Komputerowa analiza danych doświadczalnych

Wykład 8
20.04.2018

dr inż. Łukasz Graczykowski
lukasz.graczykowski@pw.edu.pl

Semestr letni 2017/2018

Estymatory

Próby z rozkładów cząstkowych

Próby z rozkładu normalnego

Rozkład χ^2

Pobieranie próby, estymatory

Pobieranie próby

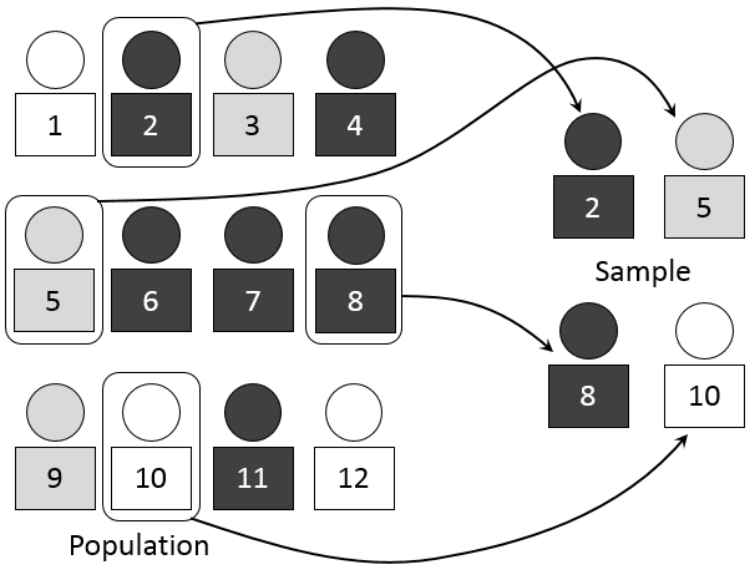
- **Próbą** (*ang. sample*) nazywamy zespół doświadczeń wykonywanych w celu określenia kształtu (parametrów) poszukiwanego rozkładu:
  - próba otrzymywana jest poprzez wybór elementów z (często nieskończonego) zbioru wszystkich możliwych doświadczeń (wszystkich możliwych pomiarów), zwanego **populacją generalną**
  - próbę o n składnikach nazywamy próbą n-wymiarową
- Właściwości próby losowej:
  - wybór każdego elementu próby jest niezależny
  - każdy element próby jest zmienną losową o takim samym rozkładzie prawdopodobieństwa jak populacja

$$g_1(X_1)=g_2(X_2)=\ldots=g_n(X_n)=f(X)$$

czyli

$$E(X_1)=E(X_2)=\ldots=E(X_n)=E(X)$$

$$\sigma^2(X_1)=\sigma^2(X_2)=\ldots=\sigma^2(X_n)=\sigma^2(X)$$



Estymatory

- Każda funkcja elementów próby nazywana jest **statystyką**

$$S = S(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

- Poszukujemy takich statystyk (**estymacja**), które pozwolą nam na podstawie próby wnioskować o własnościach (parametrach) całej populacji
- **Estymator** to statystyka, która pozwala nam na wnioskowanie o zadanym parametrze rozkładu populacji
- Oczekujemy, aby dany estymator był:
  - **nieobciążony**, jeżeli niezależnie od liczebności próby jego wartość oczekiwana jest równa wartości estymowanego parametru:

$$E\left(S(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = \lambda, \text{ dla każdego } n$$

  - **zgodny**, jeżeli jego wariancja znika:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma\left(S(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = 0$$

Estymatory

- Zadaniem badań eksperymentalnych jest wyznaczanie nieznanych parametrów rozkładów, np. opisujących różne prawa fizyczne
- Możemy jedynie otrzymywać przybliżone oszacowania (estymacje) tych parametrów poprzez przeprowadzanie eksperymentów (wybór prób losowych)
- Parametry badanych rozkładów (praw fizycznych) wyznaczamy przez estymatory
- Jeżeli uda nam się znaleźć dla danego parametru estymator nieobciążony i zgodny, to jesteśmy w stanie określić ten parametr z dowolną dokładnością (tym większą, im większa jest liczebność próby losowej – liczba pomiarów)

- **Nigdy nie jesteśmy w stanie podać w 100% dokładnych wartości parametrów badanego rozkładu (prawa fizycznego)**

