

# Komputerowa analiza danych doświadczalnych

Wykład 4  
19.03.2019

Anna Chmiel na podstawie  
materiałów od Łukasz Graczykowski

## PLAN WYKLADU

Generacja liczb (pseudo)losowych  
za pomocą komputera

Metoda odwrotnej dyskutanta

Metody Monte Carlo

Transformacje liniowe

Propagacja niepewności

Generacja liczb (pseudo)losowych  
za pomocą komputera

# Liczby (pseudo)losowe

- Do tej pory zajmowaliśmy się jedynie opisem zmiennych losowych (ich właściwości) – nie zajmowaliśmy się tym, jak je otrzymać
- Bardzo często potrzebujemy jednak posłużyć się ciągiem (losowych) wartości jakiejś zmiennej losowej, która opisana jest danym rozkładem prawdopodobieństwa
- Metoda otrzymywania takich liczb może pochodzić z badania zjawiska fizycznego (np. rozpad promieniotwórczy, szumy fal elektromagnetycznych)
- Liczby takie możemy wygenerować również w komputerze – trzeba jednak pamiętać, że taki ciąg będzie ciągiem **pseudolosowym**, gdyż komputer cechuje się zachowaniem deterministycznym (można więc te liczby “przewidzieć”)
- Metody analizy danych z wykorzystaniem liczb (pseudo)losowych nazywamy **metodami Monte Carlo**



# Generatory liczb pseudolosowych

Komputer, urządzenie deterministyczne, może generować tylko liczby pseudolosowe

kolejna generowana liczba jest funkcją liczb wcześniej wygenerowanych

## Własności generatorów liczb pseudolosowych (GLP)

- **powtarzalność** –sekwencja wylosowanych liczb powinna być powtarzalna przy przyjęciu tej samej pierwszej wylosowanej liczby.
- **losowość** – GLP powinien generować niezależne, jednorodnie rozłożone liczby, które pozytywnie przechodzą wszelkie statystyczne testy na losowość.
- **Długi okres** – okres generatora powinien być znacznie dłuższy niż liczba potrzebnych w symulacji liczb losowych.
- **Nieczułość na warunek początkowy** – okres i własności losowe nie powinny zależności od wyboru warunku początkowego.

# Generatory liniowe kongruentne

- Generator liniowy kongruentny (*LCG – Linear Congruential Generator*)

$$x_{j+1} = (a \cdot x_j + c) \pmod{m}$$

- LCG generuje okresowy ciąg liczb (po jakimś czasie powtarza się)
- $m$  – maksymalna długość okresu generatora

Aby okres był jak najdłuższy

$c$  i  $m$  nie mogą mieć wspólnych dzielników

$b = a - 1$  jest wielokrotnością każdej liczby pierwszej  $p$ , która jest dzielnikiem  $m$ ,

$b$  jest wielokrotnością 4, o ile  $m$  jest również wielokrotnością 4

- Multiplikatywny generator liniowy kongruentny (*MLCG – multiplicative linear congruential generator*),  $c=0$ :

$$x_{j+1} = (a \cdot x_j) \pmod{m}$$

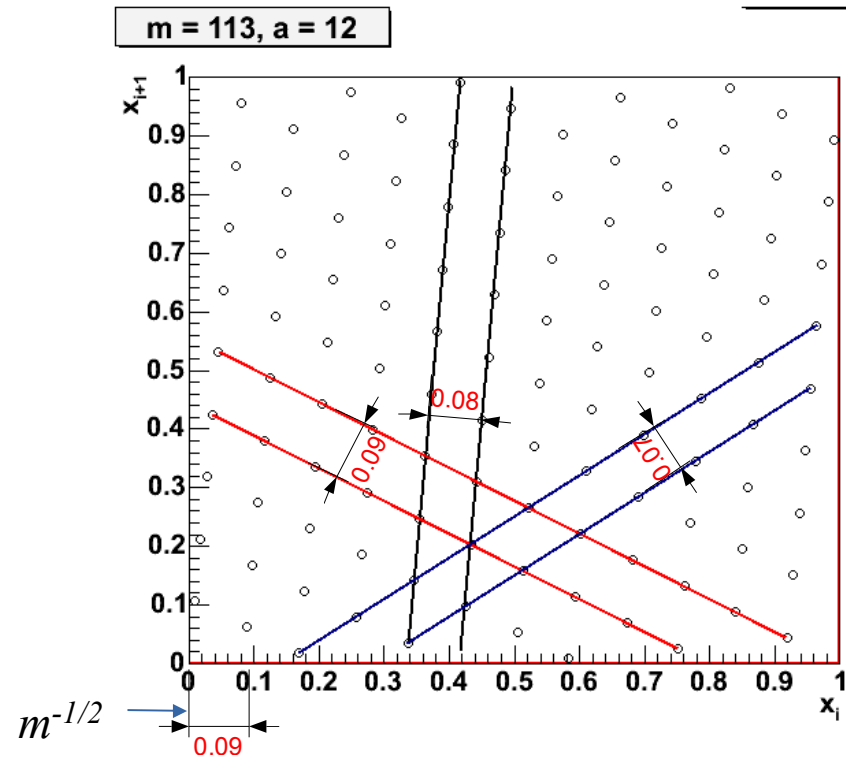
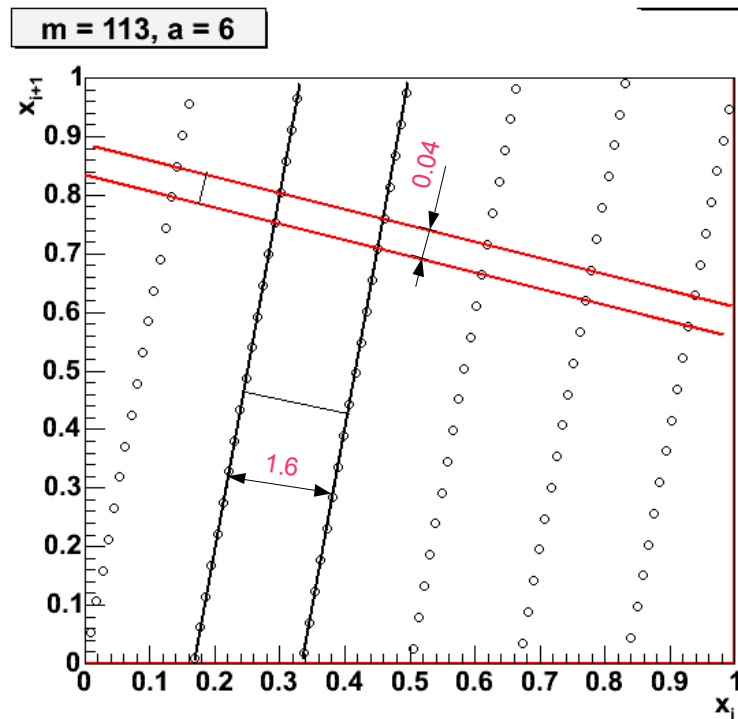
- szybsze od LCG, ale nigdy nie dają wartości 0 i mają krótkie okresy

