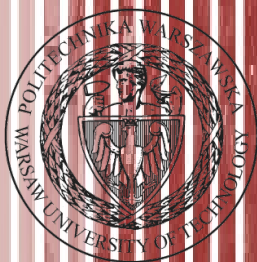


# Komputerowa analiza danych doświadczalnych

Wykład 4  
15.03.2019

dr inż. Łukasz Graczykowski  
[lukasz.graczykowski@pw.edu.pl](mailto:lukasz.graczykowski@pw.edu.pl)

*Semestr letni 2018/2019*

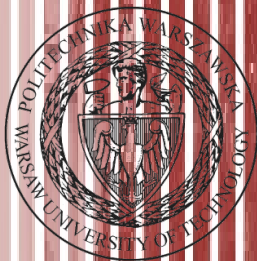


# Zamiana zmiennych

## Transformacje liniowe

## Propagacja niepewności

## Metody Monte Carlo



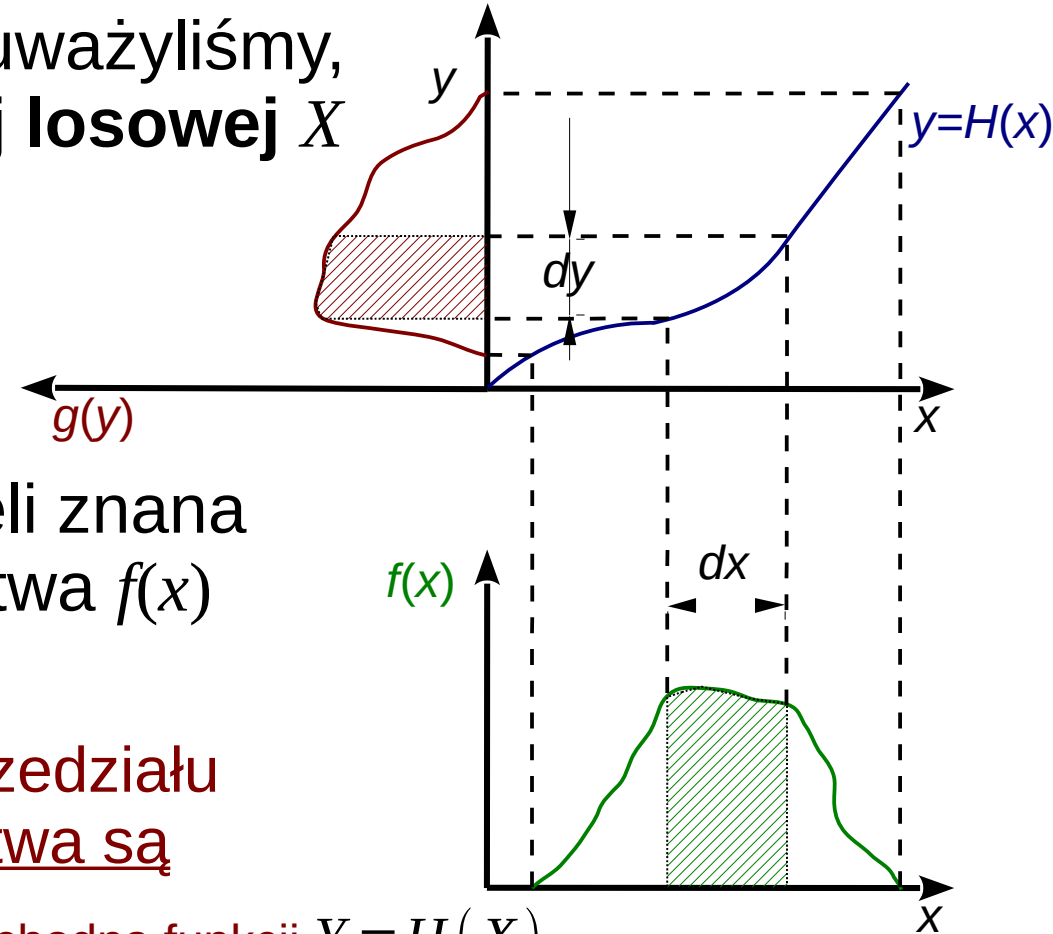
# Zamiana zmiennych

# Zamiana zmiennych

- Na poprzednich wykładach zauważyliśmy, że **dowolna funkcja zmiennej losowej  $X$  jest także zmienną losową**:

$$Y = H(X)$$

- Pytanie:** jaka jest gęstość prawdopodobieństwa  $g(y)$ , jeżeli znana jest gęstość prawdopodobieństwa  $f(x)$  i oczywiście funkcja  $Y = H(X)$ ?



- dla infinitesimalnie małego przedziału zmienności prawdopodobieństwa są

równe:  $f(x)dx = g(y)dy$

- z tego wynika:

$$dy = \left| \frac{dy}{dx} \right| dx$$

← pochodna funkcji  $Y = H(X)$

$$dx = \left| \frac{dx}{dy} \right| dy$$

← pochodna funkcji  $X = H^{-1}(Y)$

- zatem rozkłady są powiązane:  $g(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right| f(x)$

# Zamiana zmiennych

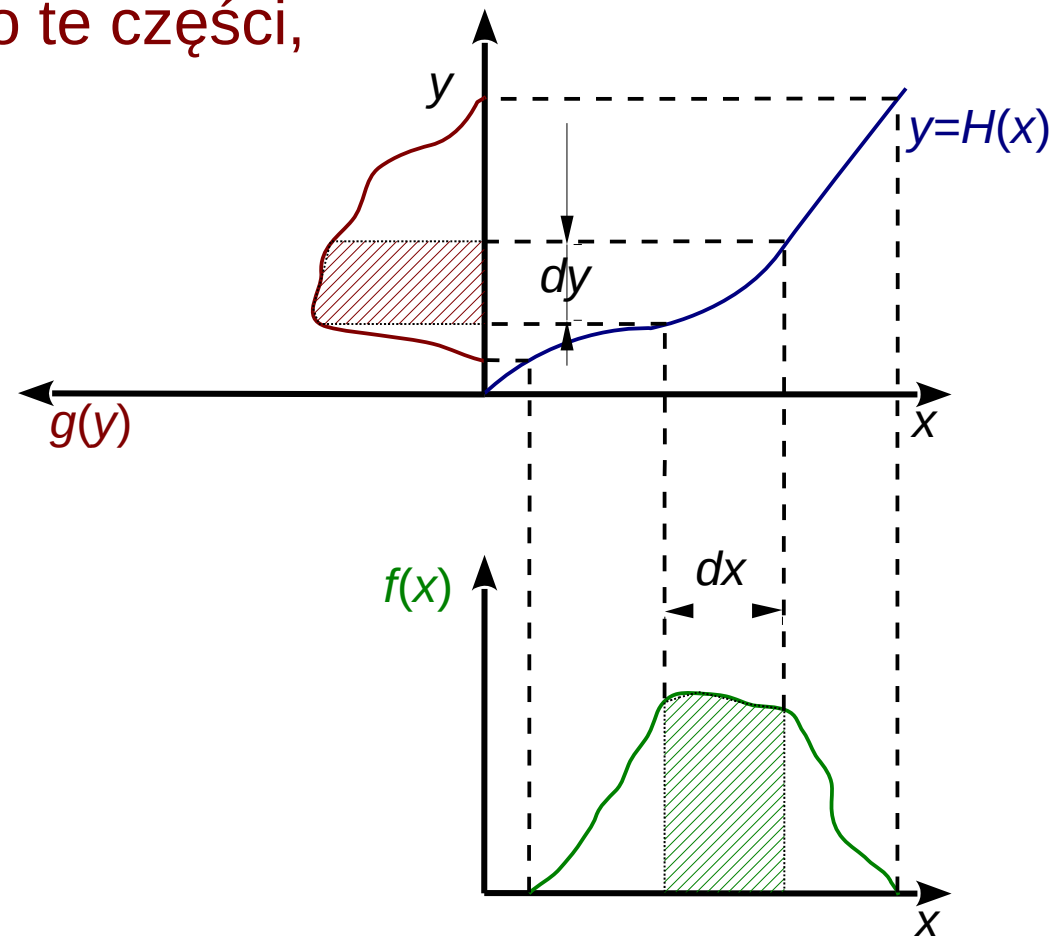
- Warunki:

- funkcja  $Y=H(X)$  musi być wzajemnie jednoznaczna (musi istnieć funkcja odwrotna)

- funkcje wieloznaczne (np.  $y=\sqrt{(x)}$  )  
rozpatrujemy oddzielnie – tylko te części,  
które są dodatnie  $y=+\sqrt{(x)}$