Estymator wartości oczekiwanej

Populacja

- opisana funkcją gęstości:

$$f(x)=P(X=x)$$

- posiada **wartość oczekiwaną**:

$$E(X)=\hat{x}=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

- wartość oczekiwana rozkładu to **jedna liczba**
  - nie jest zmienną losową
  - chcemy go zmierzyć doświadczalnie
- np. dla rozkł. Gaussa:

$$f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\mu$$

Próba losowa

- zakładmy, że **średnia arytmetyczna** z elementów próby jest estymatorem wartości oczekiwanej
- **średnia arytmetyczna** jest statystyką:

$$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots X_n)$$

- **jest zmienną losową** (zależy od elementów próby)
- posiada swoją **wartość oczekiwaną** oraz **wariancję**
- oczekujemy, że będzie ona estymatorem nieobciążonym i zgodnym wartości oczekiwanej populacji:

$$E(\bar{X})=E(X)=\hat{x},\ \text{dla każdego } n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(\bar{X})=0$$

- **jak to sprawdzić?**

Estymator wartości oczekiwanej

Próba losowa

- **średnia arytmetyczna** z elem. próby jest statystyką:

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\ldots X_n\right)$$

- **wartość oczekiwana** średniej arytmetycznej**:**

$$E\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{n}E\left(\left(X_1+X_2+\ldots X_n\right)\right)=\frac{1}{n}\left(E\left(X_1\right)+E\left(X_2\right)+\ldots+E\left(X_n\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}n\,E\left(X\right)=E\left(X\right)=\hat{x}\,,\ dla\ każdego\ n$$

Czyli wykazaliśmy, że estymator jest **nieobciążony**

- **wariancja** średniej arytmetyczmej:

$$\sigma^2\left(\bar{X}\right)=E\left\{\bar{X}-E\left(\bar{X}\right)\right\}^2=E\left\{\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\hat{x}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n^2}E\left\{\left[\left(X_1-\hat{x}\right)+\left(X_2-\hat{x}\right)+\ldots+\left(X_n-\hat{x}\right)\right]^2\right\}$$

Musimy pokazać, że to wyrażenie zbiega do 0 dla dużych n

Estymator wartości oczekiwanej

Próba losowa

- **wariancja** średniej arytmetyczmej:

$$\sigma^2(\bar{X}) = E\left\{\bar{X} - E(\bar{X})\right\}^2 = E\left\{\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \hat{x}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left\{\left[(X_1 - \hat{x}) + (X_2 - \hat{x}) + \ldots + (X_n - \hat{x})\right]^2\right\}$$

- ponieważ elementy próby losowej są niezależne:

$$Cov(X_i, X_j) = E\left((X_i - \hat{x})(X_j - \hat{x})\right) = 0$$

- to upraszczamy nawias:

$$E\left\{\left[(X_1 - \hat{x}) + (X_2 - \hat{x}) + \ldots + (X_n - \hat{x})\right]^2\right\} = E\left\{(X_1 - \hat{x})^2 + (X_2 - \hat{x})^2 + \ldots + (X_n - \hat{x})^2\right\}$$

$$= E(X_1 - \hat{x})^2 + E(X_2 - \hat{x})^2 + \ldots + E(X_n - \hat{x})^2 = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n) = n\sigma^2(X)$$

- zatem ostatecznie wariancja średniej arytmetycznej:

$$\sigma^2(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2(X) = \frac{1}{n}\sigma^2(X)$$

- ponieważ wariancja rozkładu populacji jest jedną liczbą, to:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(\bar{X}) = 0$$

Wykazaliśmy, że estymator jest **zgodny**

Estymator wartości oczekiwanej

Populacja

- opisana funkcją gęstości:

$$f(x)=P(X=x)$$

- posiada **wartość oczekiwaną**:

$$E(X)=\hat{x}=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

- wartość oczekiwana rozkładu to **jedna liczba**
  - nie jest zmienną losową

- np. dla rozkł. Gaussa:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\mu$$

Próba losowa

- **średnia arytmetyczna** z elem. próby jest statystyką:

$$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots X_n)$$

- jest **estymatorem nieobc. i zgodnym** wartości oczekiwanej rozkładu populacji

- **wartość oczekiwana** średniej arytmetycznej:

$$E(\bar{X})=E(X)=\hat{x},\ \text{dla każdego } n$$

- **wariancja** (niepewność wyznaczenia) średniej arytmetycznej:

$$\sigma^2(\bar{X})=\frac{1}{n}\sigma^2(X)$$

Ale… żeby wyznaczyć jej wartość musimy znaleźć estymator wariancji populacji $\sigma^2(X)$

