Komputerowa analiza danych doświadczalnych

Wykład 3
10.03.2017

dr inż. Łukasz Graczykowski
lgraczyk@if.pw.edu.pl

Semestr letni 2015/2016

Dwuwymiarowe rozkłady zmiennych losowych

Jednoczesne pomiary dwóch wielkości

- W przypadku znakomitej większości pomiarów jednocześnie mierzymy dwie i więcej wielkości fizycznych (np. napięcie I natężenie prądu w obwodzie)
- Analogicznie w badaniach społecznych, możemy badać jednocześnie kilka cech populacji (np. zamożność i długość życia)
- **Kluczowe pytanie** – czy (i jeśli tak to jaka) jest zależność między tymi wielkościami? Jak jedna wielkość wpływa na drugą? Innymi słowy: jakie są korelacje między tymi zmiennymi?

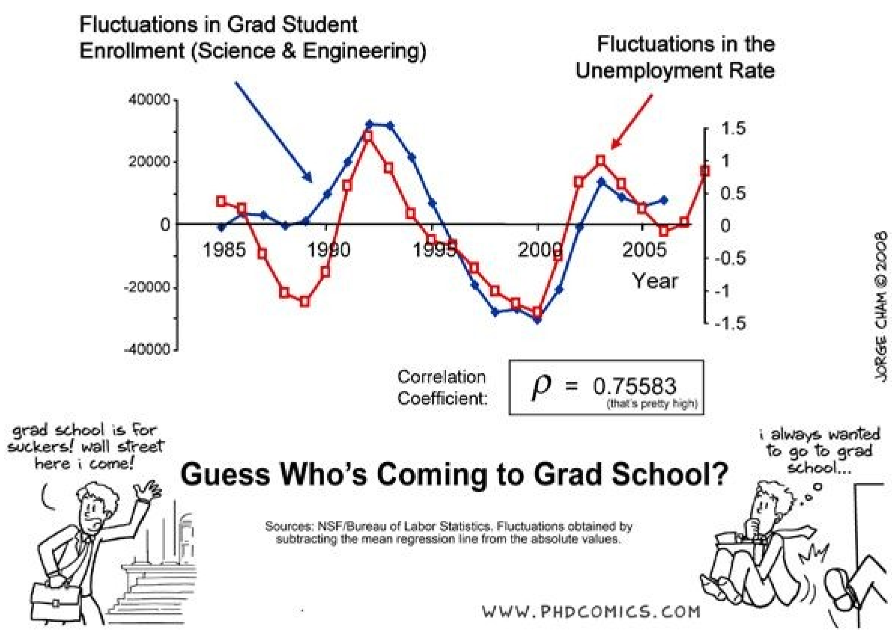
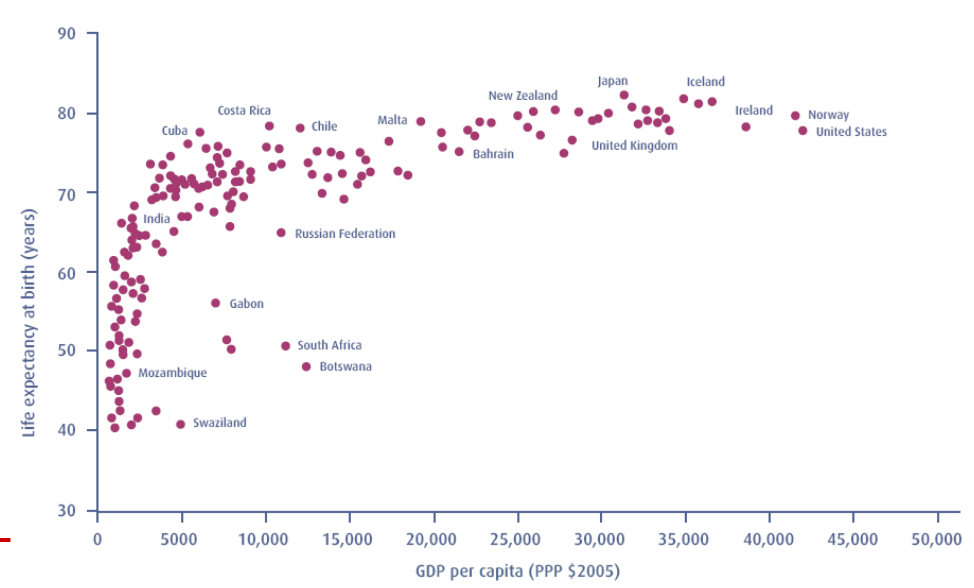


Figure 8 Life expectancy at birth vs average annual income[16]



Rozkład i dystrybuanta 2D

- W wyniku jednokrotnego pomiaru otrzymujemy dwie liczby:
  - (x,y), które są wartościami zmiennej losowej X, oraz Y
- **Rozkład prawdopodobieństwa**:

$$f(x,y)=P(X=x,Y=y) \qquad p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$$

  - rozkład prawdopod. jest unormowany
    - rozkład ciągły: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=1$
    - rozkład dyskretny: $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=1$
- **Dystrybuanta**:

$$F(x,y)=P(x\leqslant X,y\leqslant Y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x',y')\,dx'dy' \qquad F(x)=\sum_{i:x_i\leqslant X}\sum_{j:y_j\leqslant Y} p_{ij}$$

- Jeżeli dystrybuanta jest funkcją ciągłą obu zmiennych, to:

$$f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)$$

- Prawdopodobieństwo:

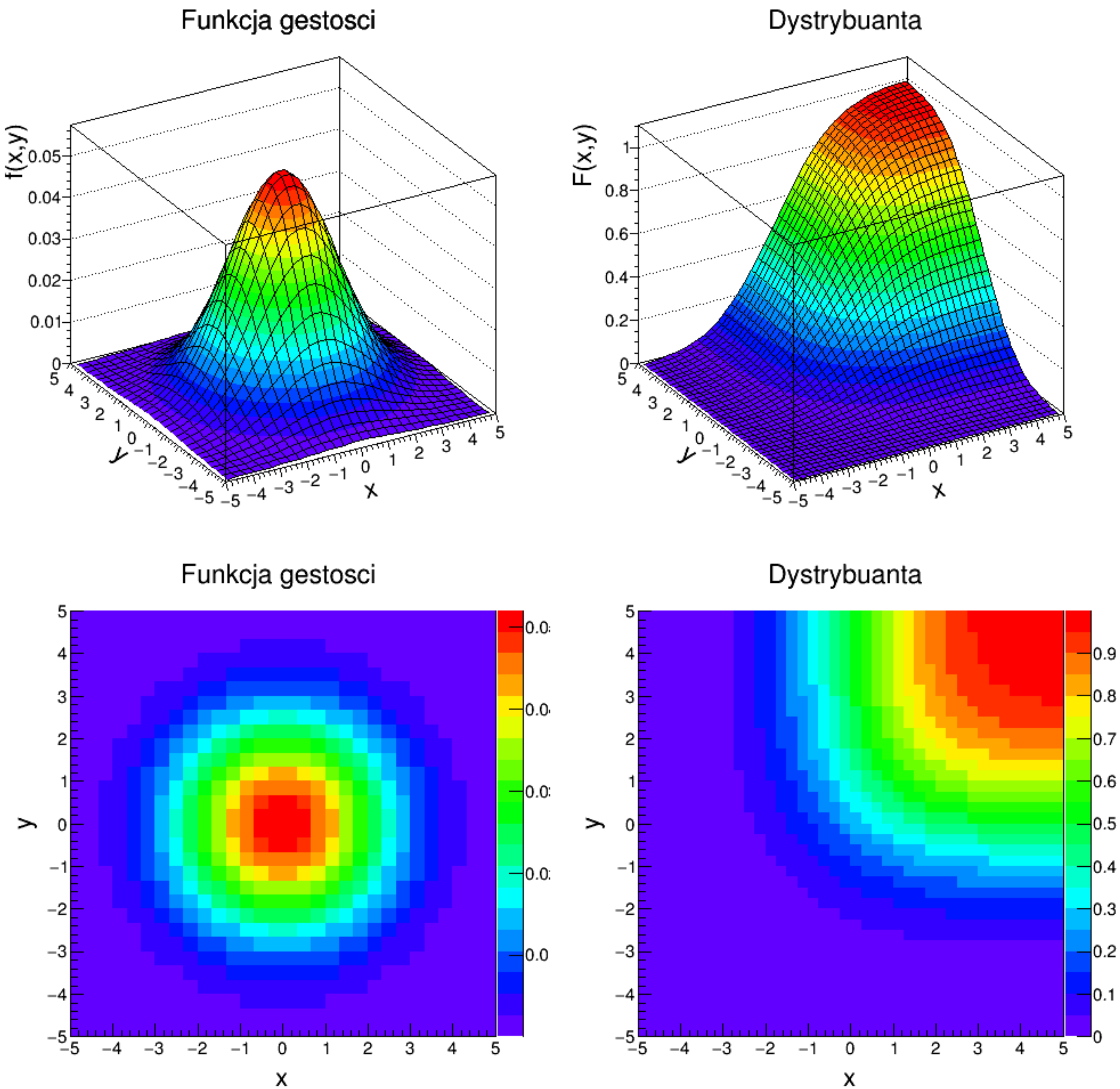
$$P(a\leqslant X\leqslant b,c\leqslant Y\leqslant d)=\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)\,dxdy=F(b,d)-F(a,b)$$

Zmienna losowa 2D – przykład

- Dwuwymiarowy rozkład Gaussa:

$$f(x,y)=N\cdot\exp\left(-\left(\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-\hat{y})^2}{2\sigma_y^2}\right)\right)$$

normalizacja



Rozkłady (gęstości) brzegowe

- Częsty problem doświadczalny:
  - mamy wynik pomiaru – zmienne losowe X, oraz Y, ale interesuje nas tylko zależność od X dla dowolnego Y
  - **przykład:** gęstość prawdopodobieństwa zgonów wywołanych pewnymi chorobami zakaźnymi jest funkcją czasu i położenia geograficznego; w badaniach potrzebujemy zająć się tylko zależnością czasową
- **Brzegowa gęstość prawdopodobieństwa**:

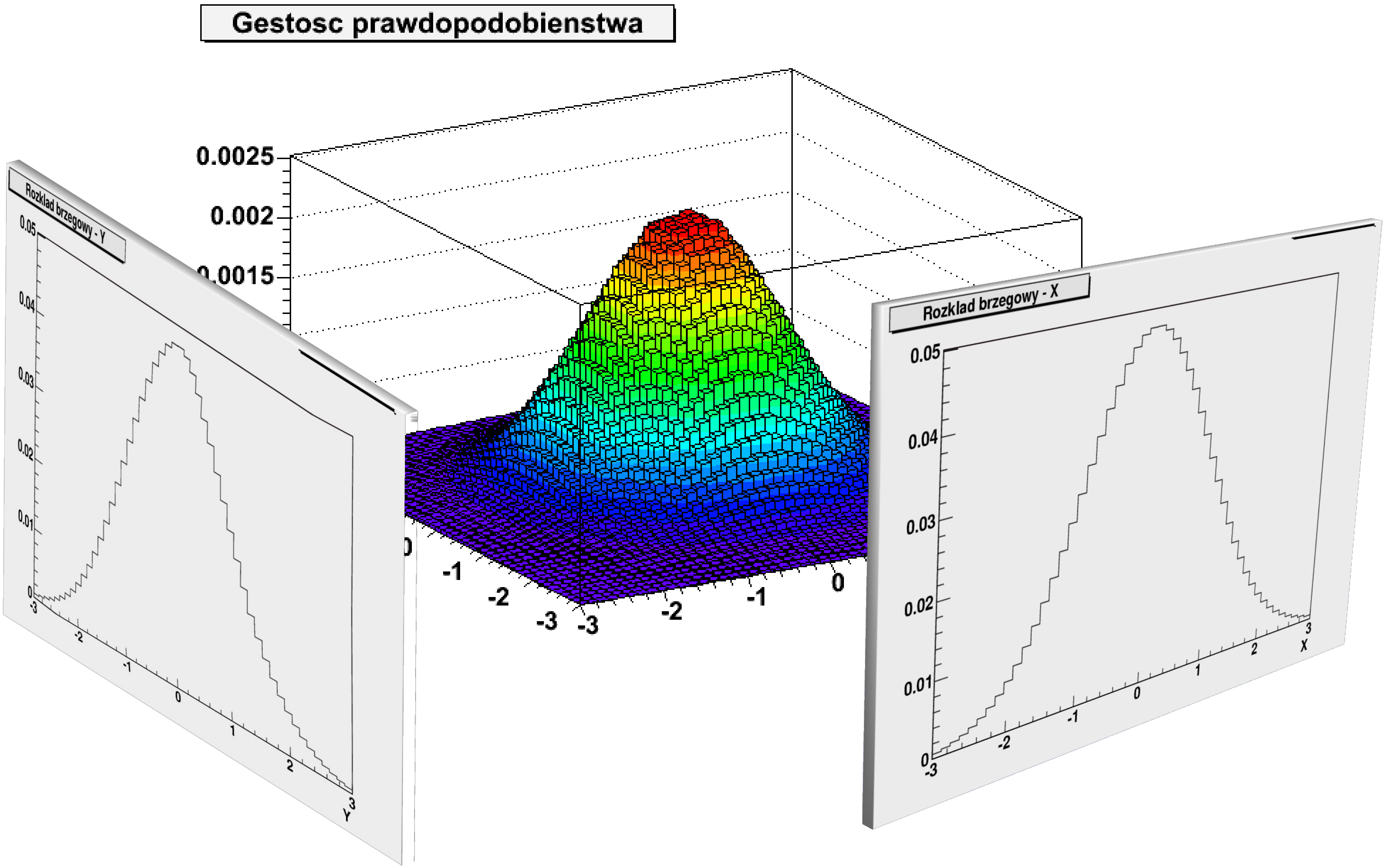
$$P(a \leqslant X \leqslant b, -\infty < Y < \infty) = \int_a^b \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \right] dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

- **Dystrybuanty brzegowe**:

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x,y) \qquad F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x,y)$$

Rozkłady (gęstości) brzegowe – przykład



Niezależnosć zmiennych

- **Prawdopodobieństwo warunkowe**:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)P(B|A)$$

- Dla zdarzeń niezależnych:

$$P(B|A)=P(B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

- Analogicznie dla **zmiennych losowych niezależnych**:

$$f(x,y)=g(x)h(y)$$

- Warunkowa gęstość prawdopodobieństwa:

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{g(x)}$$

- Prawdopodobieństwo warunkowe zmiennej losowej Y przy znanej wartości zmiennej losowej X:

$$P(y\leqslant Y\leqslant y+dy|x\leqslant X\leqslant x+dx)=f(y|x)dy$$

- Rozkłady brzegowe: $h(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)g(x)dx$ $\qquad g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)g(y)dy$