- rozkłady są unormowane:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

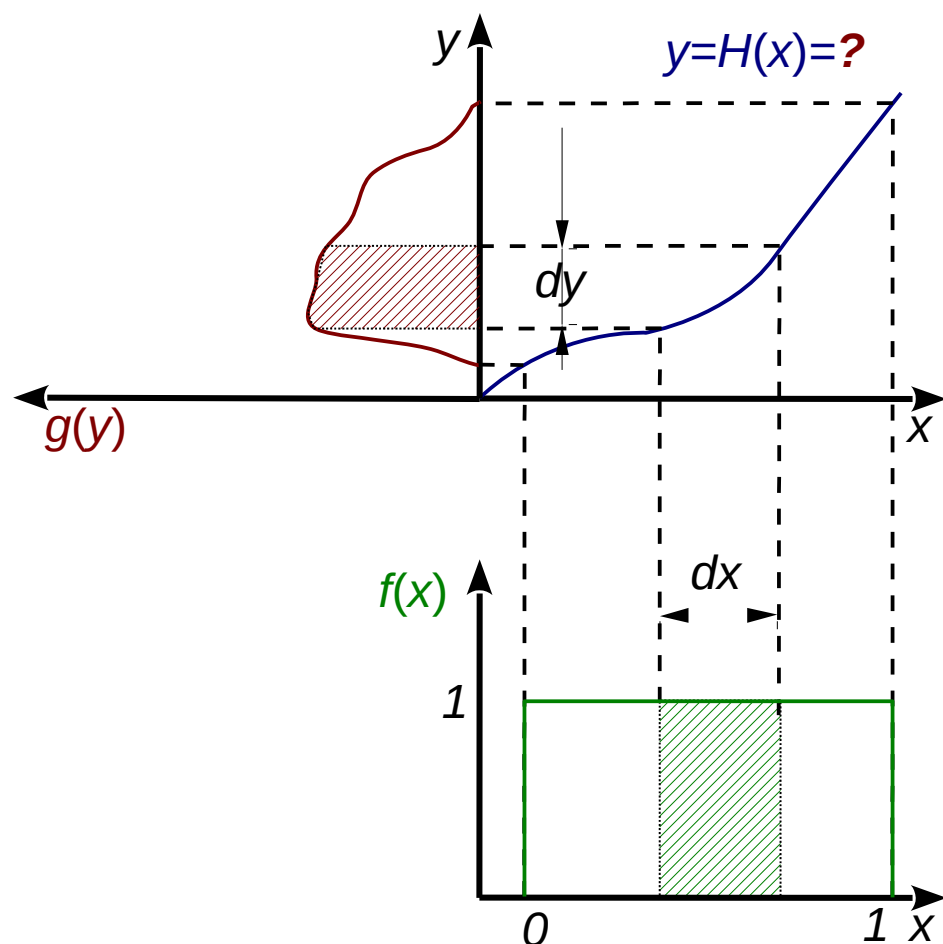




# Zamiana zmiennych – przykład szczególny

- **Pytanie:** mamy zmienną losową  $X$  opisaną rozkładem jednorodnym  $f(x)=1$  na przedziale od 0 do 1. Jaka będzie postać funkcji  $Y=H(X)$ , aby otrzymać zadany (znany) rozkład  $g(y)$ ?

– **metoda odwracania dystrybuanty**



$$f(x)dx = g(y)dy$$
$$\text{gdz } f(x) \equiv 1 \Rightarrow dx = g(y)dy = dG(y)$$

$$g(y) = G'(y)$$

$$\int dx = \int dG(y)$$

$$x = G(y)$$

↑  
dystrybuanta

musi istnieć

$$y = G^{-1}(x) \equiv H(x)$$

$$x_{\min} = G(y_{\min}), x_{\max} = G(y_{\max})$$

$$y_{\min} = G^{-1}(0), y_{\max} = G^{-1}(1)$$

Czyli: liczymy dystrybuantę  $x=G(y)$   
a następnie funkcję odwrotną  $y=G^{-1}(x)$

Zmienna losowa  $X$  po transformacji  
 $Y=G^{-1}(X)$  ma rozkład  $g(y)$

# Zamiana zmiennych – przypadek 2D

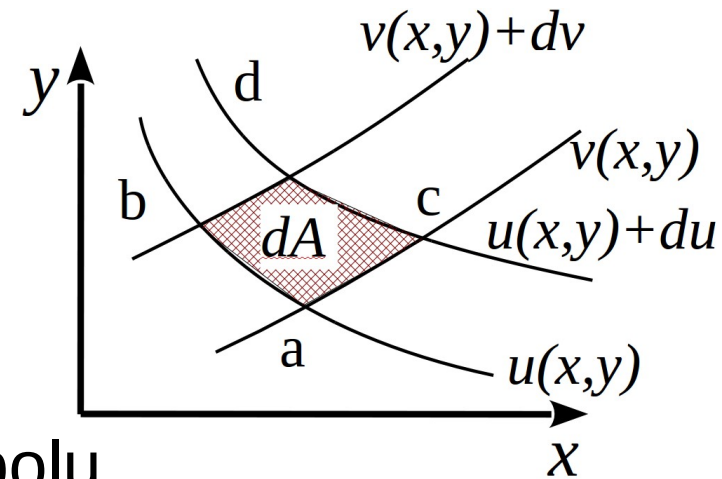
- Mamy dwie zmienne losowe  $X$  i  $Y$ , dokonujemy zamiany zmiennych na  $U$  i  $V$ :

$$(X, Y) \rightarrow (U, V) \quad U = U(X, Y) \quad V = V(X, Y)$$

- Szukamy funkcji  $J$  (jakobian):

$$g(u, v) = f(x, y) \left| J \left( \frac{x, y}{u, v} \right) \right|$$

- Rysunek przedstawia płaszczyznę  $(x, y)$ , z układem krzywych dla  $u = \text{const}$  i  $v = \text{const}$ . Mamy więc mały element powierzchni o polu  $dA = dx dy$  w zmiennych  $x, y \rightarrow$  zatem jego pole możemy policzyć jako pole równoległoboku o wierzchołkach  $a, b, c, d$ :



- współrzędne pierwszych 3 wierzchołków:

$$\begin{aligned} x_a &= x(u, v) & y_a &= y(u, v) \\ x_b &= x(u, v + dv) & y_b &= y(u, v + dv) \\ x_c &= x(u + du, v) & y_c &= y(u + du, v) \end{aligned}$$

# Zamiana zmiennych – przypadek 2D

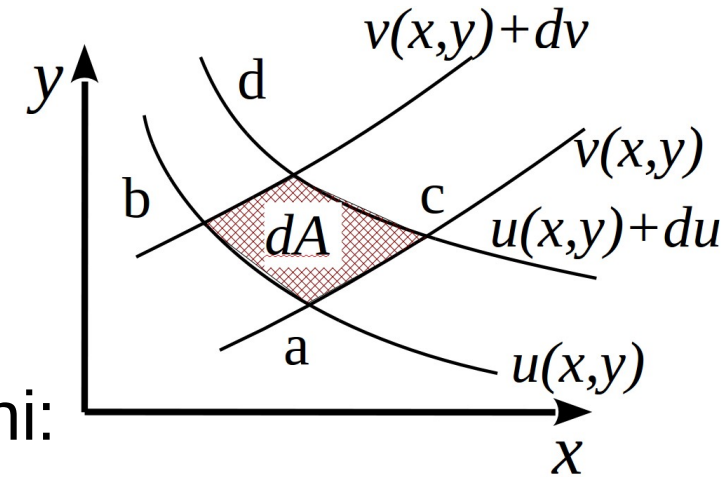
- Rozwijamy w szereg Taylora:

$$x_b = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad y_b = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

$$x_c = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} du \quad y_c = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} du$$

- Z dokładnością do znaku pole powierzchni:

$$dA = \begin{vmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv \equiv J \left( \frac{x, y}{u, v} \right) du dv$$



jakobian przejścia  
(transformacji)

- W ogólnym przypadku, dla  $n$  zmiennych:

$$Y_1 = Y_1(\mathbf{X})$$

$$Y_2 = Y_2(\mathbf{X})$$

$\vdots$

$$Y_n = Y_n(\mathbf{X})$$

$$g(\mathbf{y}) = \left| J \left( \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} \right) \right| f(\mathbf{x})$$

$$J \left( \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$



# Zamiana zmiennych – przypadek 2D

$$f(x, y) = 1/(2 \cdot a^2), |x| + |y| < a$$

- Dokonujemy zamiany zmiennych:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x + y & x(u, v) &= \frac{1}{2}(u + v) \\ v(x, y) &= x - y & y(u, v) &= \frac{1}{2}(u - v) \end{aligned} \Leftrightarrow$$

- Obliczamy jacobian:

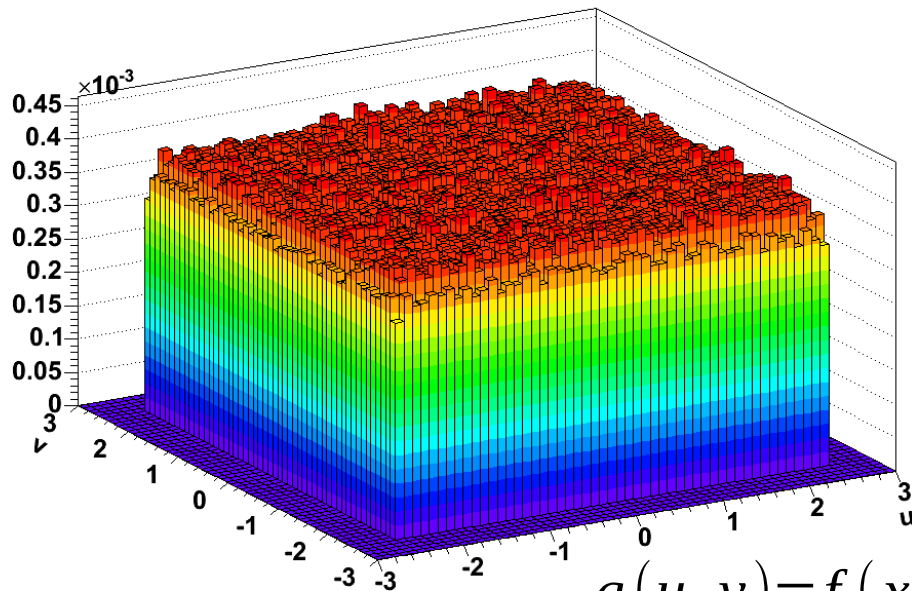
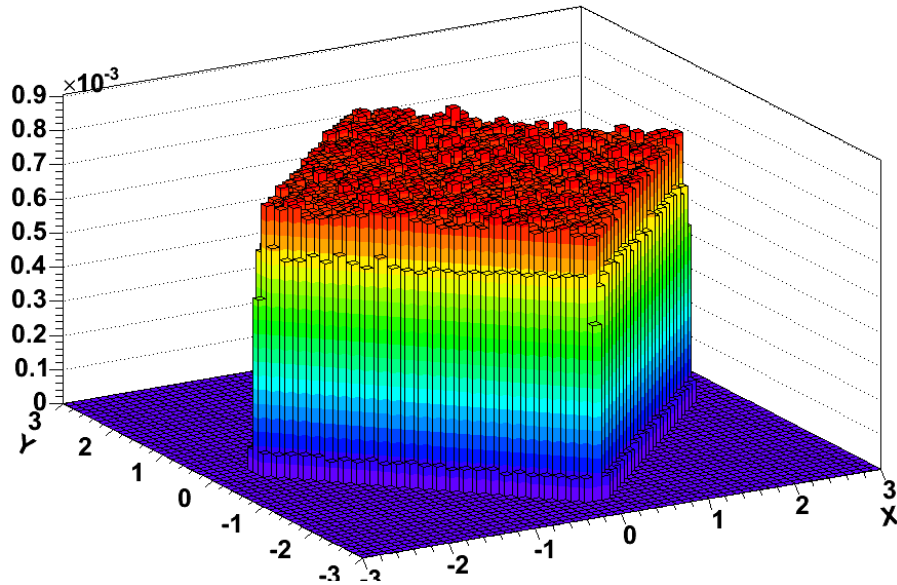
$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2}$$

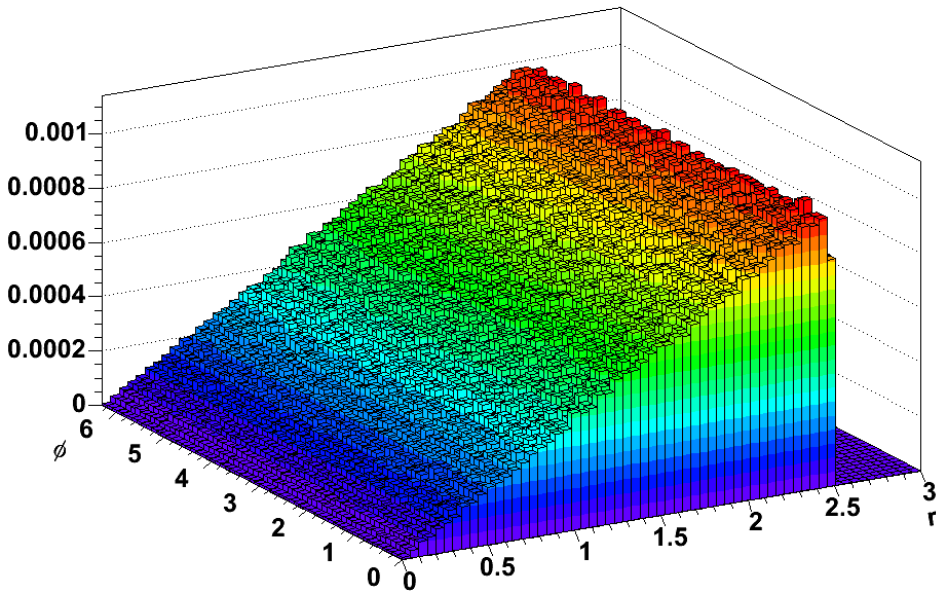
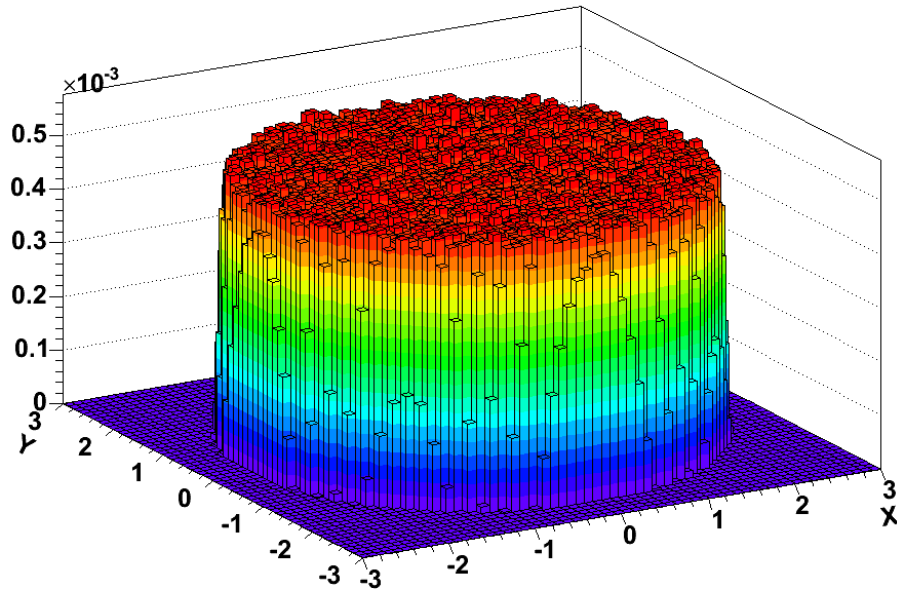
$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Otrzymujemy  $g(u, v)$ :

$$g(u, v) = f(x, y) \cdot J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{1}{2} f(x, y) = 1/(4 \cdot a^2), |u| < a; |v| < a$$



# Zamiana zmiennych – przypadek 2D



$$f(x, y) = \frac{1}{\pi R^2}, \sqrt{x^2 + y^2} < R$$

- Dokonujemy zamiany zmiennych (do wsp. bieg.):

$$\begin{aligned} r(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2} & x(r, \phi) &= r \cdot \cos \phi \\ \phi(x, y) &= \arctg \frac{y}{x} & y(r, \phi) &= r \cdot \sin \phi \end{aligned} \Leftrightarrow$$

- Obliczamy jacobian:

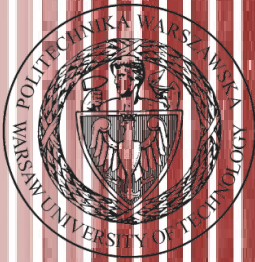
$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \phi \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \phi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r \cdot \sin \phi \quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = r \cdot \cos \phi$$

$$J\left(\frac{x, y}{r, \phi}\right) = r \cdot \cos^2 \phi + r \cdot \sin^2 \phi = r$$

- Otrzymujemy  $g(r, \phi)$ :

$$g(r, \phi) = f(x, y) \left| J\left(\frac{x, y}{r, \phi}\right) \right| = \frac{r}{\pi R^2}$$



# Transformacje liniowe

## Propagacja niepewności

# Transformacje liniowe

- Najczęściej, ze względu na prostotę, posługujemy się transformacjami liniowymi (inne transformacje najczęściej aproksymujemy liniowymi, rozwijając na szereg Taylora)

– **funkcje**  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$  **są liniowymi funkcjami zmiennych**

$$Y_1 = a_1 + t_{11} X_1 + t_{12} X_2 + \dots + t_{1n} X_n$$

$$Y_2 = a_2 + t_{21} X_1 + t_{22} X_2 + \dots + t_{2n} X_n$$

$\vdots$

$$Y_r = a_r + t_{r1} X_1 + t_{r2} X_2 + \dots + t_{rn} X_n$$

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

**Jest to przypadek ogólny –  
zmiennie  $X$  nie są niezależne  
(istnieją kowariancje)**

- W zapisie macierzowym:  $Y = T X + a$
- Wartość oczekiwana  $Y$ :  $E(Y) = \hat{y} = T \hat{x} + a$

Mierzmy pośrednio wielkość  
(wielkości) fizyczną  $Y$ , która zależy  
od wielkości fizycznych  $X$   
mierzonych bezpośrednio, które  
nie są niezależne od siebie.