# Jakość generatorów losowych

- Najdłuższy okres nie jest jedyną pożądaną cechą generatora
- Ważniejsze jest, aby liczby następujące po sobie występowały w sposób jak najbardziej “przypadkowy” - w tym celu wykonujemy tzw. **test widmowy**:
  - wykonujemy dwuwymiarowy wykres (sieć) par:  $(x_i, x_{i+1})$
  - obsadzamy  $m$  z  $m^2$  węzłów
  - szukamy prostych łączących obsadzone węzły sieci, a następnie wybieramy największą z odległości  $d_t$  między nimi
  - jeśli odległości między sąsiednimi prostymi są podobne  $\rightarrow$  jednostajny rozkład węzłów sieci (**tęgo oczekujemy!**)
  - oczekujemy, że:  $d_t \approx m^{-1/2}$
  - jeśli parametry  $a$  i  $m$  są źle dobrane, to:  $d_t \gg m^{-1/2}$

# Jakość generatorów losowych

- Najdłuższy okres nie jest jedyną porządaną cechą generatora
- Ważniejsze jest, aby liczby następujące po sobie występowały w sposób jak najbardziej “przypadkowy” - w tym celu wykonujemy tzw. **test widmowy**:
  - prawy – poprawny (dobre parametry), lewy - niepoprawny

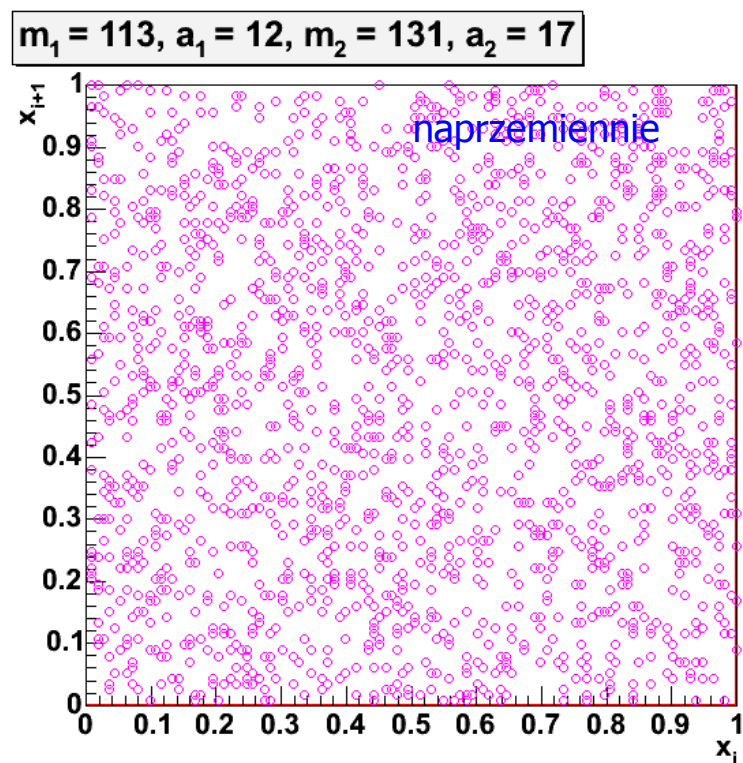
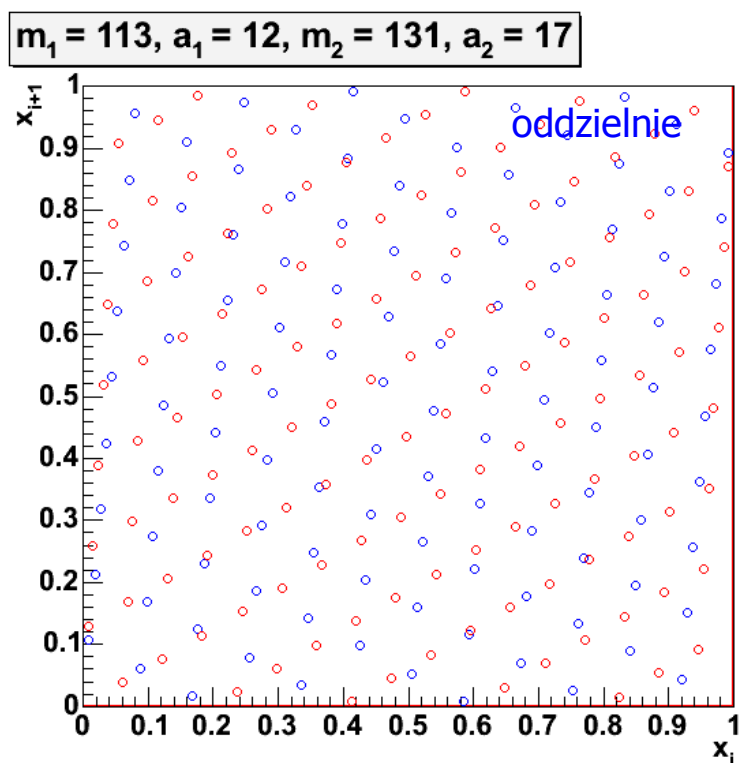




# Jakość generatorów losowych

- Najlepsze wyniki (długie okresy) można otrzymać łącząc ze sobą kilka (np.  $l$ ) generatorów liniowych (o różnych parametrach)

- Ich maksymalny okres wynosi wtedy: 
$$p = 2^{-(l-1)} \cdot \prod_{j=1}^l (m_j - 1)$$



Generacja liczb (pseudo)losowych  
metodą transformaty rozkładu  
jednorodnego

# Zamiana zmiennych

Dowolna funkcja zmiennej losowej  $X$  jest także zmienną losową:

$$Y = H(X)$$

**Pytanie:** jaka jest gęstość prawdopodobieństwa  $g(y)$ , jeżeli znana jest gęstość prawdopodobieństwa  $f(x)$  i oczywiście funkcja  $Y=H(X)$ ?

- dla infinitesimalnie małego przedziału zmienności prawdopodobieństwa są równe:

$$f(x)dx = g(y)dy$$

- Jeśli jest  $H(x)$  ciągła i jednoznaczna, to możemy zapisać :