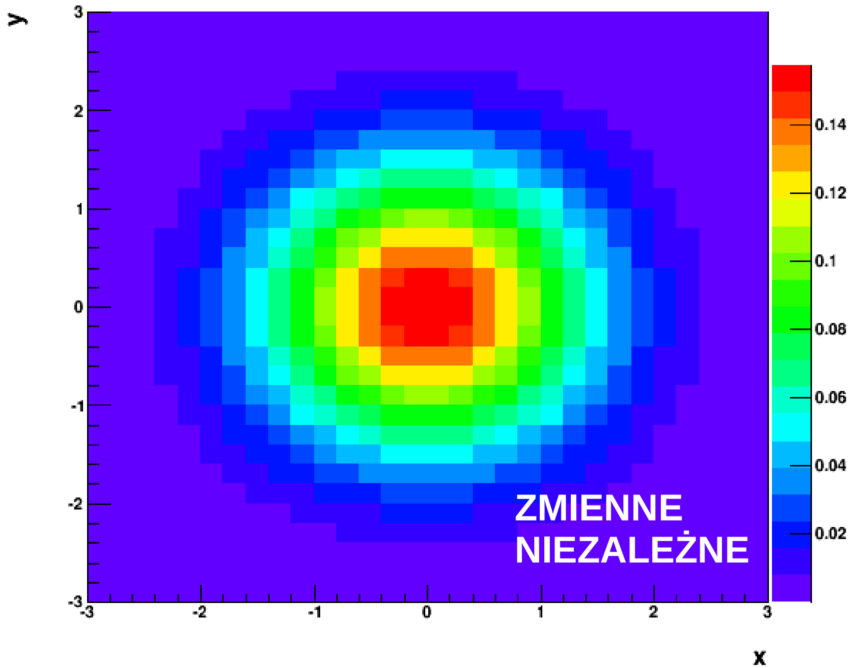
Niezależność zmiennych

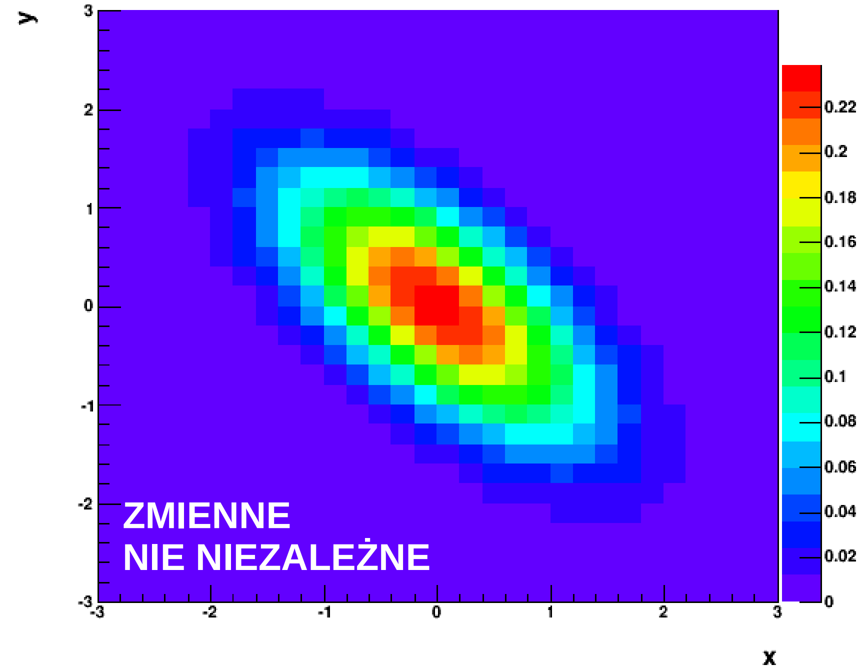
- Dla zmiennych niezależnych otrzymamy:

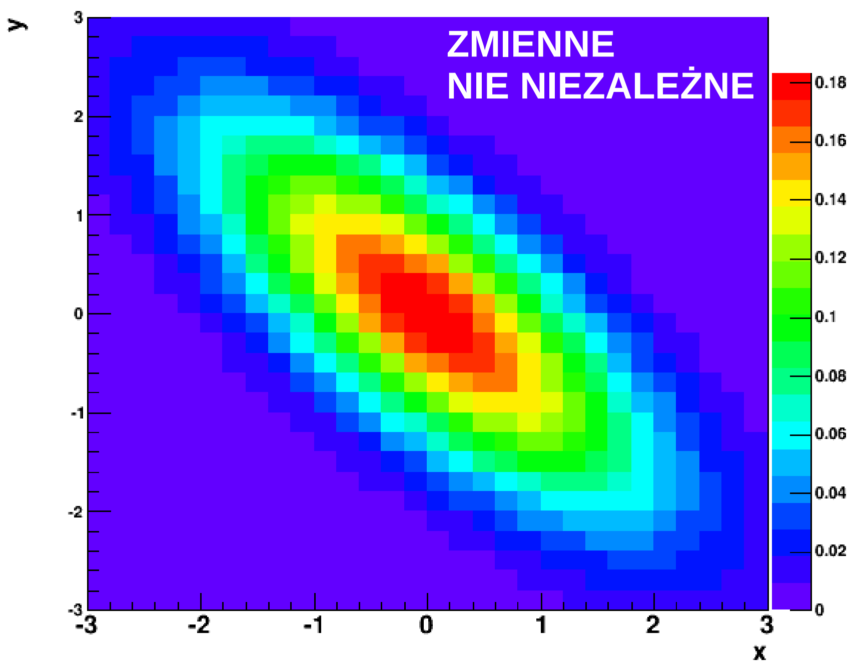
$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}=\frac{g(x)h(y)}{g(x)}=h(y)$$

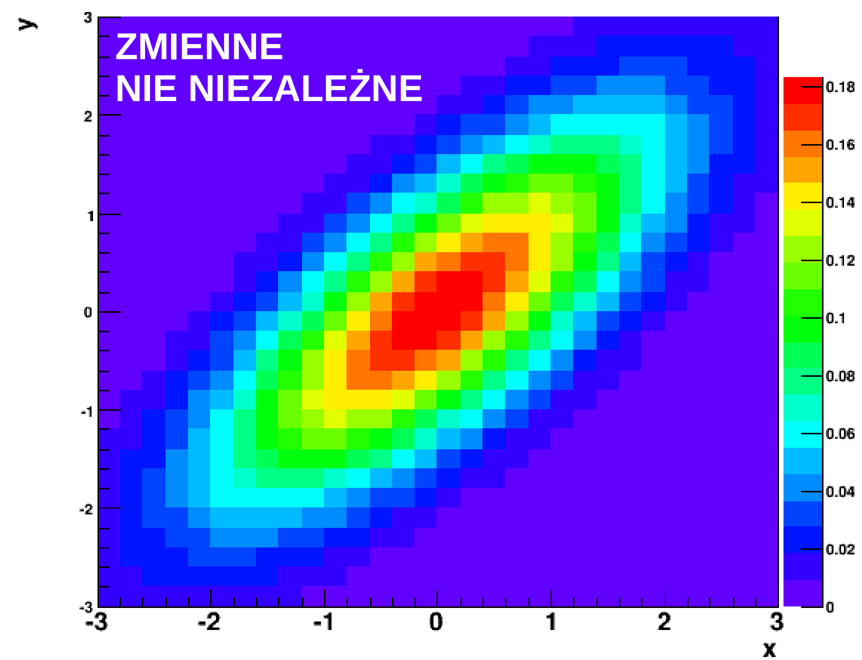
- Wynik ten pokazuje łatwy do przewidzenia fakt – jakikolwiek warunek narzucony na jedną zmienną nie może wpłynąć na rozkład drugiej zmiennej (jeśli są niezależne)