- Macierz kowariancji  $Y$ :  $C_Y = E((Y - \hat{y})(Y - \hat{y})^T)$   
 $= E((T X + a - T \hat{x} - a)(T X + a - T \hat{x} - a)^T)$   
 $= E(T(X - \hat{x})(X - \hat{x})^T T^T)$   
 $= T E((X - \hat{x})(X - \hat{x})^T) T^T$

$$C_Y = T C_X T^T$$

# Propagacja niepewności

- Załóżmy, że znamy pewne wartości oczekiwane (wyniki pomiarów)  $\hat{x}_i$  oraz ich niepewności  $\sigma(x_i)$  i kowariancje  $cov(x_i, x_j)$ . Szukamy niepewności funkcji:  $Y(X)$
- Jeśli niepewności są małe, to możemy dokonać rozwinięcia na szereg Taylora wokół wartości oczekiwanych:

$$Y_i = Y_i(\hat{x}) + \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \right)_{x=\hat{x}} (X_1 - \hat{x}_1) + \dots + \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \right)_{x=\hat{x}} (X_n - \hat{x}_n) + \text{wyrazy wyższego rzędu}$$

– w notacji macierzowej:  $Y = Y(\hat{x}) + T(X - \hat{x}) + \text{wyrazy wyższego rzędu}$

– gdzie:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{X=\hat{x}}$$



# Propagacja niepewności

- Niepewności  $Y$  to elementy diagonalne macierzy kowariancji:

$$C_Y = T C_X T^T$$

- jak widać, zależą one nie tylko od elementów diagonalnych macierzy  $C_X$ , ale również od jej elementów pozadiagonalnych
- tylko i wyłącznie jeżeli wszystkie zmienne  $X$  są niezależne, tj.  $c_{ij}=0$ , dla  $i \neq j$  możemy zapisać:

$$\sigma^2(Y_i) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^2 \sigma^2(X_j)$$

- co daje nam **prawo propagacji niepewności** znane z Wykładu 1:

$$\sigma(y_i) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^2 \sigma^2(x_j)}$$

# Znaczenie macierzy kowariancji - przykład

- Mierzmy w układzie kartezjańskim współrzędne punktu  $(x,y)$ . Pomiar  $x$  i  $y$  są niezależne. Z jakiejś przyczyny (np. w celu porównania z przewidywaniami teoretycznymi) potrzebujemy jednak wynik we współrzędnych biegunowych.
- Z powodu np. innego przyrządu pomiarowego pomiar daje trzykrotnie większą niepewność współrzędnej  $y$  niż  $x$ .

- Wtedy macierz kowariancji może wyglądać np. tak:  $C_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

- Dokonujemy transformacji na współrzędne biegunowe:

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi(x, y) = \arctg \frac{y}{x} \quad x(r, \phi) = r \cdot \cos \phi \quad y(r, \phi) = r \cdot \sin \phi$$

- Policzmy macierz transformacji (dla prostoty – w punkcie  $(1,1)$ )

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad T^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

# Znaczenie macierzy kowariancji - przykład

- Macierz kowariancji dla zmiennych biegunowych:

$$C_{r\phi} = T C_{xy} T^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

- Widzimy, że **nie są one niezależne**

- Licząc w drugą stronę:  $C_{r\phi} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

- Pozadiagonalne elementy macierzy kowariancji są BARDZO WAŻNE**

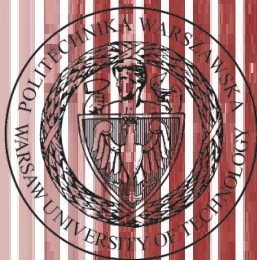
$$T' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ -\sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{xy} = T' C_{r\phi} T'^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

**ŻŁE!** gdyby uwzględniać tylko diagonalne niepewności są zupełnie inne



$$C_{xy} = T' C_{r\phi} T'^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$



# Generacja liczb (pseudo)losowych za pomocą komputera

# Liczby (pseudo)losowe

- Do tej pory zajmowaliśmy się jedynie opisem zmiennych losowych (ich właściwości) – nie zajmowaliśmy się tym, jak je otrzymać
- Bardzo często potrzebujemy jednak posłużyć się ciągiem (losowych) wartości jakiejś zmiennej losowej, która opisana jest danym rozkładem prawdopodobieństwa
- Metoda otrzymywania takich liczb może pochodzić z badania zjawiska fizycznego (np. rozpad promieniotwórczy, szumy fal elektromagnetycznych)
- Liczby takie możemy wygenerować również w komputerze – trzeba jednak pamiętać, że taki ciąg będzie ciągiem pseudolowym, gdyż komputer cechuje się zachowaniem deterministycznym (można więc te liczby “przewidzieć”)
- Metody analizy danych z wykorzystaniem liczb (pseudo)losowych nazywamy **metodami Monte Carlo**





# Generatory liniowe kongruentne

- Komputer, urządzenie deterministyczne, może generować tylko liczby pseudolosowe
  - kolejna generowana liczba jest funkcją liczb wcześniej wygenerowanych

- Generator liniowy kongruentny (*LCG – Linear Congruential Generator*):

$$x_{j+1} = (a \cdot x_j + c) \bmod m$$

- LCG generuje okresowy ciąg liczb (po jakimś czasie powtarza się)
  - $m$  – maksymalna długość okresu generatora (szczegóły – Brandt)
- Multiplikatywny generator liniowy kongruentny (*MLCG – multiplicative linear congruential generator*),  $c=0$ :