Estymatory - podstawowe

- Przykładowe **estymatory nieobciążone**:
  - **wartości oczekiwanej populacji → *średnia arytmetyczna z próby:***

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)$$

  - **wariancji populacji → *średnia odchyleń kwadratowych:***

$$S^2(X)=\frac{1}{n-1}\left(\left(X_1-\bar{X}\right)^2+\left(X_2-\bar{X}\right)^2+\ldots+\left(X_n-\bar{X}\right)^2\right)$$

- Wariancje (niepewności) estymatorów:
  - **wariancja** *średniej arytmetycznej*:

$$\sigma^2(\bar{X})=\frac{1}{n}S^2(X)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$$

  - **wariancja** *średniej odchyleń kwadratowych*:

$$\sigma^2\left(S^2(X)\right)=S^4(X)\left(\frac{2}{n-1}\right)$$

- **Uwaga!** Wariancje estymatorów są również estymatorami – możemy więc liczyć np. wariancję wariancji średniej arytmetycznej, itd.
- **Czy te wzory coś przypominają?**

Przykład 1 – pomiar bezpośredni

- Mierzymy przy pomocy suwmiarki bok pręta d o przekroju kwadratowym

http://www.kreocen.pl/img/p/1057776/1/TESA-Suwmiarka-STANDARD-005-mm.jpg
http://www.drut.com.pl/images/com_sobi2/gallery/69/69_image_1_bml.jpg

- Dokładność suwmiarki (niepewność wzorcowania):

$$\Delta d = 0{,}1\,mm$$

- Seria $n=11$ pomiarów (w mm): 12,5; 12,3; 12,6; 12,5; 12,6; 12,5; 12,4; 12,3; 12,5; 12,4; 12;6
- Wynik (średnia arytmetyczna): $\bar{d} = \sum_{i=1}^{n} d_i = 12{,}4727\,mm$
- Niepewność typu A:
- $$u_A(d) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n-1)} (d_i - \bar{d})^2} = 0{,}033278\,mm$$
- Niepewność typu B:
- $$u_B(d) = \frac{\Delta d}{\sqrt{3}} = 0{,}057735\,mm$$
- Niepewność całkowita:

$$u(d) = \sqrt{u_A^2(d) + u_B^2(d)} = 0{,}06639\,mm \approx 0{,}066\,mm$$

- Wynik: $d = 12{,}473(66)\,mm$

WYKŁAD 1

Stopnie swobody

Stopnie swobody

- Wariancję populacji określamy przez sumę kwadratów różnic:

$$\sigma^2(X)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right) \qquad \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

Dlaczego $1/n$-1? To jest średnia różnicy kwadratów, powinno być $1/n$

- Zajmijmy się kwadratami różnic:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$$

- Wartości X_i mogą przybierać dowolne wartości
- Dowolność ta jest jednak ograniczona ograniczony warunkiem (**więzem**) istnienia wartości średniej:

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)=0}$$

- Mówimy, że **liczba stopni swobody dla sumy kwadratów wynosi** n-1
- Suma kwadratów dzielona przez liczbę stopni swobody to **odchylenie średnie kwadratowe (root-mean square - RMS)**

Pobieranie próby z rozkładów cząstkowych

Próby z rozkładów cząstkowych

- Czasem mamy do czynienia z sytuacją, gdy nie da się wybrać losowo próby z populacji generalnej
- Możemy jednak podzielić populację generalną na podpopulacje:
- Przykład:
  - badamy jakąś cechę wszystkich studentów w Europie – populacja generalna
  - najłatwiej to zrobić poprzez badanie tej cechy na poszczególnych uniwersytetach – podpopulacje
  - rozkład podpopulacji **nie jest** taki sam jak rozkład populacji generalnej
  - podpopulacje są jednak związane z całą populacją
- W jaki sposób wnioskować o całej populacji na podstawie prób losowych wybranych z podpopulacji?