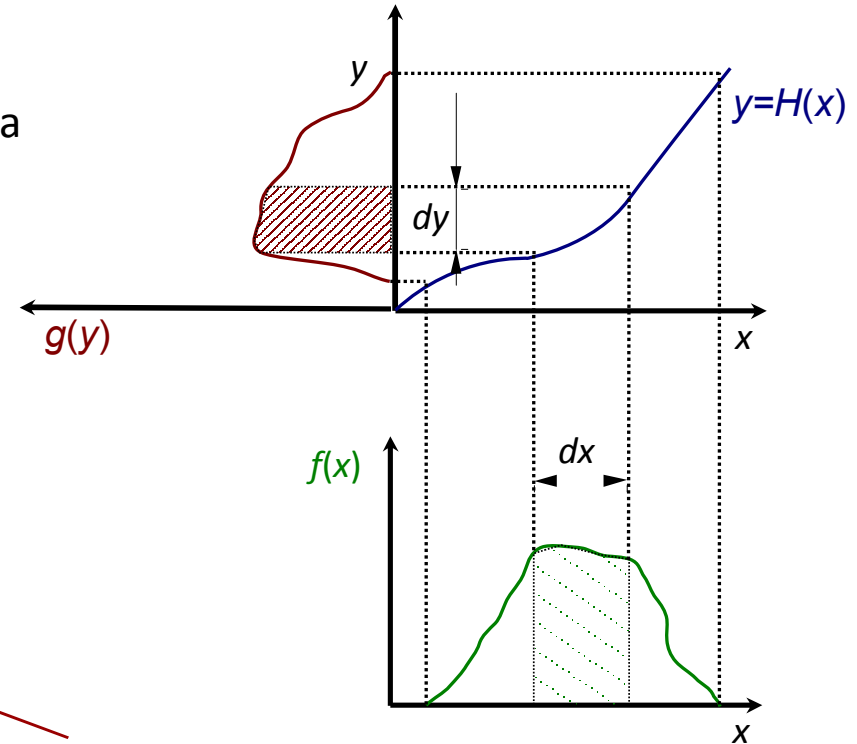
pochodna funkcji

$$Y = H(X) \quad \xrightarrow{\text{pocho.}} \quad dy = \left| \frac{dy}{dx} \right| dx \quad dx = \left| \frac{dx}{dy} \right| dy$$

- Zapis w postaci wartości bezwzględnych odzwierciedla fakt, że nie jest istotny zwrot  $dx$  i  $dy$  oraz, że gęstości prawdopodobieństw nie mogą być ujemne.

- **zatem rozkłady są powiązane:**

$$g(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right| f(x)$$



pocho. funkcji

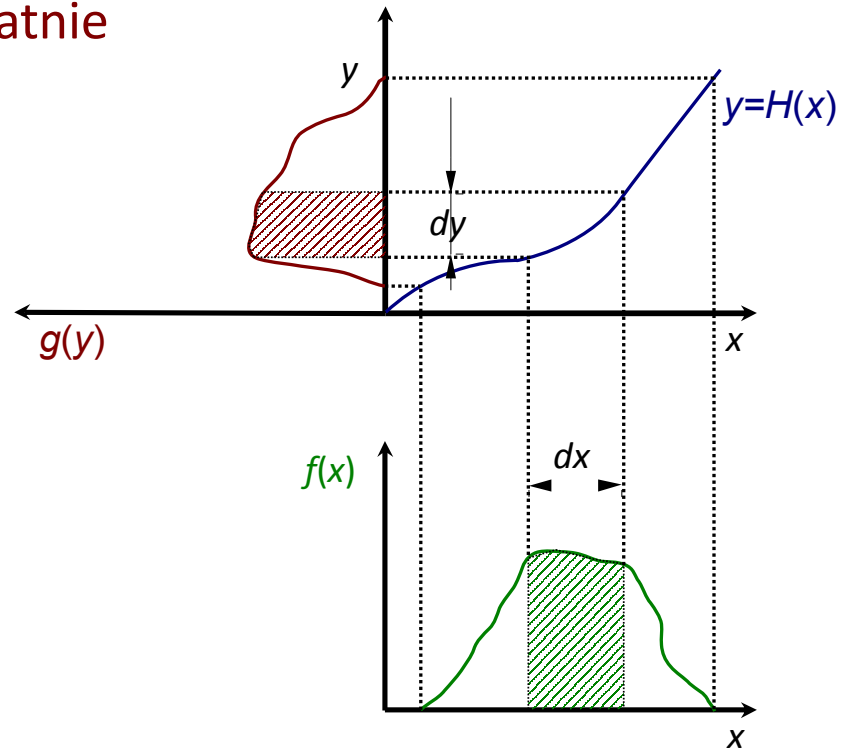
$$X = H^{-1}(Y)$$

# Zamiana zmiennych

- Warunki:

- funkcja  $Y=H(X)$  musi być wzajemnie jednoznaczna (musi istnieć funkcja odwrotna)
- funkcje wieloznaczne (np.  $y = \sqrt{(x)}$ ) rozpatrujemy oddzielnie – tylko te części, które są dodatnie
- rozkłady są unormowane:  $y = +\sqrt{(x)}$

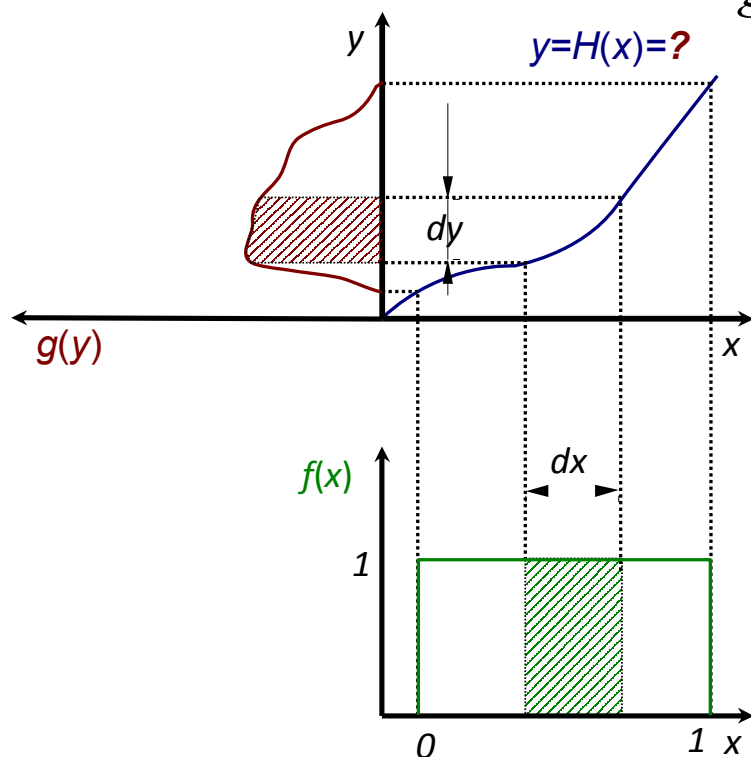
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$



# Zamiana zmiennych – przykład szczególny

- **Pytanie:** mamy zmienną losową  $X$  opisaną rozkładem jednorodnym  $f(x)=1$  na przedziale od 0 do 1. Jaka będzie postać funkcji  $Y=H(X)$ , aby otrzymać zadany (znany) rozkład  $g(y)$ ?