$$x_{j+1} = (a \cdot x_j) \bmod m$$

- szybsze od LCG, ale nigdy nie dają wartości 0 i mają krótkie okresy

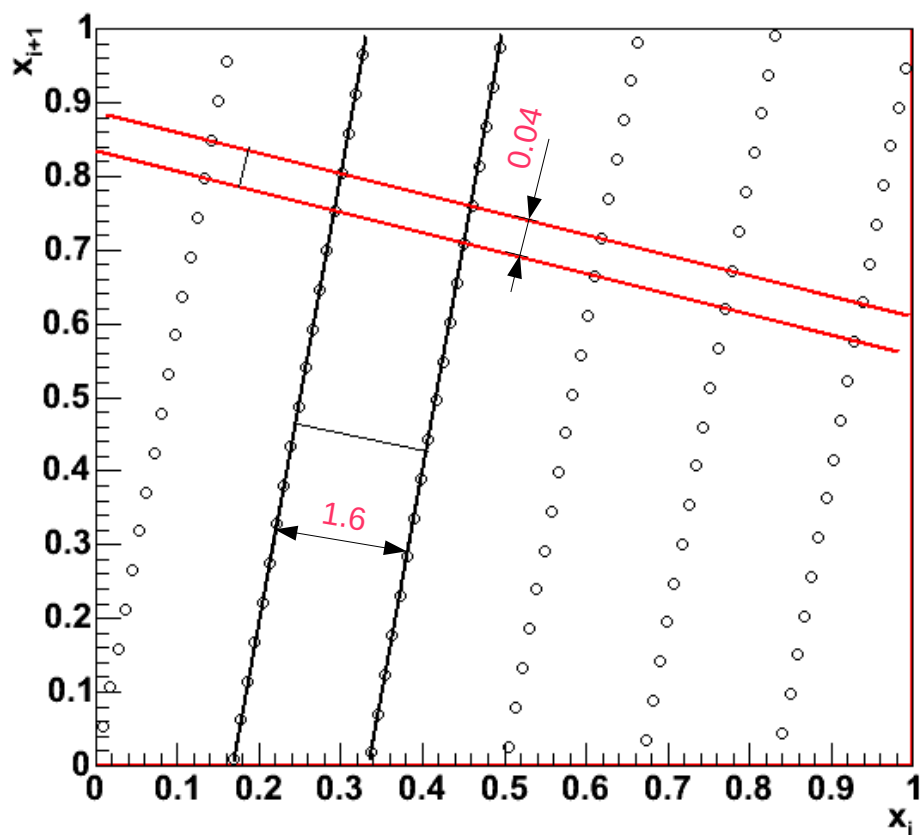
# Jakość generatorów losowych

- Najdłuższy okres nie jest jedyną porządaną cechą generatora
- Ważniejsze jest, aby liczby następujące po sobie występowały w sposób jak najbardziej “przypadkowy” - w tym celu wykonujemy tzw. **test widmowy**:
  - wykonujemy dwuwymiarowy wykres (sieć) par:  $(x_i, x_{i+1})$
  - obsadzamy  $m$  z  $m^2$  węzłów
  - szukamy prostych łączących obsadzone węzły sieci, a następnie wybieramy największą z odległości  $d_t$  między nimi
  - jeśli odległości między sąsiednimi prostymi są podobne  $\rightarrow$  jednostajny rozkład węzłów sieci (**tego oczekujemy!**)
  - oczekujemy, że:  $d_t \approx m^{-1/2}$
  - jeśli parametry  $a$  i  $m$  są źle dobrane, to:  $d_t \gg m^{-1/2}$

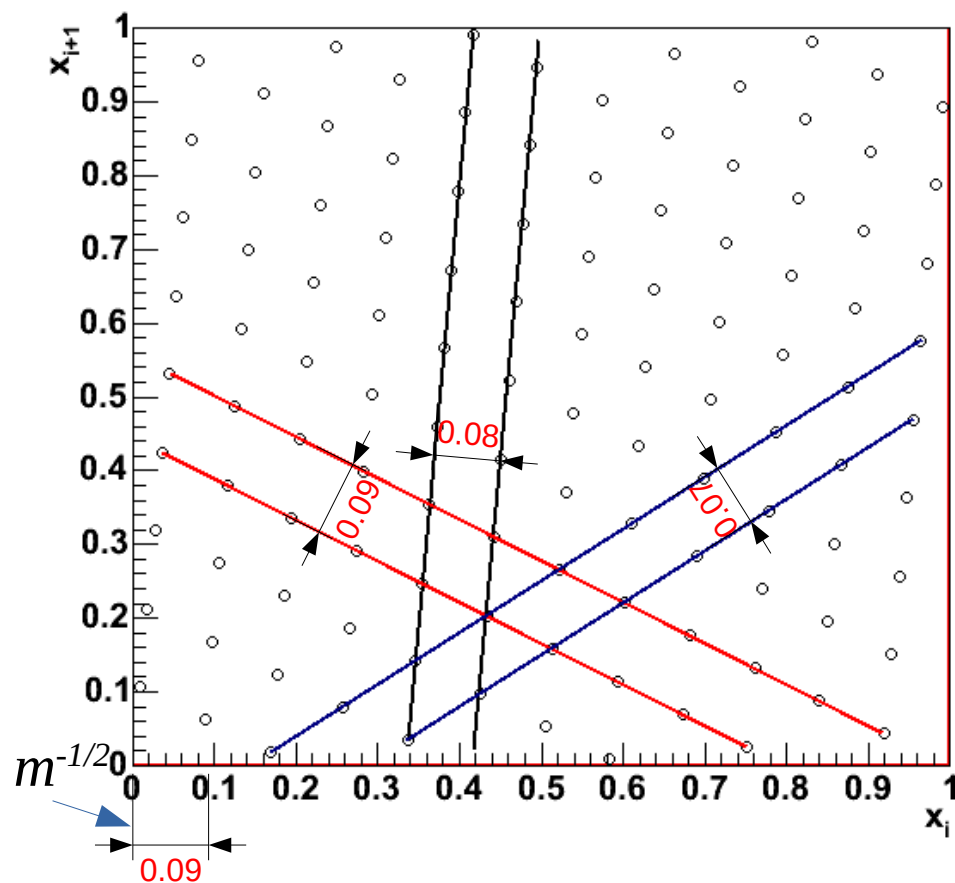
# Jakość generatorów losowych

- Najdłuższy okres nie jest jedyną porządaną cechą generatora
- Ważniejsze jest, aby liczby następujące po sobie występowały w sposób jak najbardziej “przypadkowy” - w tym celu wykonujemy tzw. **test widmowy**:
  - **prawy** – poprawny (dobre parametry), lewy - niepoprawny