Próby z rozkładów cząstkowych

- Dzielimy populację generalną G na t podpolujacji G_i
- Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa należy do Gi:

$$P(X \in G_i) = p_i$$

- Podpopulacje G_i, które są opisane gęstościami prawdopodobieństwa $f_i(x)$ i mają odpowiednie dystrybuanty $F_i(x)$:

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(x)\,dx = P(X \leqslant x | x \in G_i)$$

- Dla całej populacji mamy zatem:

$$F(x) = P(X \leqslant x | x \in G) = \sum_{i=1}^{t} P(X < x | X \in G_i) P(X \in G_i) = \sum_{i=1}^{t} P(X \in G_i) F_i(x) = \sum_{i=1}^{t} p_i F_i(x)$$

- Dla gęstości prawdopodobieństwa populacji: $f(x) = \sum_{i=1}^{t} p_i f_i(x)$

- Obliczamy wartość oczekiwaną populacji G:

$$\hat{x} = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{t} p_i \int_{-\infty}^{\infty} x f_i(x)\,dx = \boxed{\sum_{i=1}^{t} p_i \hat{x}_i}$$

Próby z rozkładów cząstkowych

- Wartość oczekiwana populacji G:

$$\hat{x} = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{t} p_i \int_{-\infty}^{\infty} x f_i(x)\, dx = \boxed{\sum_{i=1}^{t} p_i \hat{x}_i}$$

- **Wniosek:** wartość oczekiwana z populacji to średnia ważona wartości oczekiwanych podpopulacji pomnożonych przez ich prawdopodobieństwa
- Jak zatem wyznaczyć **wariancję populacji** na podstawie podpopulacji?

$$\sigma^2(X) = E\left((X-\hat{x})^2\right) = \sum_{i=1}^{t} p_i E\left(\left[(X-\hat{x}_i)+(\hat{x}_i-\hat{x})\right]^2\right) = \boxed{\sum_{i=1}^{t} p_i \left(\sigma_i^2+(\hat{x}_i-\hat{x})^2\right)}$$

- **Wniosek:** wariancja populacji jest średnią ważoną wariancji z podpopulacji σ_i i wariancji wartości średniej podpopulacji $\hat{x}_i$ względem wartości średniej z całej populacji $\hat{x}$
- To nie koniec… Teraz musimy wybrać **próby losowe z podpopulacji** i **policzyć estymatory**

Próby z rozkładów cząstkowych

- Teraz z każdej podpopulacji wybierzmy próbkę o liczności n_i, w sumie n elementów: $n=\sum_{n=1}^{t} n_i$. Średnia arytmetyczna z całej próby wynosi wtedy:

$$\bar{X}_p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t} n_i \bar{X}_i$$

- Wartość oczekiwana i wariancja (niepewność) średniej z całej próby:

$$E\left(\bar{X}_p\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t} n_i \hat{x}_i$$

$$\sigma^2\left(\bar{X}_p\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{t} n_i^2 E\left(\left(\bar{X}_i-\hat{x}_i\right)^2\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{t} n_i^2 \sigma^2\left(\bar{X}_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t}\frac{n_i}{n}\sigma_i^2$$

Estymatory dla rozkładów cząstkowych

- Zauważmy jednak, że wartość średnia X_p nie może być estymatorem wartości średniej z całej populacji $\hat{x}$, gdyż zależy ona od dowolnego wyboru wielkości n_i próbek cząstkowych

$$E\left(S\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right) = \lambda, \text{ dla każdego } n$$

- Jeśli jednak porównany wzory na średnią z populacji i całej próby:

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{t} p_i \hat{x}_i \qquad \bar{X}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{t} n_i \hat{x}_i$$

- To widać, że jeżeli warunek $p_i = n_i / n$ jest spełniony, to wartość średnia z populacji $\hat{x}$ może być estymowana przez wyznaczenie najpierw wartości średnich poszczególnych prób X_i, wewnątrz poszczególnych podpopulacji, a potem przez wyrażenie:

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{t} p_i \bar{X}_i \qquad p_i = \frac{n_i}{n}$$