Niezależnosć zmiennych









Wartość oczekiwana, wariancja, momenty

- Wartość oczekiwana

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dxdy \qquad E(XY)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j p_{ij}$$

- Jeżeli mamy funkcję $H(x,y)$, to wartość oczekiwana:

$$E(H(X,Y))=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)f(x,y)\,dxdy$$

- Wariancja:

$$\sigma^2(X,Y)=E\left(\left[E(X,Y)-E(X,Y)\right]^2\right) \qquad \sigma^2(H(X,Y))=E\left(\left[E(H(X,Y))-E(H(X,Y))\right]^2\right)$$

- Jeżeli: $H(x,y)=a\cdot X+b\cdot Y$ wówczas: $E(a\cdot X+b\cdot Y)=a\cdot E(X)+b\cdot E(Y)$
- Moment zwykły rzędu l i m względem zmiennych X i Y:

$$\lambda_{lm}=E(x^l y^m)$$

- Ogólniej – moment rzędu l i m względem punktów a i b:

$$\alpha_{lm}=E\left((x-a)^l(y-b)^m\right)$$

- Momenty centralne: $\mu_{lm}=E\left((X-\lambda_{10})^l(Y-\lambda_{01})^m\right)$

Wartość oczekiwana, wariancja, momenty

- Momenty o specjalnym znaczeniu:

$$\mu_{00}=\lambda_{00}=1$$
$$\mu_{10}=\mu_{01}=0$$
$$\lambda_{10}=E(x)=\hat{x}$$
$$\lambda_{01}=E(y)=\hat{y}$$
$$\mu_{11}=E((X-\hat{x})(Y-\hat{y}))=cov(X,Y)$$
$$\mu_{20}=E\left((X-\hat{x})^2\right)=\sigma^2(X)$$
$$\mu_{02}=E\left((Y-\hat{y})^2\right)=\sigma^2(Y)$$

- Wariancja dla zmiennej $aX+bY$:

$$\sigma^2(a\cdot X+b\cdot Y)=E\left((a\cdot X+b\cdot Y)-E(a\cdot X+b\cdot Y)\right)=a^2\sigma^2(X)+b^2\sigma^2(Y)+2ab\cdot cov(X,Y)$$

- Jeżeli założymy funkcję H w postaci iloczynu: $H(X,Y)=X\cdot Y$

$$E(X\cdot Y)=E(X)E(Y)$$

- Wielkości $E(X)$, $E(Y)$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ są podobne jak w 1D

Kowariancja

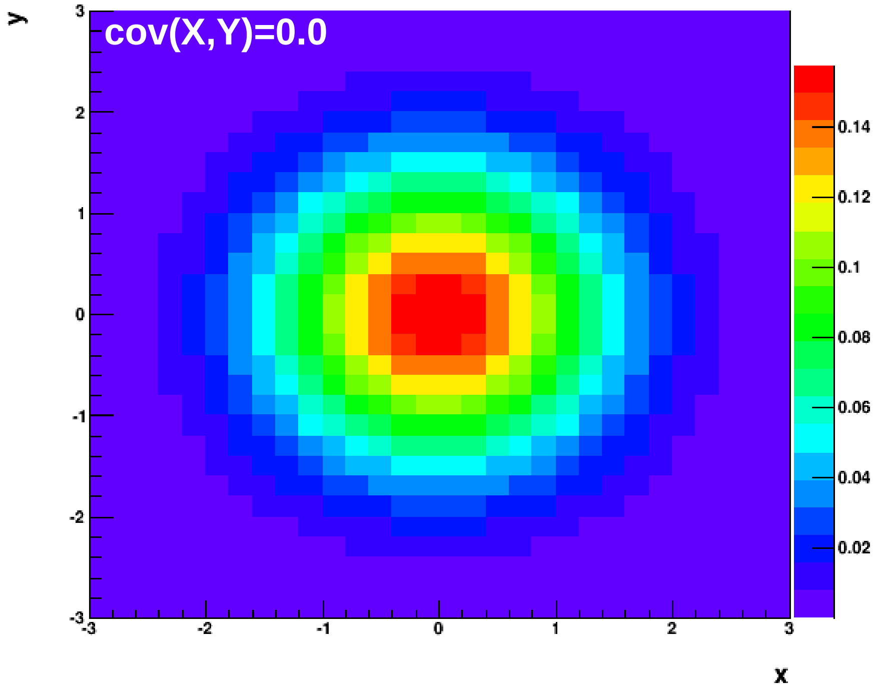
- **Kowariancja** $cov(X,Y)$ nie ma odpowiednika w przypadku rozkładów 1D
- Z definicji kowariancji wynika, że:
  - jest dodatnia, gdy: $x > \hat{x}$ oraz $y > \hat{y}$
  - jest ujemna, gdy: $x > \hat{x}$ oraz $y < \hat{y}$
  - jeżeli nie ma zależności między X i Y, wówczas kowariancja wynosi 0