$m = 113, a = 6$



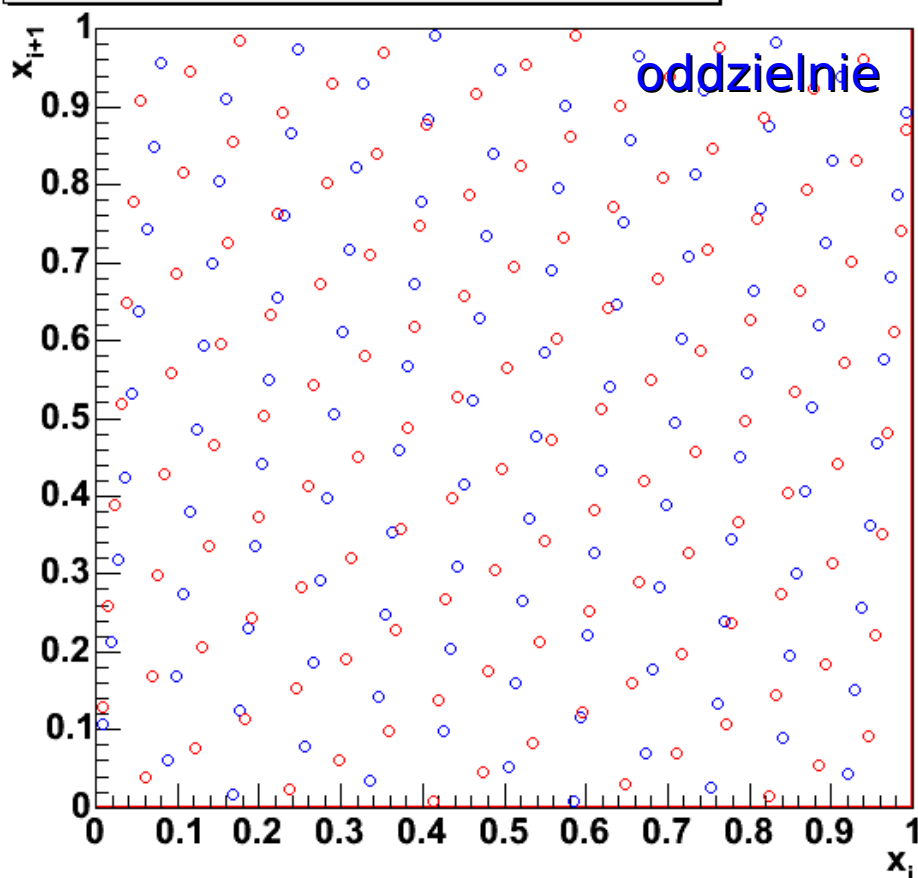
$m = 113, a = 12$



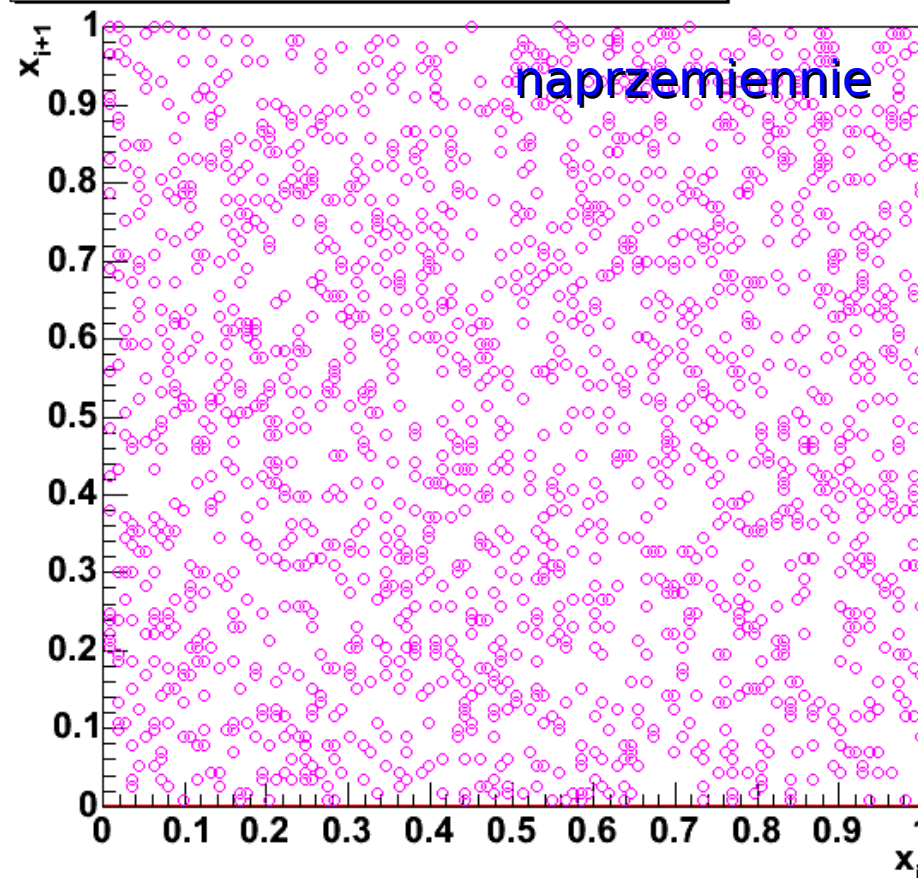
# Jakość generatorów losowych

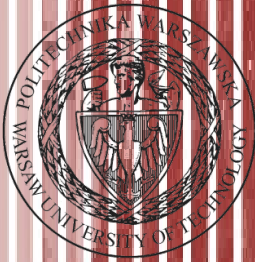
- Najlepsze wyniki (długie okresy) można otrzymać łącząc ze sobą kilka (np.  $l$ ) generatorów liniowych (o różnych parametrach)
- Ich maksymalny okres wynosi wtedy:  $p = 2^{-(l-1)} \cdot \prod_{j=1}^l (m_j - 1)$

$m_1 = 113, a_1 = 12, m_2 = 131, a_2 = 17$



$m_1 = 113, a_1 = 12, m_2 = 131, a_2 = 17$



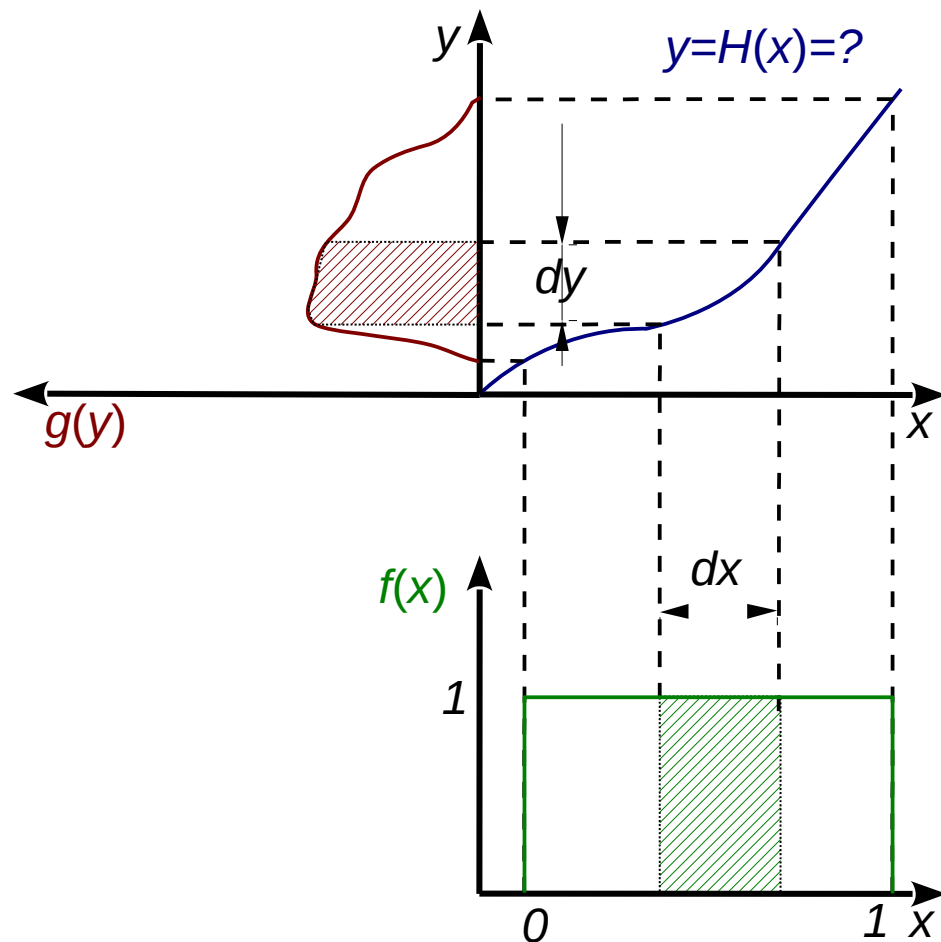


# Generacja liczb (pseudo)losowych metodą transformy rozkładu jednorodnego



# Transformacja rozkładu jednorodnego

- To już wiemy :) **Metoda z odwrotnością dystrybuanty**
- Transformację rozkładu jednostajnego możemy wykorzystać do generowania liczb losowych o skomplikowanych gęstościach prawdopodobieństwa



$$f(x)dx = g(y)dy$$
$$\text{gdz } f(x) \equiv 1 \Rightarrow dx = g(y)dy = dG(y)$$

$$g(y) = G'(y)$$

$$\int dx = \int dG(y)$$

$$x = G(y)$$

$$y = G^{-1}(x) \equiv H(x)$$

↑  
dystrybuanta

musi istnieć

$$x_{\min} = G(y_{\min}), x_{\max} = G(y_{\max})$$

$$y_{\min} = G^{-1}(0), y_{\max} = G^{-1}(1)$$

Czyli: liczymy dystrybuantę  $G(y)$   
a następnie funkcję odwrotną  $G^{-1}(y)$

Zmienna losowa  $X$  po transformacji  
 $y = G^{-1}(x)$  ma rozkład  $g(y)$

# Przykład – rozkład Breita-Wignera

- Rozkład Breita-Wignera ma następującą postać:

$$g(y) = \frac{2}{\pi \Gamma} \cdot \frac{\Gamma^2}{4(y-a)^2 + \Gamma^2}$$

- Liczymy dystrybuantę:

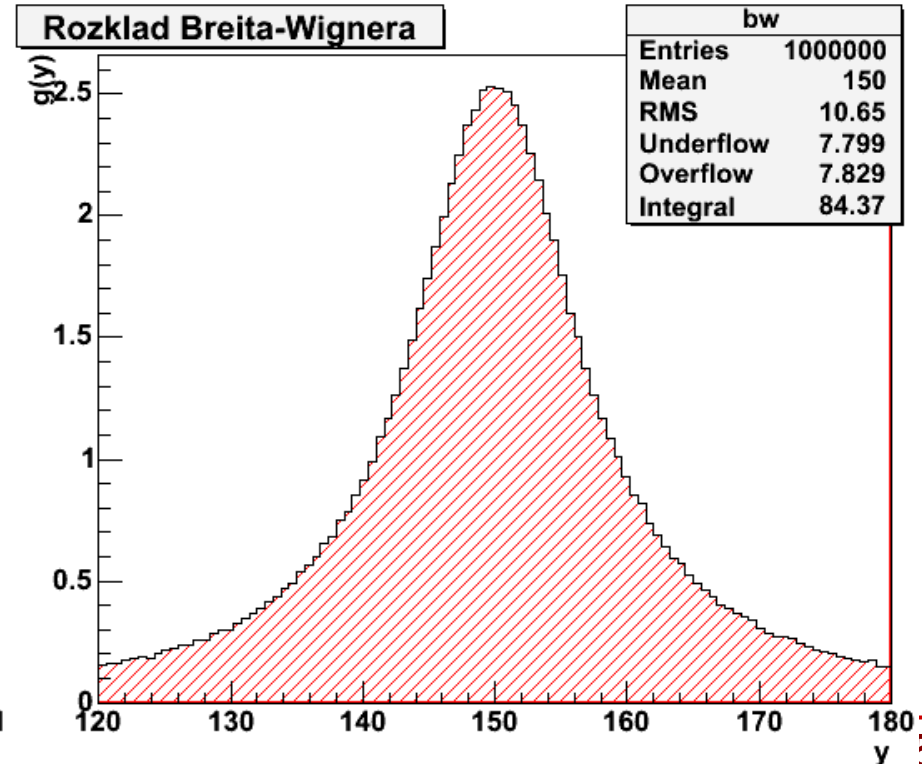
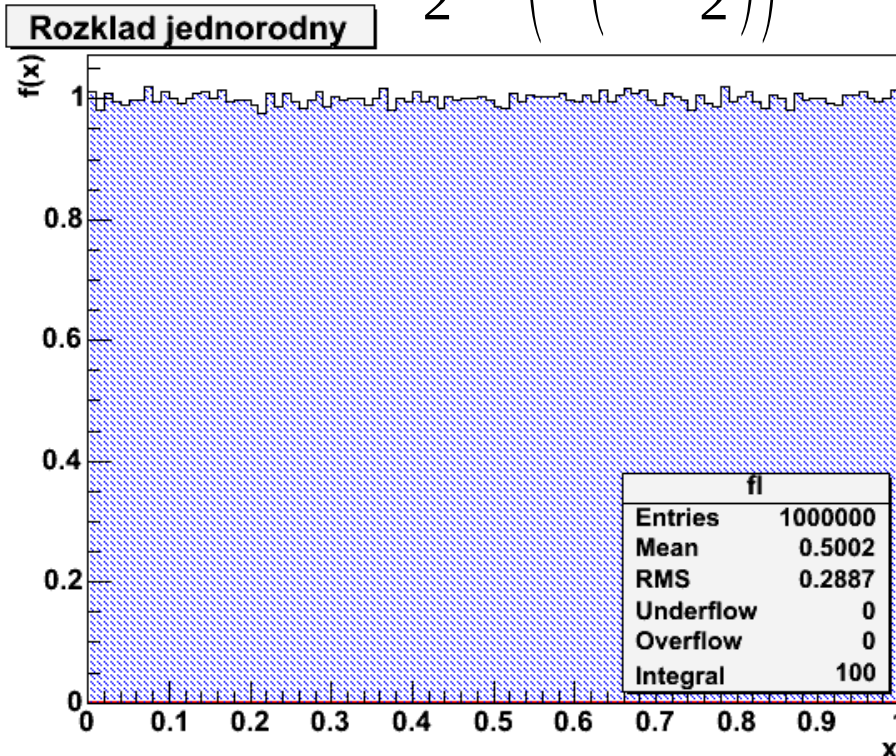
$$x = G(y) = \frac{2}{\pi \Gamma} \cdot \int_{-\infty}^y \frac{\Gamma^2}{4(z-a)^2 + \Gamma^2} dz = \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{2(y-a)}{\Gamma}\right) + \frac{1}{2}$$