- estymator wartości średniej z populacji
zależeny od wartości średnich z prób

- Wariancja powyższego estymatora: $\sigma^2\left(\tilde{X}\right) = \sum_{i=1}^{t} p_i^2 \sigma^2\left(\bar{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{t} \frac{p_i^2}{n_i} \sigma_i^2$
- Oczywiście, chcielibyśmy tak dobierać próbki, by była ona jak najmniejsza:

$$n_i = n\, p_i \sigma_i / \sum_{i=1}^{t} p_i \sigma_i$$

Estymatory dla rozkładów cząstkowych

- Gdzie my to wszystko wykorzystujemy i po co?
  - Możemy sobie wyobrazić badania społeczne, gdzie próbujemy wnioskować na temat całej populacji poprzez analizy poszczególnych podgrup (podpopulacji) – np. analizujemy dane na temat wszystkich studentów w Europie poprzez poszczególne analizy studentów poszczególnych typów uczelni (np. osobno techniczne, medyczne, ogólne)
  - Albo rozkład powierzchni zajmowanej przez pewien gatunek trawy
  - Czy przeprowadzamy badania kliniczne leku w wielu ośrodkach w różnych krajach

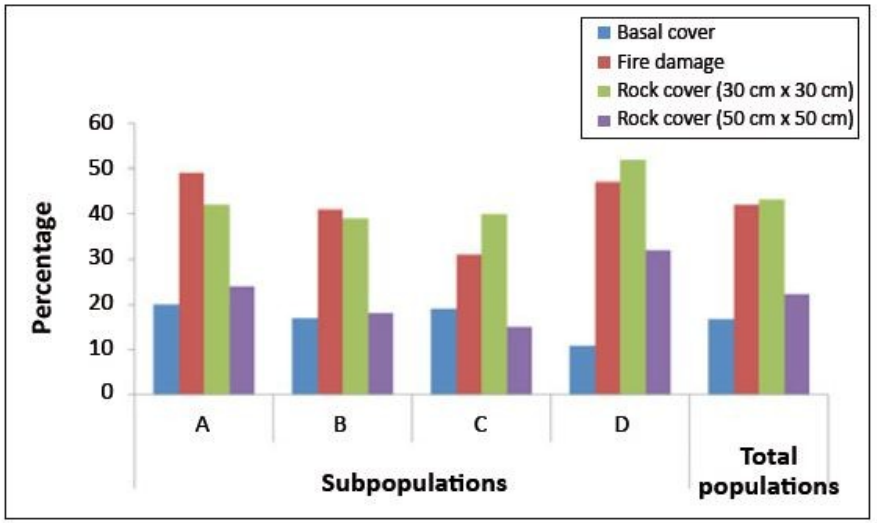


FIGURE 6: Percentage basal grass cover, fire damage and rock cover per subpopulation and total population of *Haworthia koelmaniorum* var. *Mcmurtryi* within the study area.

Pobieranie próby z rozkładu normalnego

Pobieranie próby z rozkładu normalnego

- Badamy populację opisaną rozkładem Gaussa o wartości średniej a i wariancji σ^2. Z tej populacji wybieramy próbę o liczności n
- Napiszmy funkcję charakterystyczną tego rozkładu:

$$\phi_X(t) = \exp(ita)\exp(-\sigma^2 t^2/2)$$

- Oraz funkcję char. dla wartości średniej (patrz Brandt):

$$\phi_{\bar{X}}(t) = \left\{\exp\left(i\frac{t}{n}a\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)\right\}^n$$

- Rozpatrując zmienną $\bar{X} - a$ zamiast X dostaniemy:

$$\phi_{\bar{X}-a}(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right)$$

wartość średnia pobranej próby (czyli estymator wielkości a :))

- Czyli funkcję charakterystyczną rozkładu normalnego **zmienionej wariancji**: $\sigma^2(\bar{X}) = \sigma^2(X)/n$
- Rozpatrzmy najprostszy przypadek – rozkład normalny (średnia 0 i odchylenie standardowe 1): $\phi_{\bar{X}}(t) = \exp(-t^2/2n)$
- Pobieramy z niego próbę n-elementową i tworzymy sumę kwadratów:

$$\chi^2 \equiv X^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

Pobieranie próby z rozkładu normalnego

- Można udowodnić, że dystrybuanta ma postać:

$$F(\chi^2)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)2^{\lambda}}\int_0^{\chi^2} u^{\lambda-1}e^{-1/2u}du$$

  - gdzie $\lambda=1/2\,n$ a n to liczba stopni swobody
- Wprowadzając oznaczenie: $k=\frac{1}{\Gamma(\lambda)2^{\lambda}}$
- Otrzymujemy rozkład gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(\chi^2)=k\cdot(\chi^2)^{\lambda-1}e^{-1/2\chi^2}$$