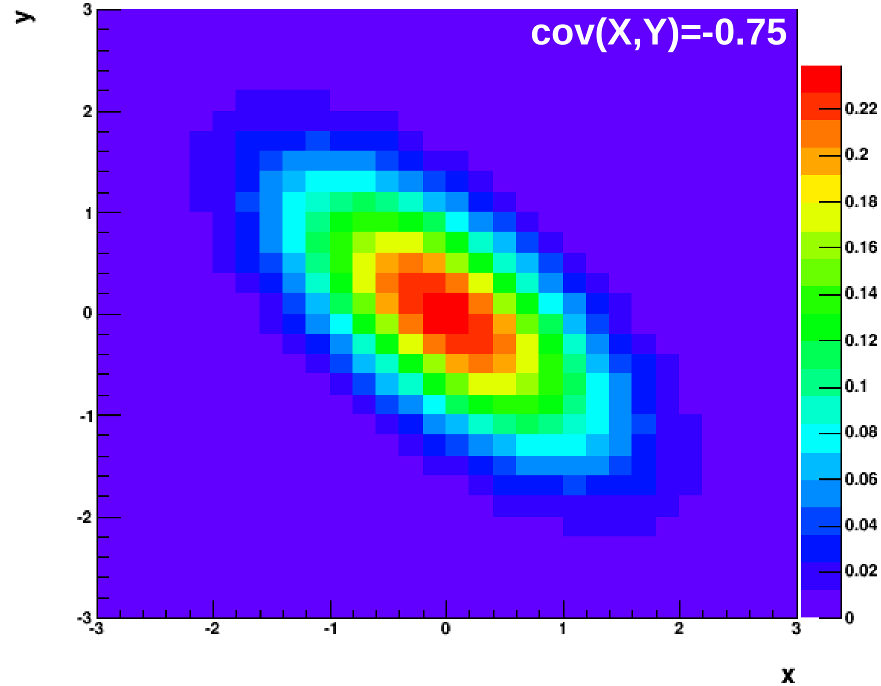
$$cov(X,Y) = \mu_{11} = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) = \boxed{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}$$

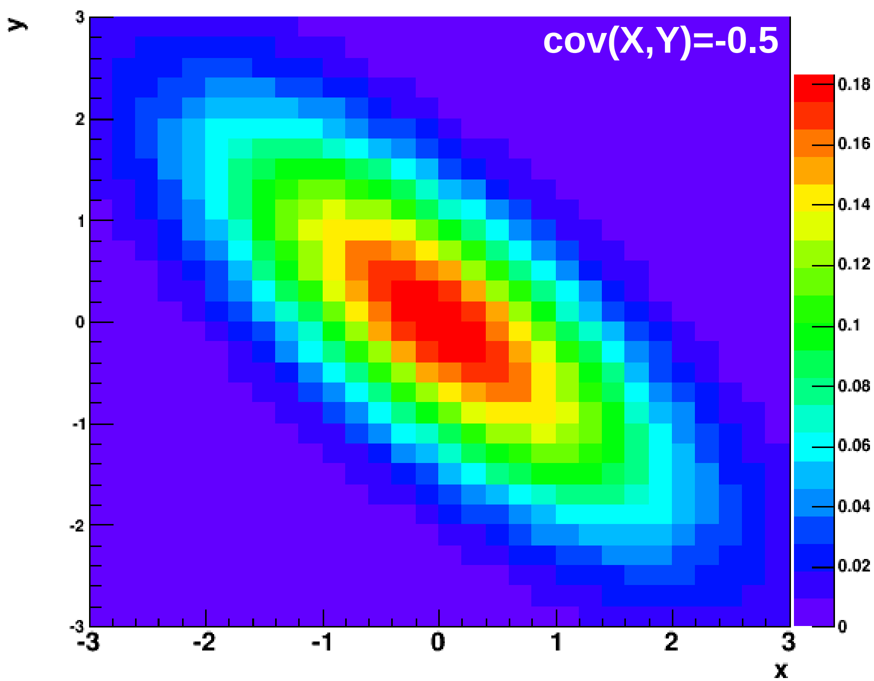
- **Interpretacja**: jeżeli między zmiennymi X i Y nie istnieje żadna korelacja liniowa i istnieją ich wartości oczekiwane, to kowariancja przyjmuje wartość 0. Czyli:

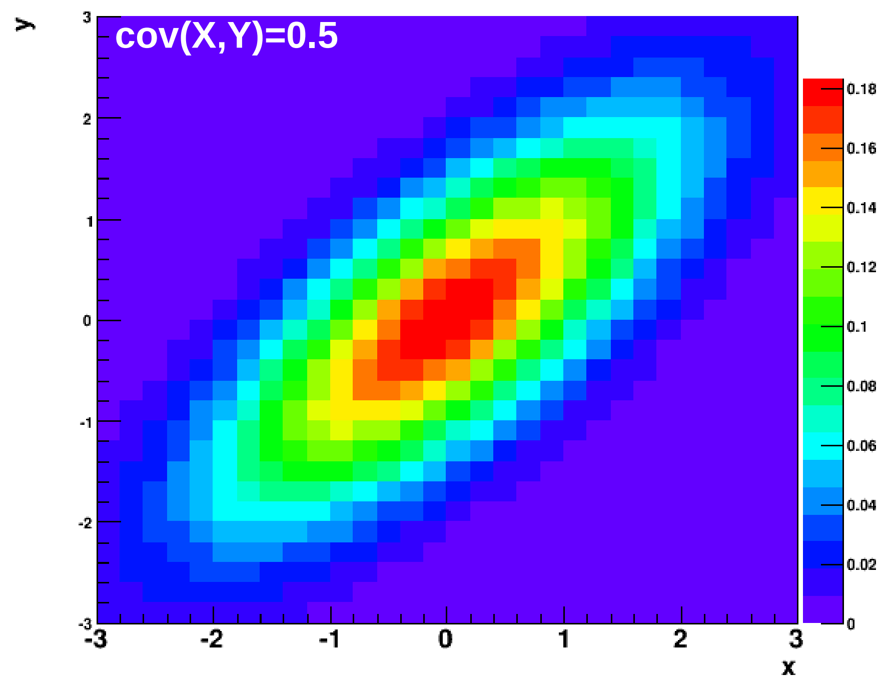
$$cov(X,Y) = 0 \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Kowariancja