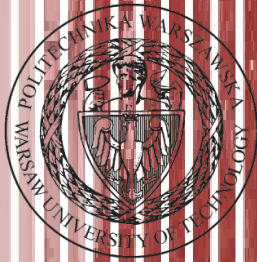
- Odwrotna dystrybuanta:

$$y(x) = G^{-1}(x) = a + \frac{\Gamma}{2} \operatorname{tg}\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$y(0) = -\infty$$

$$y(1) = \infty$$

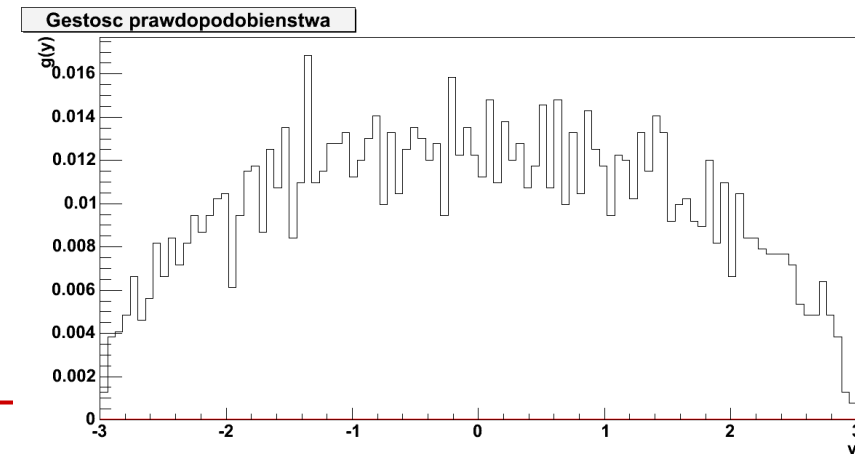
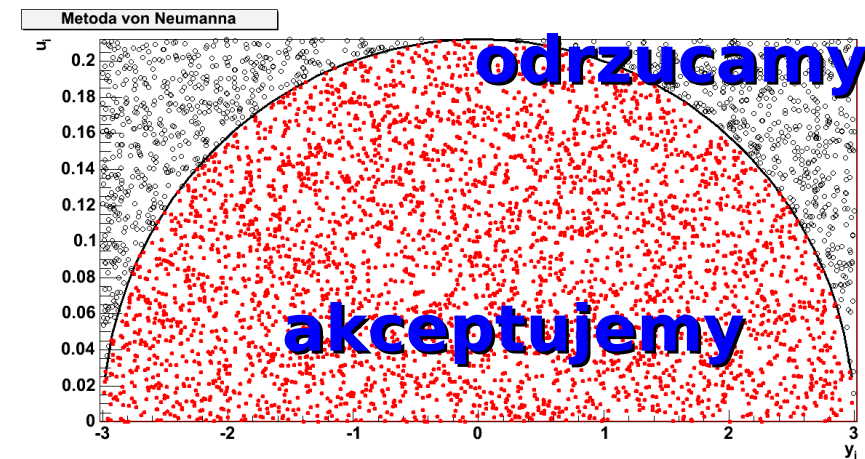




# Metoda akceptacji- odrzuceń von Neumanna

# Metoda (akceptacji) von Neumanna

- Metoda generacji liczb metodą odwrotnej dystrybucyjności ma swoje ograniczenia – dystrybuanta musi być znana (i być funkcją wzajemnie jednoznaczną), czyli musi istnieć funkcja odwrotna
- Metoda (akceptacji-odrzuć) von Neumanna wymaga znajomości jedynie gęstości prawdopodobieństwa i pozwala na otrzymanie liczb z praktycznie dowolnego rozkładu
- Jak to działa?
  - generujemy parę liczb z rozkładu jednorodnego:  $(y_i, u_i)$
  - sprawdzamy, czy  $u_i < g(y_i)$
  - jeśli warunek jest spełniony, akceptujemy liczbę  $y_i$ ,  
jeśli nie - odrzucamy



# Metoda von Neumanna - definicje

- Geometryczny opis metody von Neumanna:
  - chcemy wygenerować liczby losowe opisane gęstością  $g(y)$  w przedziale:  $a \leq y \leq b$
  - rozważamy krzywą:  $u = g(y)$  oraz funkcję stałą:  $u = d, d \geq g_{\max}$
  - losujemy z rozkładu jednorodnego liczby  $(y_i, u_i)$ , które spełniają warunki:  $a \leq y_i \leq b, 0 \leq u_i \leq d$
  - jak łatwo zauważyć, nasze punkty układają się w prostokącie na płaszczyźnie  $(y, u)$
  - odrzucaamy wszystkie punkty spełniające nierówność:  $u_i \geq g(y_i)$
  - pozostają jedynie punkty położone pod krzywą:  $u = g(y)$
  - zaakceptowane wartości  $y_i$  podlegają rozkładowi  $g(y)$
- Wada metody: w zależności od kształtu funkcji  $g(y)$ , znaczna część liczb  $y_i$  jest odrzucana  $\int_a^b g(y) dy$
- Wydajność metody:  $E = \frac{a}{(b-a)d}$



# Metoda von Neumanna – przypadek nD

- Metodę von Neumanna można uogólnić na wiele wymiarów:
  - mamy funkcję gęstości wielu zmiennych:  $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$
  - generujemy zbiór liczb z rozkładu jednorodnego:  $(y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i, u^i)$
  - dla każdego  $i$  sprawdzamy warunek akceptacji:  $u^i < g_{\max}(y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i)$
  - akceptujemy lub odrzucamy cały zestaw wygenerowanych liczb dla danego  $i$
- Kilka uwag do metody von Neumanna:
  - za jej generować możemy liczby z dowolnego, nawet bardzo skomplikowanego rozkładu
  - rozkład (czy w ogólności funkcja)  $g(y)$  nie musi być nawet unormowany
  - metodę tę można stosować do **obliczania całek oznaczonych**:

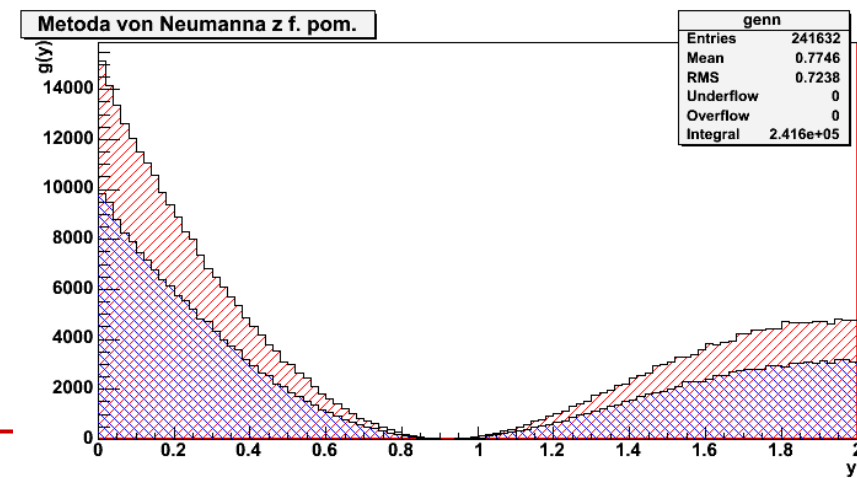
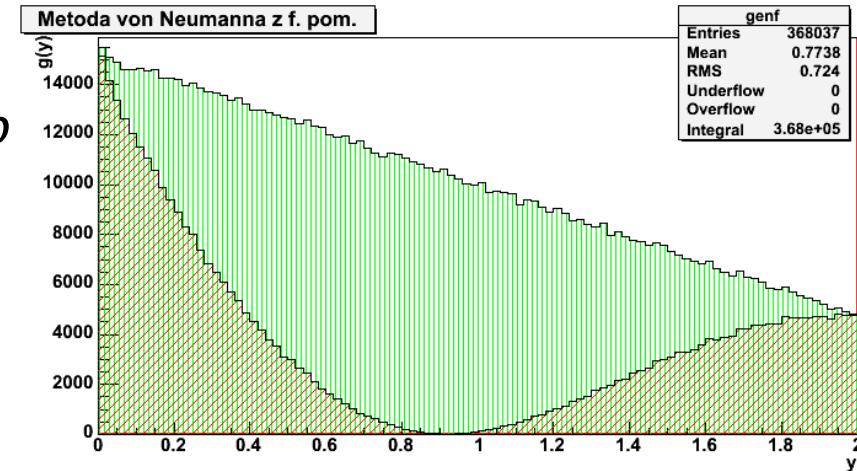
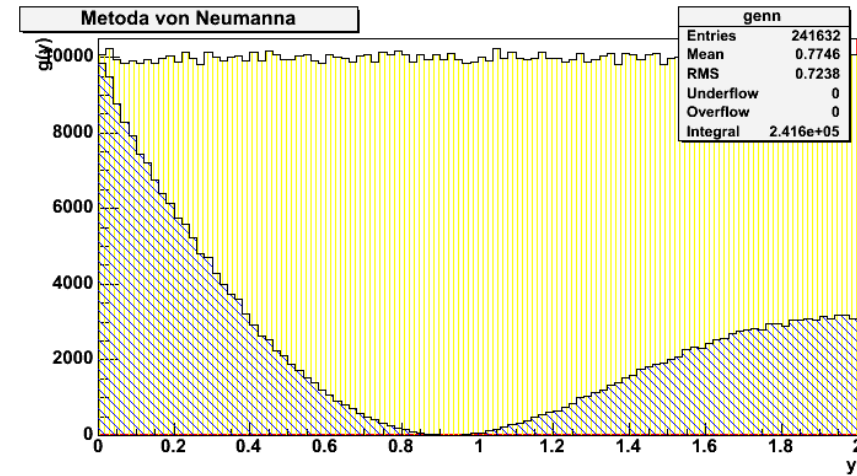
$$E = \frac{\int_a^b g(y) dy}{(b-a)d} \approx \frac{N_{\text{zaakceptowane}}}{N_{\text{wszystkie}}}$$

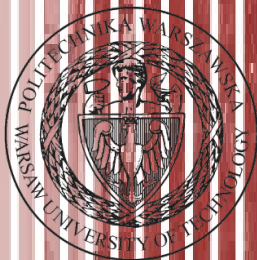
$$I = \int_a^b g(y) dy \approx \frac{N_{\text{zaakceptowane}}}{N_{\text{wszystkie}}} (b-a)d$$

# Metoda von Neumanna z funkcją pom.

- Wydajność metody von Neumanna można poprawić, jeśli odpowiednio zawężymy obszar losowania:
  - wprowadzamy funkcję pomocniczą  $s(y)$ , z której “łatwo” wygenerować zmienne losowe (np. metodą odwrotnej dystrybucyjności), i która spełnia warunek:  $g(y) \leq c \cdot s(y)$ ,  $a < y < b$
  - generujemy liczbę losową  $y_i$  z rozkładu  $s(y)$  na przedziale  $a < y_i < b$  oraz liczbę  $u_i$  z rozkładu jednorodnego na przedziale  $0 < u_i < 1$
  - odrzucaamy liczbę  $y_i$ , jeżeli:  $u_i \geq \frac{g(y_i)}{c \cdot s(y_i)}$
  - wydajność metody:

$$E = \frac{\int_a^b g(y) dy}{c \int_a^b s(y) dy}$$





# KONIEC

# Zapis liczb w komputerze

- Najmniejsza jednostka informacji – **bit** (0 lub 1), system dwójkowy)
- Przykład:  
 $213 = 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \Rightarrow 011010101$
- Ogólnie –  $k-1$  bitów  $\rightarrow$  wartość bezwzględna kodowanej liczby,  
 $1$  bit  $\rightarrow$  znak. Wartość bezwzględna:  
$$a = a^{(k-2)} 2^{k-2} + a^{(k-3)} 2^{k-3} + \dots + a^{(1)} 2^1 + a^{(0)} 2^0$$
- W komputerze zapisujemy liczby za pomocą **bajtów** składających się z 8 bitów (najmniejsza adresowalna jednostka pamięci)
- Współcześnie komputery pracują na (16), 32 i 64-bitowych liczbach
- Liczby bez znaku przyjmują wartości od 0 do  $2^{k-1}$ , zaś liczby ze znakiem od  $-2^{k-1}$  do  $2^{k-1}-1$

# Zapis liczb w komputerze

- Liczbę zmiennoprzecinkową zapisujemy jako:

$$x = (-1)^s \cdot m \cdot b^c$$

- Gdzie:  $m$  – mantysa (część ułamkowa liczby),  $b$  – podstawa,  $c$  – wykładnik (albo “cecha”, część całkowita liczby),  $s$  – bit znaku
- Komputery zapisują liczbę z  $b=2$ , notacja naukowa to  $b=10$
- Do zapisu **liczby zmiennoprzecinkowej** wystarczy zatem **znajomość dwóch liczb całkowitych**
- Przykłady:

$$00010110_{(FP2)}$$

$$s = 0$$

$$c = 0010_{(U2)} = 2$$

$$m = 1,110_{(2)} = 1\frac{3}{4}$$

$$L = (-1)^0 \cdot 1\frac{3}{4} \cdot 2^2 = 7_{(10)}$$

$$0,875_{(10)} = 0,111_{(2)}$$

$$L = (-1)^0 \cdot 1,11_{(2)} \cdot 2^{(-1)}$$

$$c = -1 = 1111_{(U2)}$$

$$m = 1,110_{(2)}$$

$$0,875_{(10)} = 01111110_{(FP2)}$$

# Zapis liczb w komputerze

- Zakres zmienności liczb zmiennoprzecinkowych:

$$2^{C_{min}} < |x| < 2^{C_{max}}$$

- Dwie liczby zmiennoprzecinkowe są różne, jeżeli ich mantysy różnią się o minimalną wartość  $\alpha$ :

$$x_1 = m \cdot 2^e, x_2 = (m + \alpha) \cdot 2^e, \Delta x = x_2 - x_1 = \alpha \cdot 2^e, \frac{\Delta x}{x} = \frac{\alpha}{m} = \frac{2^0}{2^n} = 2^{-n}$$

- Przykład – typy danych w języku C++:

TYPE	Bit width		Common range
Char	8	(1byte)	-128 to 127
unsigned char	8	(1byte)	0 to 255
signed char	8	(1byte)	-128 to 127
int	32	(4bytes)	-2,147,483,648 to 2,147,483,647
unsigned int	32	(4bytes)	0 to 4,294,967,295
signed int	32	(4bytes)	-2,147,483,648 to 2,147,483,647
short int	16	(2bytes)	-32,768 to 32,767
unsigned short int	16	(2bytes)	0 to 65,535
signed short int	16	(2bytes)	-32,768 to 32,767
long int	32	(4bytes)	Same as int
unsigned long int	32	(4bytes)	Same as unsigned int
signed long int	32	(4bytes)	Same as signed int
float	32	(4bytes)	3.4E-38 to 3.4E+38
double	64		1.7E-308 to 1.7E+308
long double	80		3.4E-4932 to 1.1E+4932
bool	N/A		true or false