- Funkcja charakterystyczna rozkładu χ^2 ma postać:

$$\phi_{\chi^2}(t)=(1-2it)^{-\lambda}$$

- Korzystając z jej własności funkcji charakterystycznej otrzymujemy natychmiast, że suma dwóch różnych χ^2 o n_1 i n_2 stopniach swobody daje również rozkład χ^2 o $n=n_1+n_2$ stopniach swobody

Pobieranie próby z rozkładu normalnego

- Różniczkując funkcję charakterystyczną możemy wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu χ^2:

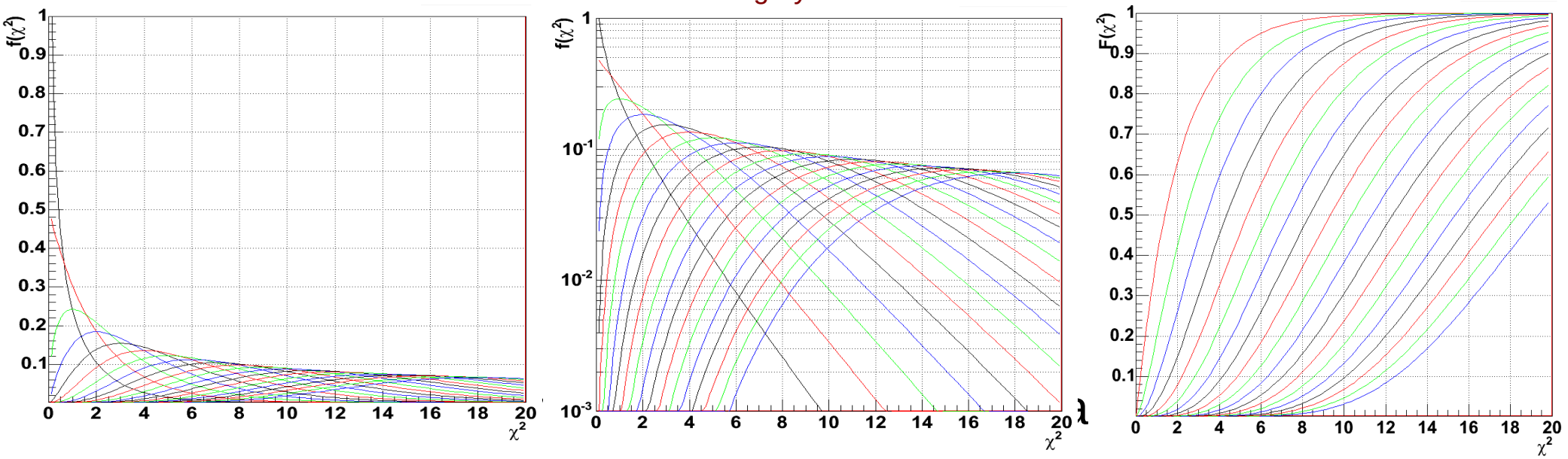
$$E\left\{X^2\right\} = -i\,\phi_{\chi^2}'(0) = 2\lambda \equiv n$$

$$E\left\{(X^2)^2\right\} = -i\,\phi_{\chi^2}''(0) = 4\lambda^2 + 4\lambda$$

$$\sigma^2(X^2) = E\left\{(X^2)^2\right\} - \left(E\left\{X^2\right\}\right)^2 = 4\lambda \equiv 2n$$

- Czyli wartość średnia z rozkładu χ^2 wynosi n a wariancja $2n$

skala logarytmiczna



Rozkład χ^2 – zastosowanie

- Rozkład χ^2 stosuje się jako **miarę ufności** uzyskanego wyniku (**odchylenia elementów próby od wartości średniej populacji)**. Im mniejsza wartość χ^2 tym pozornie słuszniejszy wynik. Jako miary zaufania do wyniku używa się wielkości:

$$W\left(\chi^2\right)=1-F\left(\chi^2\right)\equiv p=1-\alpha$$

  nazywanej **poziomem ufności** (zwykle podawanym w % ilości odchyleń standardowych rozkładu normalnego σ)

  - wielkość α jest nazywana **poziomem istotności**

- W rzeczywistych przypadkach mamy do czynienia z pełnym rozkładem Gaussa o dowolnym a i σ. Wprowadzamy wtedy odpowiednie przeskalowanie

