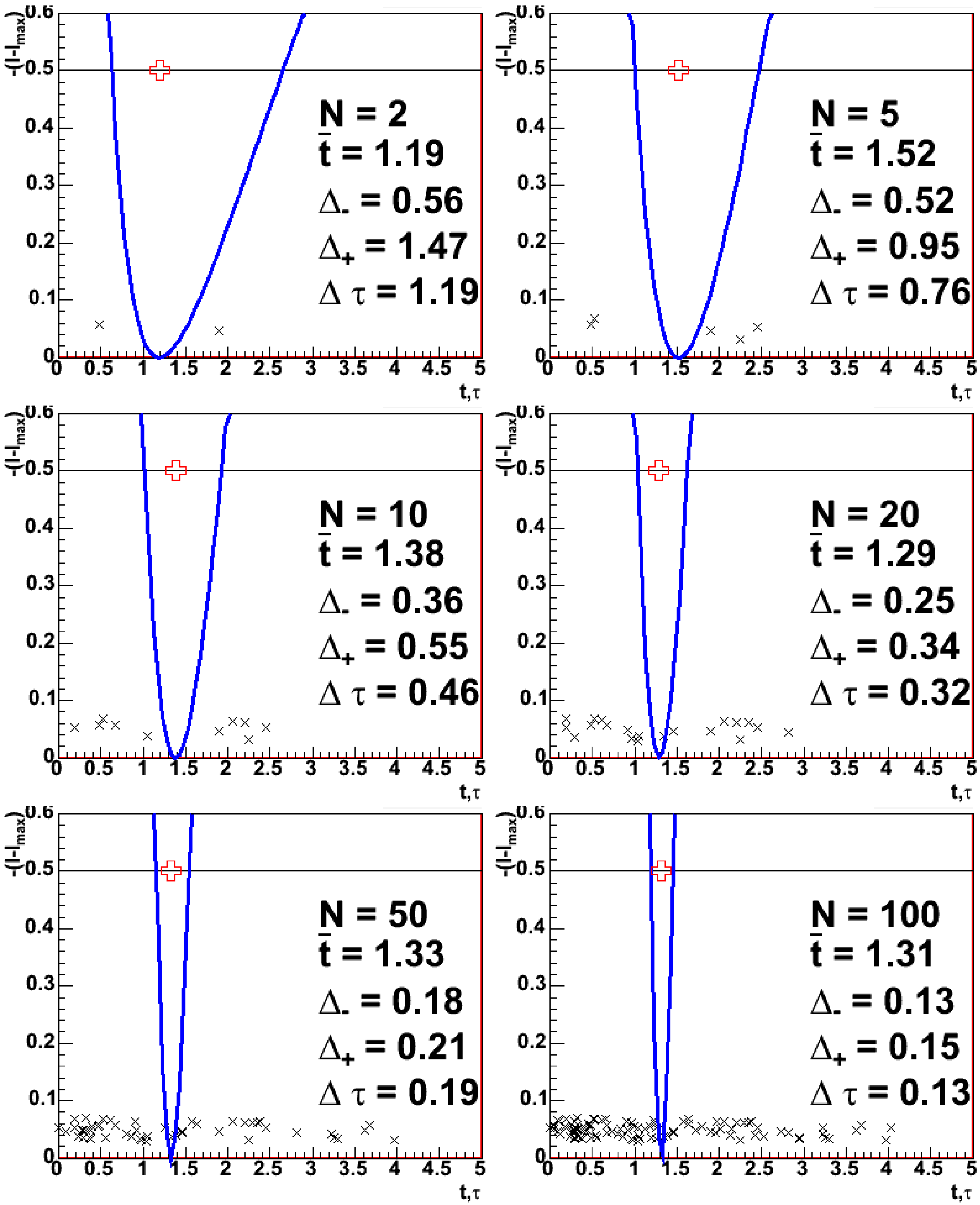
  $$\tilde{\lambda} - \sigma(\tilde{\lambda}) < \lambda_0 < \tilde{\lambda} + \sigma(\tilde{\lambda})$$

  z prawdopodobieństwem 68,3% ("1 sigma")
- Co zrobić? Jak żyć? :)
- Możemy jednak zdefiniować wartości τ_+ oraz τ_- takie, że:

  $$\tau_+ = \tilde{\tau} + \Delta_+ \qquad \tau_- = \tilde{\tau} + \Delta_-$$
- Które spełniają warunek: $-\left(l(\tau_\pm) - l(\tilde{\tau})\right) = \frac{1}{2}$
- Wzór ten definiuje **niepewności niesymetryczne (asymetryczne)**

- W granicy $N \to \infty$ oczekiwalibyśmy: $\Delta_-, \Delta_+ \to u(\tilde{\tau}) = \sigma(\tilde{\tau})$
- Patrz rysunek na następnym slajdzie