– metoda odwracania dystrybuanty



$$f(x)dx = g(y)dy$$

$$gdy \quad f(x) \equiv 1 \Rightarrow dx = g(y)dy = dG(y)$$

$$g(y) = G'(y)$$

$$\int dx = \int dG(y)$$

$$x = G(y)$$

↑  
dystrybuanta

←  
musi istnieć

$$y = G^{-1}(x) \equiv H(x)$$

$$x_{min} = G(y_{min}), \quad x_{max} = G(y_{max})$$

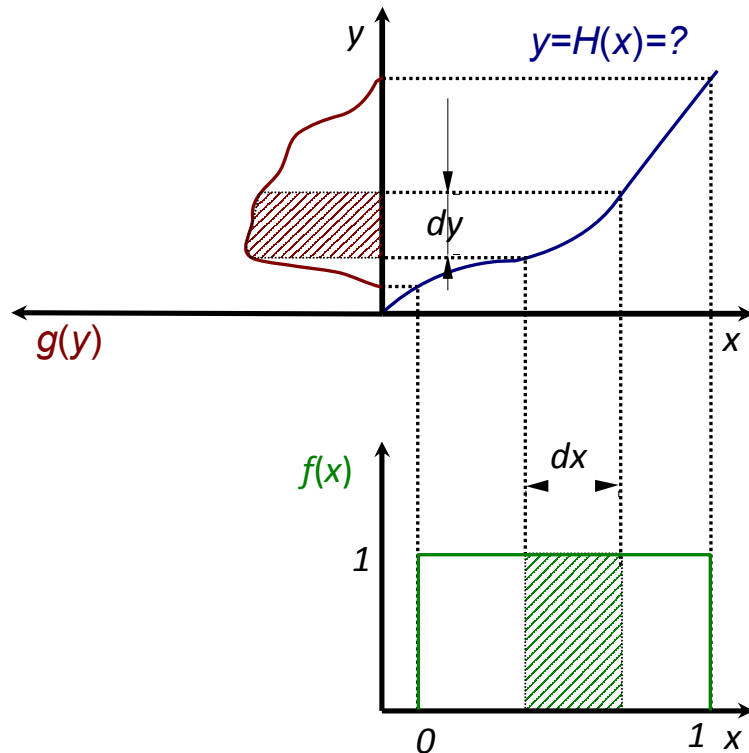
$$y_{min} = G^{-1}(0), \quad y_{max} = G^{-1}(1)$$

Czyli: liczymy dystrybuantę  $x=G(y)$   
a następnie funkcję odwrotną  $y=G^{-1}(x)$

Zmienna losowa  $X$  po transformacji  
 $Y=G^{-1}(X)$  ma rozkład  $g(y)$

# Transformacja rozkładu jednorodnego

- **Metoda z odwrotnością dystrybuanty**
- Transformację rozkładu jednostajnego możemy wykorzystać do generowania liczb losowych o skomplikowanych gęstościach prawdopodobieństwa



$$f(x)dx = g(y)dy$$

$$\text{gdy } f(x) \equiv 1 \Rightarrow dx = g(y)dy = dG(y)$$

$$g(y) = G'(y)$$

↑  
dystrybuanta

$$\int dx = \int dG(y)$$

$$x = G(y)$$

↖ musi istnieć

$$y = G^{-1}(x) \equiv H(x)$$

$$x_{min} = G(y_{min}), x_{max} = G(y_{max})$$

$$y_{min} = G^{-1}(0), y_{max} = G^{-1}(1)$$

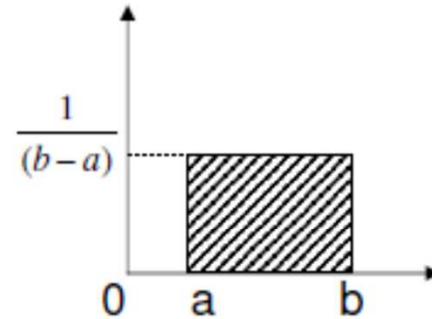
Czyli: liczymy dystrybuantę  $G(y)$   
a następnie funkcję odwrotną  $G^{-1}(y)$

Zmienna losowa  $X$  po transformacji  
 $y = G^{-1}(x)$  ma rozkład  $g(y)$

Rozważmy zmienną losową  $X$  jednorodnie rozłożoną na przedziale  $[a, b]$ .

Funkcja gęstości  $X$  ma postać

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$



Dystrybuanta ma postać

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Zatem

$$F(X) = \frac{X-a}{b-a} = U$$

Odwracając

$$X = a + (b-a)U$$

## Przykład: rozkład wykładniczy

Gęstość rozkładu wykładniczego

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

Liczmy dystrybuantę

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x'} dx' = -e^{-\lambda x'} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

Zatem

$$U = F(X) = 1 - e^{-\lambda X}$$

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$$



# Przykład – rozkład Breita-Wignera

- Rozkład Breita-Wignera ma następującą postać:

$$g(y) = \frac{2}{\pi\Gamma} \cdot \frac{\Gamma^2}{4(y-a)^2 + \Gamma^2}$$

- Liczmy dystrybuantę:

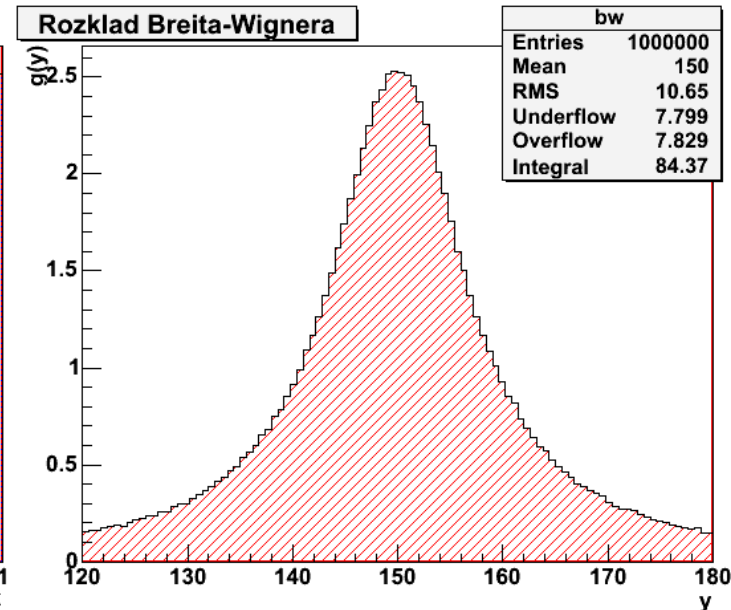
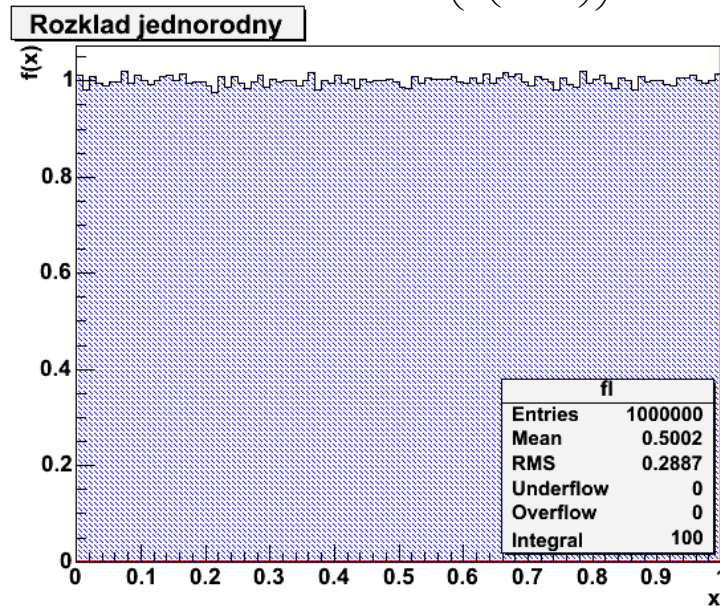
$$x = G(y) = \frac{2}{\pi\Gamma} \cdot \int_{-\infty}^y \frac{\Gamma^2}{4(z-a)^2 + \Gamma^2} dz = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2(y-a)}{\Gamma}\right) + \frac{1}{2}$$