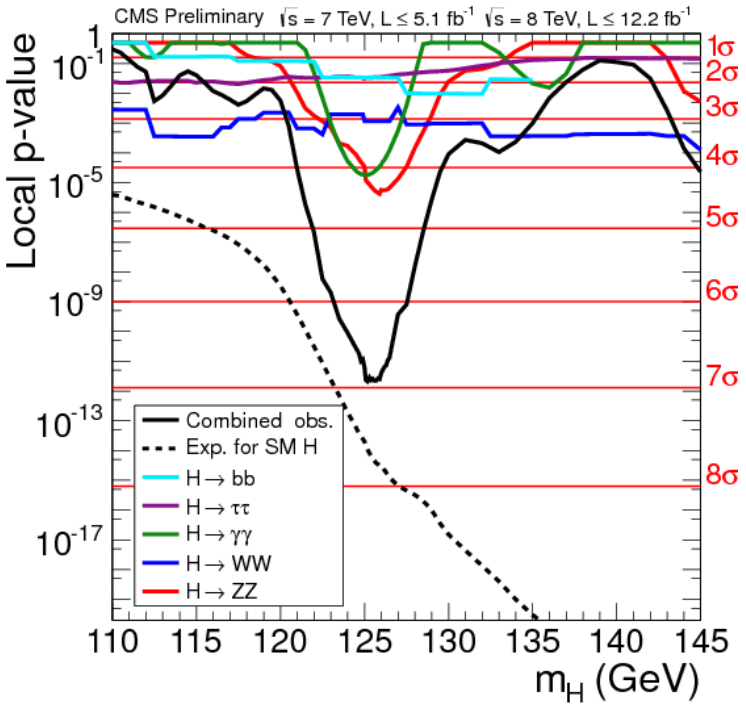
$$\chi^2=X^2=\frac{\left(X_1-a\right)^2+\left(X_2-a\right)^2+\ldots+\left(X_n-a\right)^2}{\sigma^2}$$

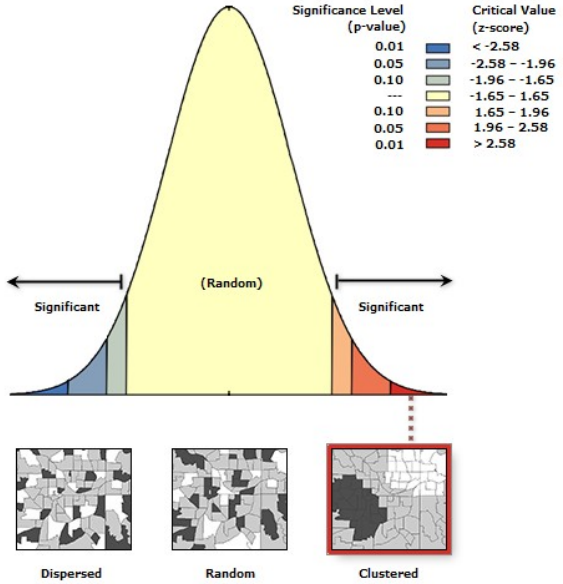
- a w ogólnym przypadku wielowymiarowym, gdy zmienne są zależne:

$$\chi^2=X^2=\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}\right)^T B\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}\right)$$

Rozkład χ^2 a estymator wariancji

- Można udowodnić, że zmienna losowa: $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2$ ← estymatyor wariancji
- ma rozkład χ^2 z $f=n-1$ stopniami swobody. Wynika to stąd, że wyrażenia $(X_i-\bar{X})^2$ nie są liniowo niezależne (co już wiemy). Każde dodatkowe równanie (więzy) pomiędzy wyrażeniami $(X_i-\bar{X})^2$ redukuje liczbę stopni swobody o 1
- Poziomy ufności – przykład:





$$P(|Y-a|\leqslant\sigma)=68{,}3\% \quad P(|Y-a|>\sigma)=31{,}7\%$$
$$P(|Y-a|\leqslant 2\sigma)=95{,}4\% \quad P(|Y-a|>2\sigma)=4{,}6\%$$
$$P(|Y-a|\leqslant 3\sigma)=99{,}8\% \quad P(|Y-a|>3\sigma)=0{,}2\%$$


WYDZIAŁ FIZYKI
POLITECHNIKA WARSZAWSKA
POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WARSAW UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

KONIEC