Przykład – wyznaczanie śr. czasu życia



- Rysunek przedstawia funkcję:

$$-(l-l_{max})=-(l(\tau)-l(\tilde{\tau}))$$

- Punkty τ_+ , τ_- znajdują się na przecięciu z prostą:

$$-(l(\tau)-l(\tilde{\tau}))=1/2$$

- Krzyżem jest zaznaczony punkt: $\tilde{\tau}=\bar{t}$
- Widzimy, że wraz ze zwiększaniem się N funkcja

$$-(l-l_{max})=-(l(\tau)-l(\tilde{\tau}))$$

- Coraz bardziej przybiera kształst symetrycznej paraboli a niepewności asymetryczne coraz mniej się różnią od siebie
- **Wniosek:** dla dużych prób f. wiaryg. ma rozkład Gaussa

Jednoczesna estymacja kilku parametrów

Jednoczesna estymacja kilku parametrów

- Jak już pamiętamy, w najogólniejszym przypadku mamy pewną ilość p parametrów $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_{1,}\lambda_{2,\ldots},\lambda_p)$, które chcemy estymować. Wtedy funkcja wiarygodności i równania wiarygodności:

$$L=\prod_{j=1}^{N} f(\boldsymbol{X}^{(j)};\boldsymbol{\lambda}) \qquad l=\ln L=\sum_{j=1}^{N}\ln f(\boldsymbol{X}^{(j)};\boldsymbol{\lambda}) \qquad \frac{\partial l}{\partial\lambda_i}=0,\quad i=1,2,\ldots,p$$

- Niestety, w przypadku wielu parametrów wszystko nam się komplikuje dodatkowo z uwagi na możliwe **korelacje pomiędzy parametrami**

- Analogicznie jak dla 1 parametru, rozwijamy funkcję wiarygodności:

$$L(X^{(1)},X^{(2)},\ldots,X^{(j)};\boldsymbol{\lambda})=\sum_{j=1}^{N}\ln f(X^{(j)};\boldsymbol{\lambda})$$

na szereg Taylora wokół punktu:

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}=(\tilde{\lambda}_{1,}\tilde{\lambda}_{2,\ldots},\tilde{\lambda}_p)$$

- Korzystając ze znikania 1-szych pochodnych dostajemy wtedy:

$$-\left(l(\boldsymbol{\lambda})-l(\tilde{\boldsymbol{\lambda}})\right)=1/2(\boldsymbol{\lambda}-\tilde{\boldsymbol{\lambda}})^T A(\boldsymbol{\lambda}-\tilde{\boldsymbol{\lambda}})+\ldots$$

- Gdzie macierz A:

$$-A=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_1^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_1\partial\lambda_p} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_2\partial\lambda_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_2\partial\lambda_p} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_p\partial\lambda_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_p\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_p^2} \end{pmatrix}$$

Jednoczesna estymacja kilku parametrów

- W granicy $N \rightarrow \infty$ można zastąpić macierz A odpowiednimi wartościami oczekiwanymi (niezależnymi od próby) $B = E(A)$
  - de facto zamieniamy $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ na $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_p$
- Jeśli zaniedbamy wyrazy wyższych rzędów w rozwinięciu na szereg Taylora, dostaniemy wówczas funkcję wiarygodności postaci:

$$L = k \exp\left(-1/2 (\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}})^T B (\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}})\right) \qquad C = B^{-1}$$

- Analogicznie jak dla jednego parametru, mamy tutaj p-wymiarowy rozkład normalny z macierzą kowariancji (dla estymatorów)
- Wariancje estymatorów największej wiarygodności dane są przez elementy diagonalne macierzy C: $\sigma^2(\tilde{\lambda}_i) = c_{ii}$
- Elementy pozadiagonalne są kowariancjami poszczególnych par estymatorów: $cov(\tilde{\lambda}_j, \tilde{\lambda}_k) = c_{jk}$ $\quad \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_p$
- Możemy zdefiniować **współczynnik korelacji między estymatorami**: $\rho(\tilde{\lambda}_j, \tilde{\lambda}_k) = \dfrac{cov(\tilde{\lambda}_j, \tilde{\lambda}_k)}{\sigma(\tilde{\lambda}_j)\sigma(\tilde{\lambda}_k)}$