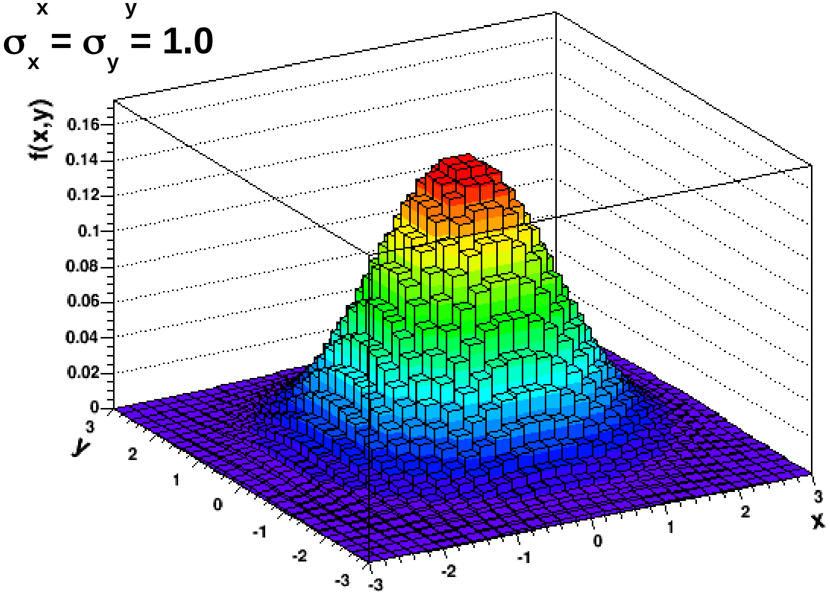




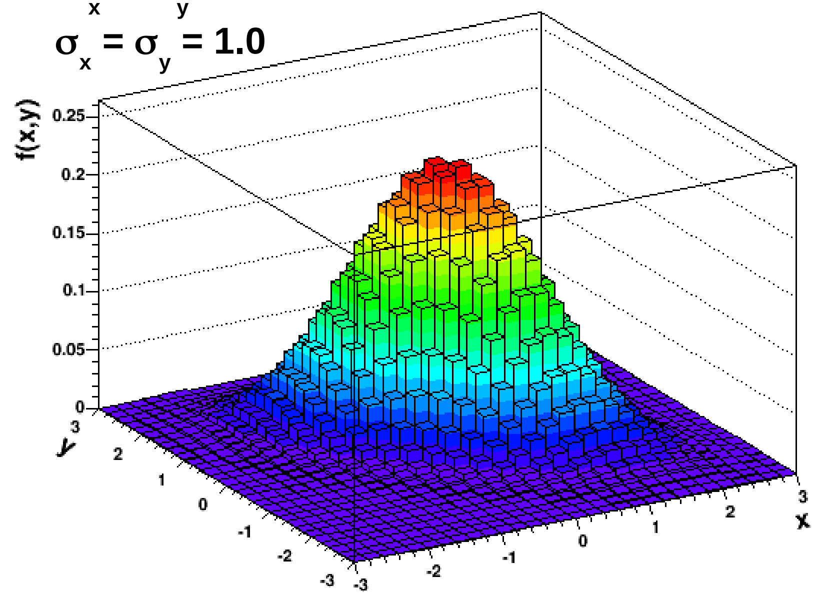


Kowariancja

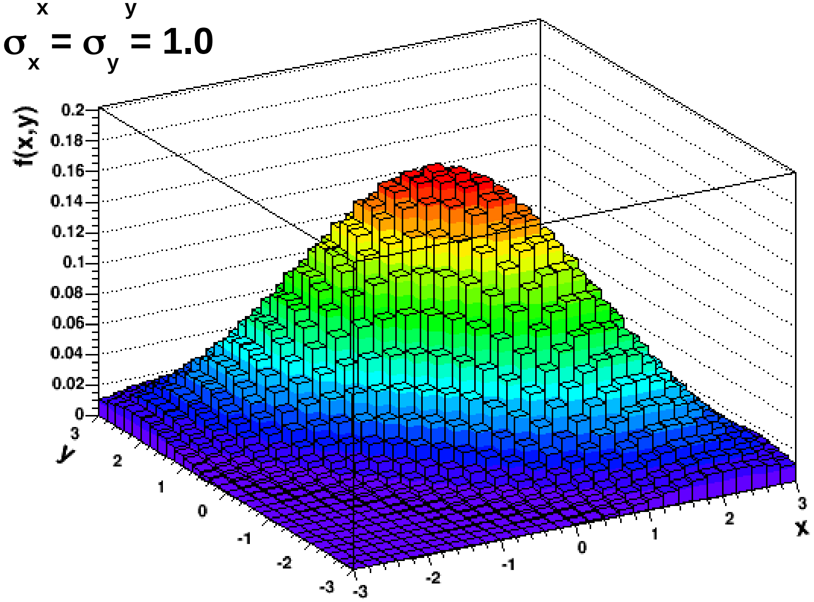
cov(X,Y)=0.0
$m_x = m_y = 0.0$
$\sigma_x = \sigma_y = 1.0$