- Odwrotna dystrybuanta:

$$y(x) = G^{-1}(x) = a + \frac{\Gamma}{2} \operatorname{tg}\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$y(0) = -\infty$$

$$y(1) = \infty$$

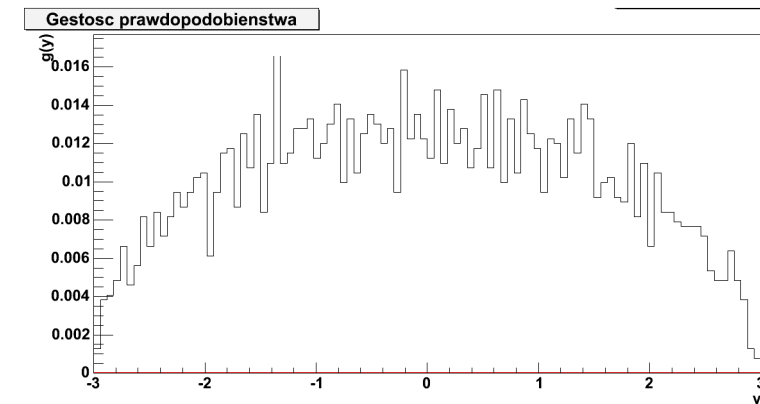
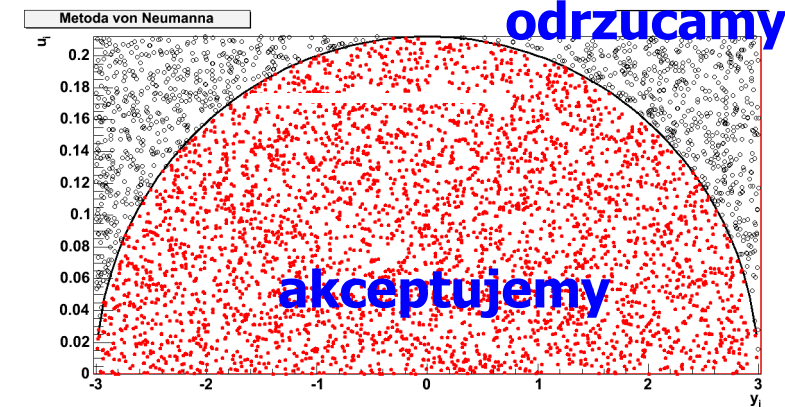


# Metoda akceptacji-odrzuceń von Neumanna

# Metoda (akceptacji) von Neumanna



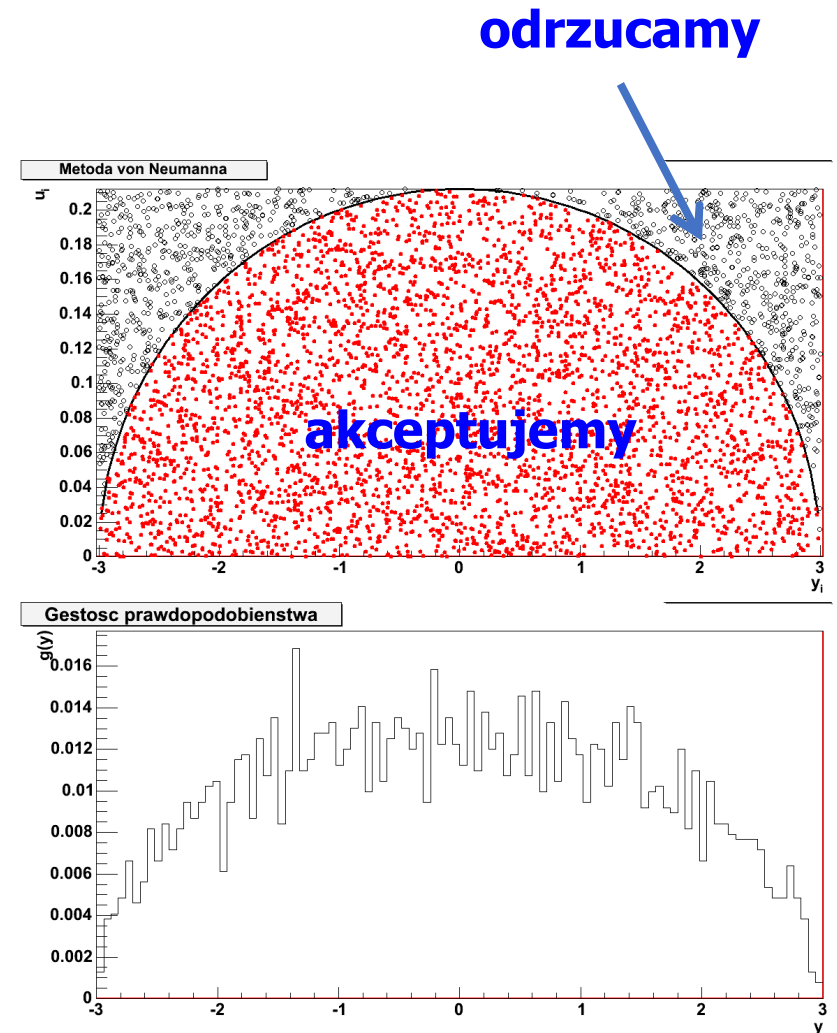
- Metoda generacji liczb metodą odwrotnej dystrybuanty ma swoje ograniczenia – dystrybuanta musi być znana (i być funkcją wzajemnie jednoznaczną), czyli musi istnieć funkcja odwrotna
- Metoda (akceptacji-odrzuceń) von Neumanna wymaga znajomości jedynie gęstości prawdopodobieństwa i pozwala na otrzymanie liczb z praktycznie dowolnego rozkładu



# Metoda (akceptacji) von Neumanna

- Jak to działa?