Jednoczesna estymacja kilku parametrów

- Analogicznie jak w przypadku z jednym parametrem, niepewnością estymacji (typu A) będzie pierwiastek kwadratowy z wariancji estymatora:

$$u(\tilde{\lambda}_i) = \sigma(\tilde{\lambda}_i) = \sqrt{c_{ii}}$$

- W przypadku 1D stwierdziliśmy, że za pomocą estymatora i jego niepewności możemy zdefiniować przedział obejmujący wartość prawdziwą estymowanego parametru z prawdopodobieństwem 68,3%. W przypadku wielowymiarowym przedział ten będzie określony również przez pełną macierz kowariancji (zależności między parametrami)
- Innymi słowy: obszar taki sprowadza się do elipsy kowariancji, analogicznej jak dla zmiennych losowych – czyli mamy **elipsy kowariancji dla estymowanych parametrów naszego rozkładu**
- Równanie **elipsoidy kowariancji** (p-wymiarowa przestrzeń):

$$g(\lambda) = 1 = 2\{l(\lambda) - l(\tilde{\lambda})\} = (\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}})^T B(\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}})$$

- Dla $g(\lambda)=1$ mamy obszar ufności z prawdopodobieństwem 68,3%

Jednoczesna estymacja kilku parametrów - przykład

Jednoczesna estymacja kilku parametrów

- **Przykład:** badamy zasięg cząstek α w materii powstałych w wyniku rozpadu promieniotwórczego. Zasięg podlega rozkładowi normalnemu wokół wartości średniej $\rightarrow$ Innymi słowy, w wyniku eksperymentu mamy próbę losową o liczebności N z rozkładu normalnego

- Funkcja wiarygodności w tym przypadku:

$$L=\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\lambda_2\sqrt{2\pi}}\exp\frac{-\left(X^{(j)}-\lambda_1\right)^2}{2\lambda_2^2}\qquad l=\ln L=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(X^{(j)}-\lambda_1\right)^2}{2\lambda_2^2}-N\ln\lambda_2-const$$

- Układ równań wiarygodności:

$$\frac{\partial l}{\partial\lambda_1}=\sum_{j=1}^{N}\frac{X^{(j)}-\lambda_1}{2\lambda_2^2}=0\qquad \frac{\partial l}{\partial\lambda_2}=\frac{1}{\lambda_2^3}\sum_{j=1}^{N}\left(x^{(j)}-\lambda_1\right)^2-\frac{N}{\lambda_2}=0$$

- Rozwiązanie:

$$\tilde{\lambda}_1=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}X^{(j)}\qquad \tilde{\lambda}_2=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}\left(X^{(j)}-\lambda_1\right)^2}{N}}$$

Jednoczesna estymacja kilku parametrów

- Wyznaczamy macierz A, a następnie B i macierz C poprzez policzenie drugich pochodnych i w granicy $N \to \infty$ zastąpienie ich wartościami oczekiwanymi:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_1^2} = -\frac{N}{\lambda_2^2} \qquad \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = -\frac{2 \sum X^{(j)} - \lambda_1}{\lambda_2^3} \qquad \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_2^2} = -\frac{3 \sum \left(X^{(j)} - \lambda_1\right)^2}{\lambda_2^4} + \frac{N}{\lambda_2^2}$$

$$B = \begin{pmatrix} N/\tilde{\lambda}_2^2 & 0 \\ 0 & 2N/\tilde{\lambda}_2^2 \end{pmatrix} \qquad C = B^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_2^2/N & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2^2/2N \end{pmatrix}$$

- Elementy diagonalne macierzy C to odchylenia standardowe estymowanych parametrów
- Elementy pozadiagonalne wynoszą 0, zatem brak jest korelacji między estymowanymi parametrami

$$-\left(l(\boldsymbol{\lambda}) - l(\tilde{\boldsymbol{\lambda}})\right) = 1/2 (\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}})^T A (\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}) + \ldots$$

$$L = k \exp\left(-1/2 (\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}})^T B (\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}})\right) \qquad C = B^{-1}$$

$$B = E(A), \text{ dla } N \to \infty, \boldsymbol{\lambda} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$-A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_p} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_p} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_p \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_p \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_p^2} \end{pmatrix}$$

7.1 The Fit Method

The Fit method is implemented in ROOT for the histogram classes `TH1`, the sparce histogram classes, `THnSparse`, the graph classes, `TGraph`, `TGraph2D` and `TMultiGraph` for fitting a collection of Graphs with the same function.

7.1.1 The TH1::Fit Method

To fit a histogram programmatically, you can use the `TH1::Fit` method. Here is the signatures of `TH1::Fit` and an explanation of the parameters:

```
TFitResultPtr Fit(TF1 *function, Option_t *option, Option_t *goption,
         Axis_t xxmin, Axis_t  xxmax)
```

- `function` a pointer to the fitted function (the fit model) object. One can also use the function name. This name may be one of ROOT pre-defined function names or a user-defined function. See the next paragraph for the list of pre-defined functions.
- `*option:` The second parameter is the fitting option. Here is the list of fitting options:
  - " `W` " Set all weights to 1 for non empty bins; ignore error bars
  - " `WW` " Set all weights to 1 including empty bins; ignore error bars
  - " `I` " Use integral of function in bin instead of value at bin center
  - " `L` " Use log likelihood method (default is chi-square method). To be used when the histogram represents counts
  - " `WL` " Weighted log likelihood method. To be used when the histogram has been filled with weights different than 1.
  - " `P` " Use Pearson chi-square method, using expected errors instead of the observed one given by `TH1::GetBinError` (default case). The expected error is instead estimated from the the square-root of the bin function value.

Metoda najw. wiar. a programy do analizy

Example: Likelihood fit

- ***Use the pdf of observables and maximize the product of likelihoods.***
  - In practice: minimize the -2*logarithm of the likelihoods
- **Binned data**
  - Use Poisson pdf for bin content
  - **Example:** data normally distributed

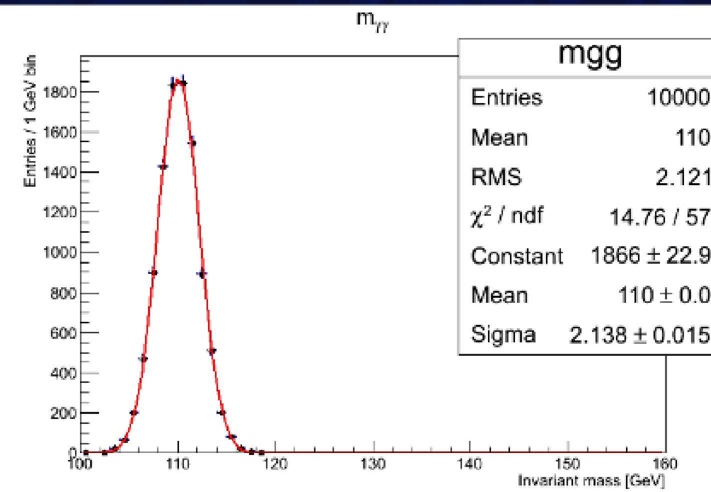
$$\mathcal{L} = \prod_{i=\text{bins}} \text{Poisson}\left[N_i^{\text{obs}}, A \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} \right) \right]$$

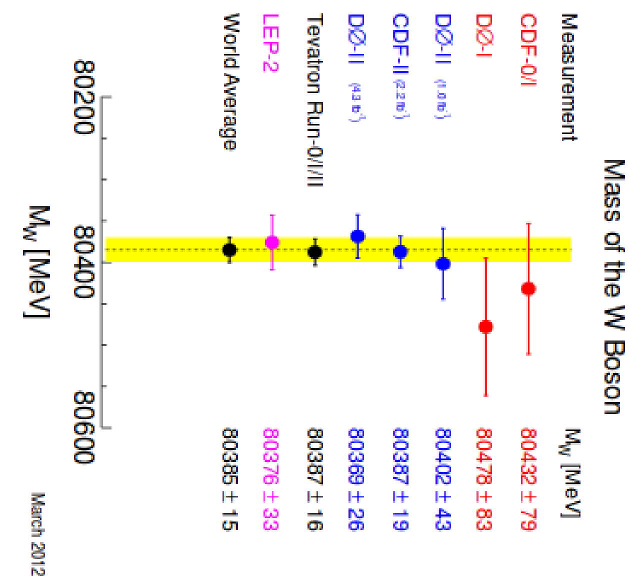
- **Unbinned data**
  - **Example:** normally distributed points about α

$$\mathcal{L} = \prod_{i=\text{measurements}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\alpha)^2}{\sigma_i^2} \right)$$

$$-2\ln\mathcal{L} = \sum_{i=\text{measurements}} \left[\frac{(x_i-\alpha)^2}{\sigma_i^2} + 2\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma_i\right) \right]$$

  - It looks familiar, doesn't it?
- **1σ uncertainty**: increase of $-2\ln\mathcal{L}$ by 1





Metoda najw. wiar. a programy do analizy

Simple fits

```
myh2->Fit("gaus","","",-2.,2.);
```

Function name | **Fit options** | **Plotting options** | **Fit range**

```
myh2->GetFunction("gaus")->Draw();
```

Retrieve a pointer to the fitted TF1

The ponter can be used to manipulate the function: plotting, changing style, inspecting parameters...

```
TFitResultPtr fitres = myh2->Fit("gaus","S");

fitres->Parameter(2);
fitres->ParError(2);
fitres->Chi2();
fitres->Ndf();
```

- Some predefined fit functions available:
  - Exponential
  - Gaussian
  - Landau
  - Polynomial (up to 9th degree)
- Most common options:
  - `"L"` likelihood fit
  - `"WL"` likelihood fit with weighed points
  - `"Q"` quiet mode: do not print info on screen
  - `"S"` save the results in a TFitResultPtr opbect.

KONIEC