- generujemy parę liczb z rozkładu jednorodnego  $(y_i, u_i)$
- sprawdzamy, czy  $u_i < g(y_i)$
- jeśli warunek jest spełniony, akceptujemy liczbę  $y_i$ , jeśli nie - odrzucamy



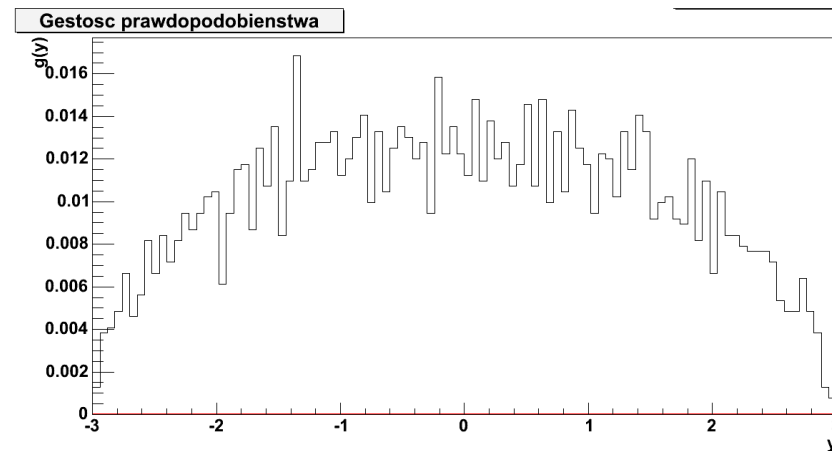
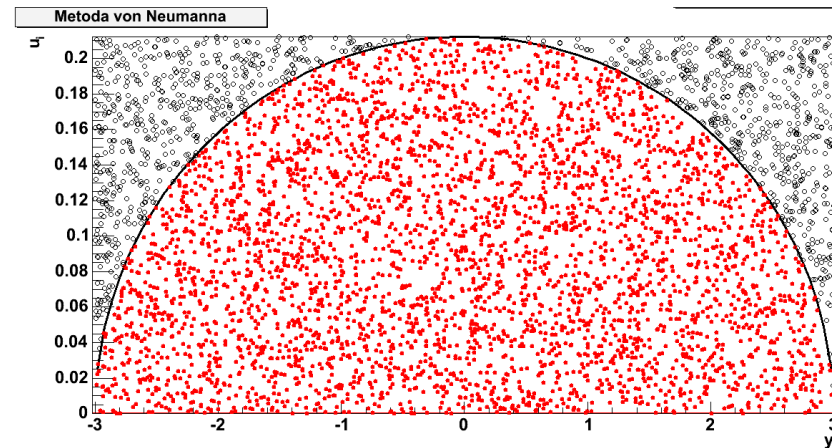
# Metoda von Neumanna - definicje

- Geometryczny opis metody von Neumanna:
  - chcemy wygenerować liczby losowe opisane gęstością  $g(y)$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$
  - rozważamy krzywą:  $u = g(y)$  oraz funkcję stałą:  $u = d, d \leq g_{max}$
  - losujemy z rozkładu jednorodnego liczby  $(y_i, u_i)$ , które spełniają warunki:  
 $a \leq y_i \leq b, 0 \leq u_i \leq d$
  - jak łatwo zauważyć, nasze punkty układają się w prostokącie na płaszczyźnie
  - odrzucaamy wszystkie punkty spełniające nierówność:  $u_i \geq g(y_i)$
  - pozostają jedynie punkty położone pod krzywą:  $u = g(y)$
  - zaakceptowane wartości  $y_i$  podlegają rozkładowi  $g(y)$

# Metoda von Neumanna - definicje

- Wada metody: w zależności od kształtu funkcji  $g(y)$ , znaczna część liczb  $y_i$  jest odrzucana
- Wydajność metody:

$$E = \frac{\int_a^b g(y) dy}{(b-a)d}$$



# Metoda von Neumanna – przypadek nD

- Metodę von Neumanna można uogólnić na wiele wymiarów:
  - mamy funkcję gęstości wielu zmiennych:  $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$
  - generujemy zbiór liczb z rozkładu jednorodnego:  $(y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i, u^i)$
  - dla każdego  $i$  sprawdzamy warunek akceptacji:  $u^i < g_{\max}(y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i)$
  - akceptujemy lub odrzucamy cały zestaw wygenerowanych liczb dla danego  $i$
- Kilka uwag do metody von Neumanna:
  - za jej generować możemy liczby z dowolnego, nawet bardzo skomplikowanego rozkładu
  - rozkład (czy w ogólności funkcja)  $g(y)$  nie musi być nawet unormowany
  - metodę tę można stosować do **obliczania całek oznaczonych**:

$$E = \frac{\int_a^b g(y) dy}{(b-a)d} \approx \frac{N_{\text{zaakceptowane}}}{N_{\text{wszystkie}}}$$

$$I = \int_a^b g(y) dy \approx \frac{N_{\text{zaakceptowane}}}{N_{\text{wszystkie}}} (b-a)d$$

# Metoda von Neumanna z funkcją pom.

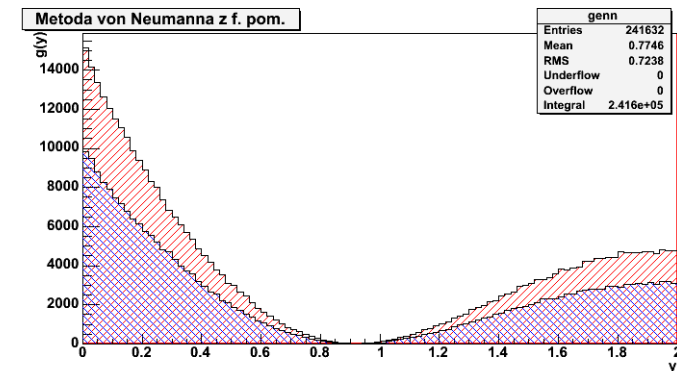
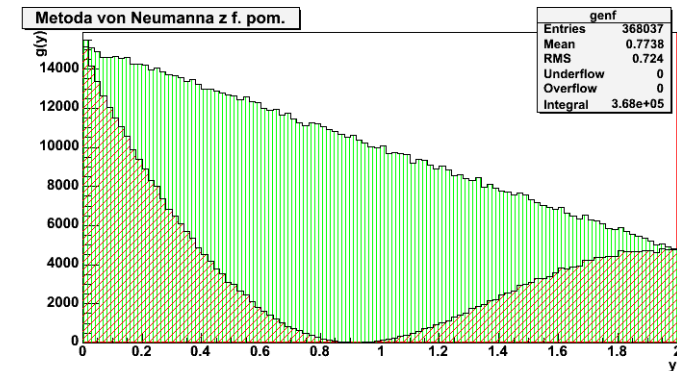
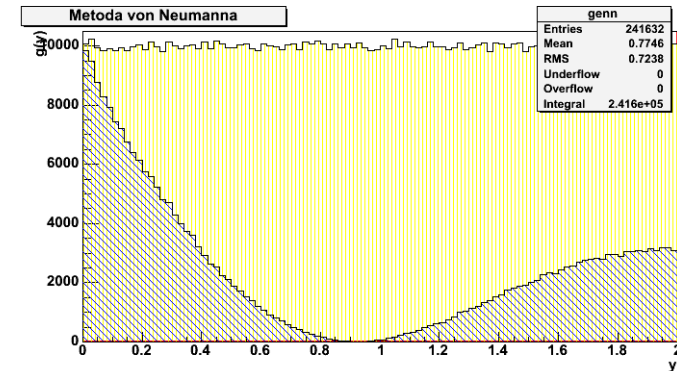
• Wydajność metody von Neumanna można poprawić, jeśli odpowiednio zawężymy obszar losowania:

- wprowadzamy funkcję pomocniczą  $s(y)$ , z której “łatwo” wygenerować zmienne losowe (np. metodą odwrotnej dystrybuanty), i która spełnia warunek:

$$g(y) \leq c \cdot s(y), a < y < b$$

- generujemy liczbę losową  $y_i$  z rozkładu  $s(y)$  na przedziale  $a < y_i < b$  oraz liczbę  $u_i$  z rozkładu jednorodnego na przedziale  $0 < u_i < 1$
- odrzucaamy liczbę  $y_i$ , jeżeli:

$$u_i \geq \frac{g(y_i)}{c \cdot s(y_i)}$$

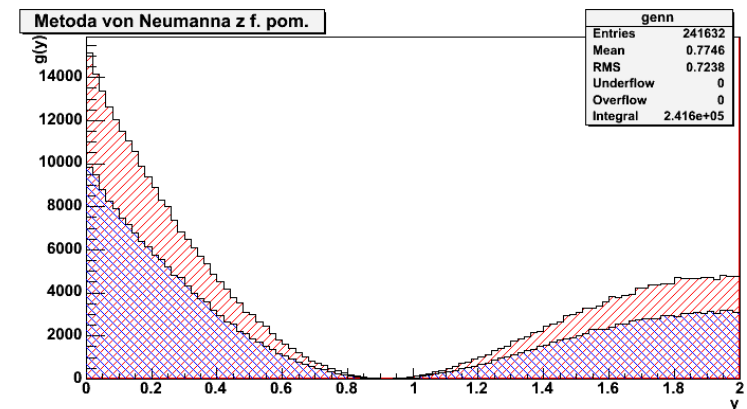
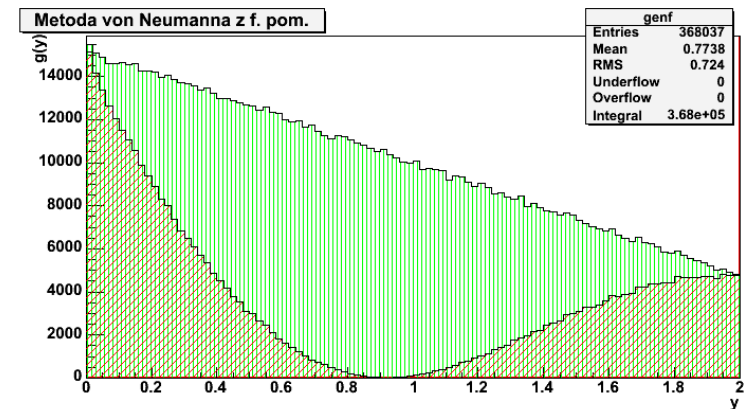
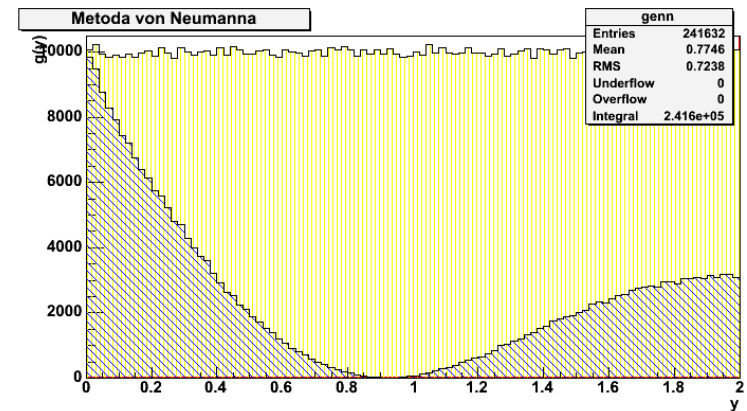




# Metoda von Neumanna z funkcją pomocniczą

wydajność metody:

$$E = \frac{\int g(y)dy}{c \int s(y)dy}$$

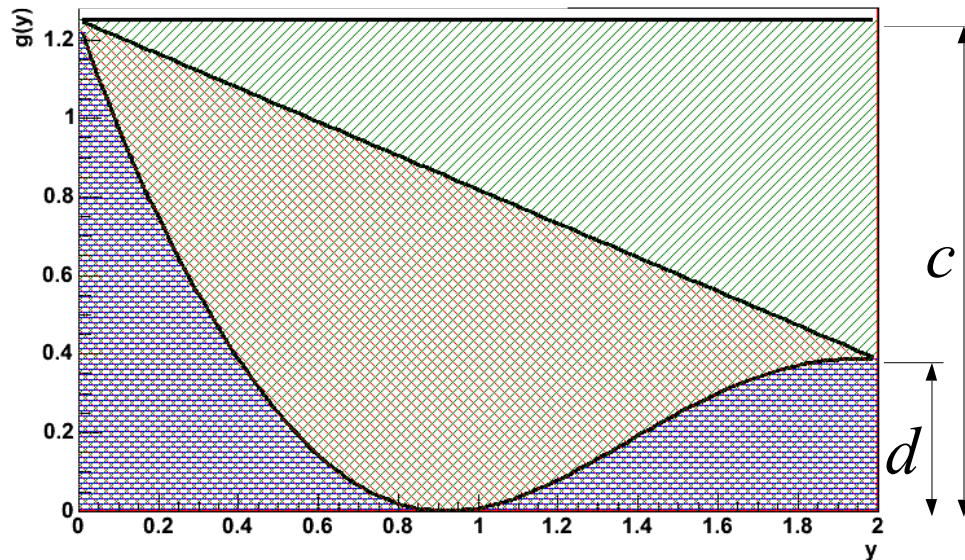


# Metoda von Neumanna z funkcją pom.

- Rozważmy funkcję gęstości postaci:

$$g(y) = \cos(\pi y) / (\pi y + 1) + 1/4, 0 < y < 2$$

- Funkcja ta, w przedziale od 0 do 2, ma dwa maksima:  $g(0) = c$ ,  $g(2) = d$
- W zwykłej metodzie von Neumanna wybieramy prostą:  $u_{max} = c$
- Tutaj możemy łatwo wybrać funkcję pomocniczą  $s(y)$  jako prostą przechodzącą przez punkty  $(0, c)$  i  $(2, d)$



- Aby otrzymać wzór  $s(y)$  rozważamy układ równań:

$$c = a \cdot 0 + b$$

$$d = a \cdot 2 + b$$

- Z czego wzór na  $s(y)$ :

$$s(y) = \frac{d - c}{2} y + c$$

- Jak otrzymać wartość losową z tego rozkładu?**

# Metoda von Neumanna z funkcją pom.

- **Metodą odwrotnej dystrybuanty!**

- Liczymy dystrybuantę:

$$S(y) = \frac{d-c}{4}y^2 + cy$$

- Oraz jej funkcję odwrotną:

$$y = S^{-1}(x) = 2 \frac{c^2 - \sqrt{xc(d-c) + (d-c)^2}}{c(c-d)}$$

- Losujemy wartość z rozkładu jednorodnego w granicach:

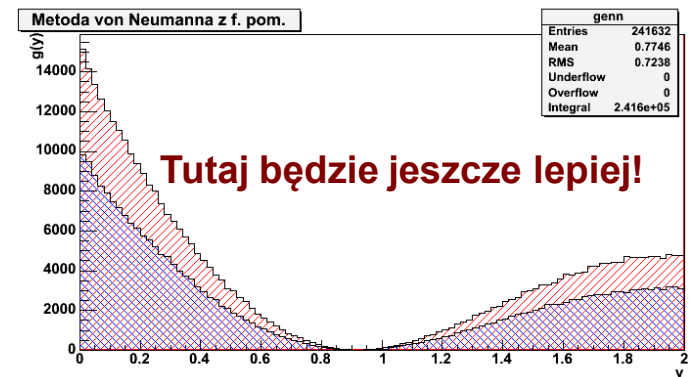
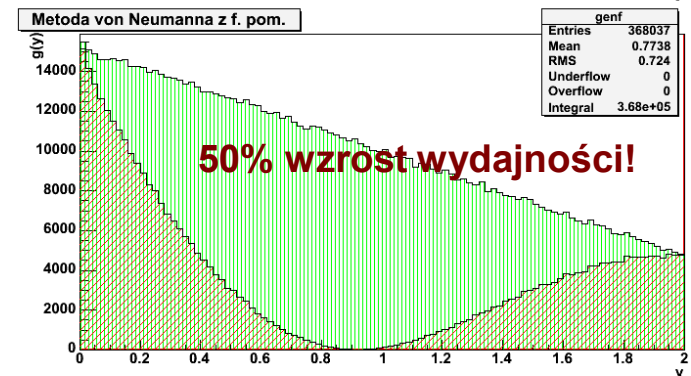
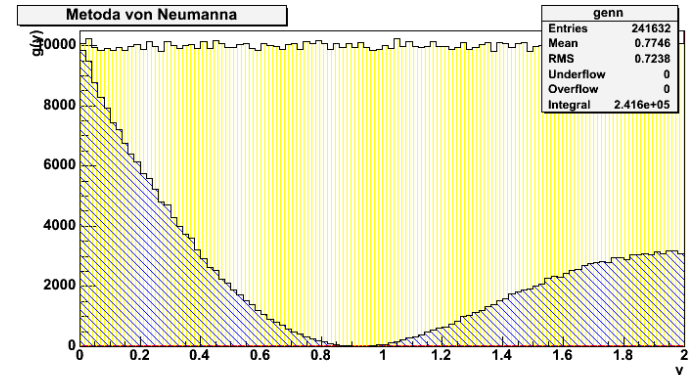
$$S(0) = 0, S(2) = d + c$$

- I wstawiamy ją do wzoru na odwrotną dystrybuantę by otrzymać  $y_i$  z rozkł.  $s(y)$

- Losujemy pomocniczą wartość  $u_i$  z rozkładu jednorodnego  $0 < u_i < 1$

- Sprawdzamy warunek akceptacji  $y_i$ :

$$u_i < \frac{g(y_i)}{s(y_i)}$$



Transformacje liniowe  
Propagacja niepewności

# Transformacje liniowe

- Najczęściej, ze względu na prostotę, posługujemy się **transformacjami liniowymi** (inne transformacje najczęściej aproksymujemy liniowymi, rozwijając na szereg Taylora)

– funkcje  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$  są liniowymi funkcjami zmiennych  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$Y_1 = a_1 + t_{11}X_1 + t_{12}X_2 + \dots + t_{1n}X_n$$

$$Y_2 = a_2 + t_{21}X_1 + t_{22}X_2 + \dots + t_{2n}X_n$$

□

$$Y_r = a_r + t_{r1}X_1 + t_{r2}X_2 + \dots + t_{rn}X_n$$

- W zapisie macierzowym:  $Y = T X + a$

- Wartość oczekiwana  $Y$ :  $E(Y) = y = T x + a$

- Macierz kowariancji  $Y$ :  $C_Y = E((Y - y)(Y - y)^T)$

$$C_Y = E((TX + a - Tx - a)(TX + a - Tx - a)^T)$$

$$C_Y = E(T(X - x)(X - x)^T T^T)$$

$$C_Y = TE((X - x)(X - x)^T)T^T$$

$$C_Y = TC_X T^T$$

**Jest to przypadek ogólny – zmienne  $X$  nie są niezależne (istnieją kowariancje)**

Mierzmy pośrednio wielkość (wielkości) fizyczną  $Y$ , która zależy od wielkości fizycznych  $X$  mierzonych bezpośrednio, które nie są niezależne od siebie.

# Propagacja niepewności

- Załóżmy, że znamy pewne wartości oczekiwane (wyniki pomiarów)  $\hat{x}_i$ , oraz ich niepewności  $\sigma(x_i)$  i kowariancje  $cov(x_i, x_j)$ . Szukamy niepewności funkcji:  $Y(x)$
- Jeśli niepewności są małe, to możemy dokonać rozwinięcia na szereg Taylora wokół wartości oczekiwanych:

$$Y_i = Y_i(x) + \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \right)_{x=x} (X_1 - x_1) + \dots + \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \right)_{x=x} (X_n - x_n) + \text{wyrazy wyższego rzędu}$$

– w notacji macierzowej:  $Y = Y(\hat{x}) + T(X - \hat{x}) + \text{wyrazy wyższego rzędu}$

– gdzie:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & i & i & i \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{X=x}$$

# Propagacja niepewności

- Niepewności  $Y$  to elementy diagonalne macierzy kowariancji:

$$C_Y = TC_X T^T$$

- jak widać, zależą one nie tylko od elementów diagonalnych macierzy  $C_X$ , ale również od jej elementów pozadiagonalnych
- tylko i wyłącznie jeżeli wszystkie zmienne  $X$  są niezależne, tj.  $c_{ij}=0$ , dla  $i \neq j$  możemy zapisać:

$$\sigma^2(Y_i) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^2 \sigma^2(X_j)$$

- co daje nam **prawo propagacji niepewności** znane

$$\sigma(y_i) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^2 \sigma^2(x_j)}$$

# Znaczenie macierzy kowariancji - przykład

- Mierzymy w układzie kartezjańskim współrzędne punktu  $(x,y)$ . Pomiar  $x$  i  $y$  są niezależne. Z jakiejś przyczyny (np. w celu porównania z przewidywaniami teoretycznymi) potrzebujemy jednak wynik we współrzędnych biegunowych.
- Z powodu np. innego przyrządu pomiarowego pomiar daje trzykrotnie większą niepewność współrzędnej  $y$  niż  $x$ .

$$C_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

- Wtedy macierz kowariancji może wyglądać np. tak:

- Dokonyjemy transformacji na współrzędne biegunowe:

$$r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad x(r, \theta) = r \cdot \cos \theta \quad y(r, \theta) = r \cdot \sin \theta$$

- Policzmy macierz transformacji (dla prostoty – w punkcie  $(1,1)$ )

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad T^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C_r = T C_{xy} T^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$



# Znaczenie macierzy kowariancji - przykład

- Macierz kowariancji dla zmiennych biegunowych:

$$C_r = TC_{xy}T^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

- Widzimy, że **nie są one niezależne**

- Licząc w drugą stronę:

- **Pozadiagonalne elementy macierzy kowariancji są BARDZO WAŻNE**

$$T^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -r\sin \\ -\sin & r\cos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{xy} = T^T C_r T^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

**ŹLE!** gdyby uwzględnić tylko diagonalne niepewności są zupełnie inne



$$C_{xy} = T^T C_r T^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

**KONIEC**