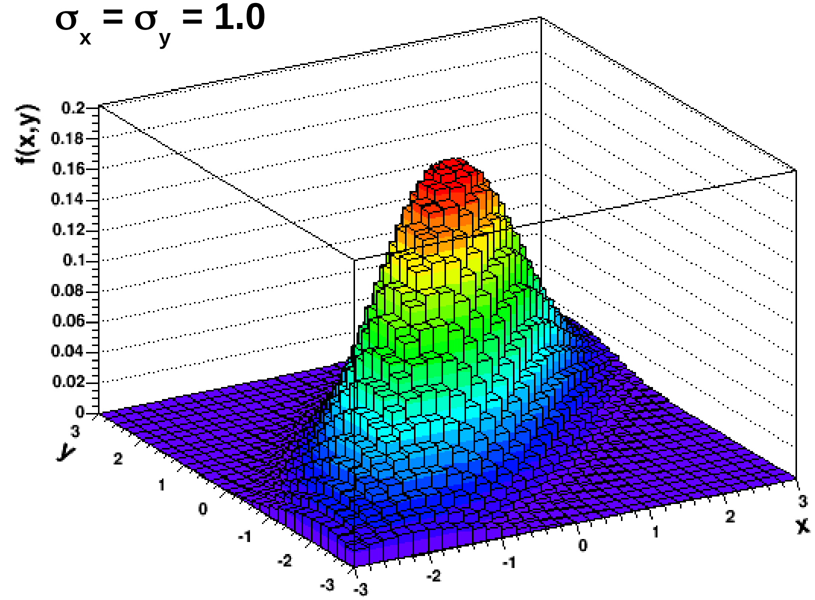
cov(X,Y)=-0.75
$m_x = m_y = 0.0$
$\sigma_x = \sigma_y = 1.0$



cov(X,Y)=-0.5
$m_x = m_y = 0.0$
$\sigma_x = \sigma_y = 1.0$



cov(X,Y)=0.5
$m_x = m_y = 0.0$
$\sigma_x = \sigma_y = 1.0$

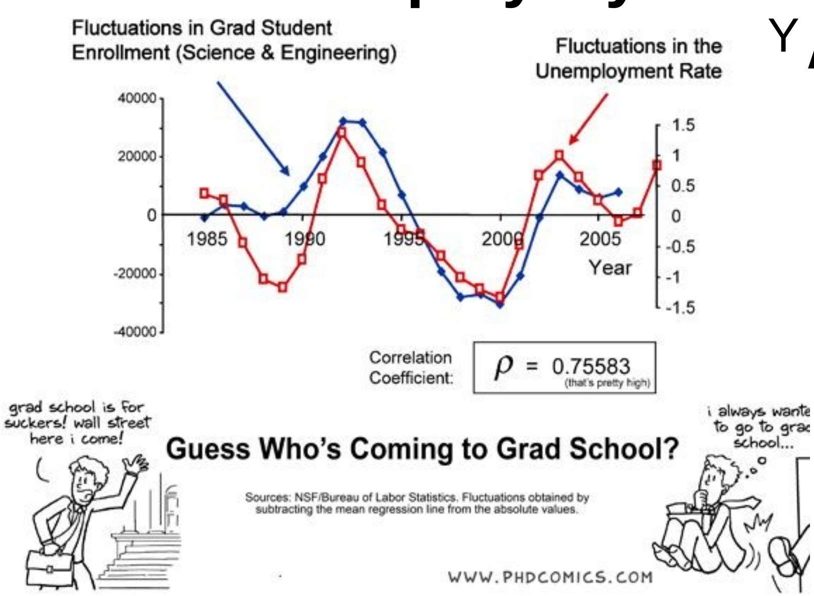


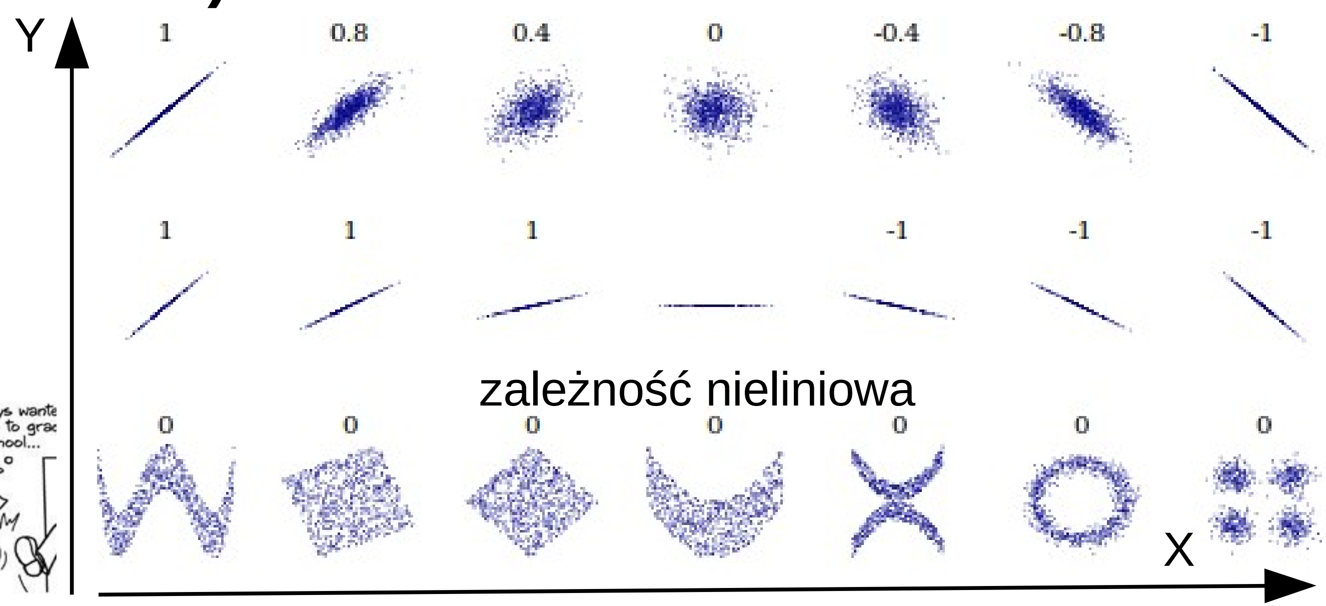
Współczynnik korelacji

- **Współczynnik korelacji (Pearsona):**

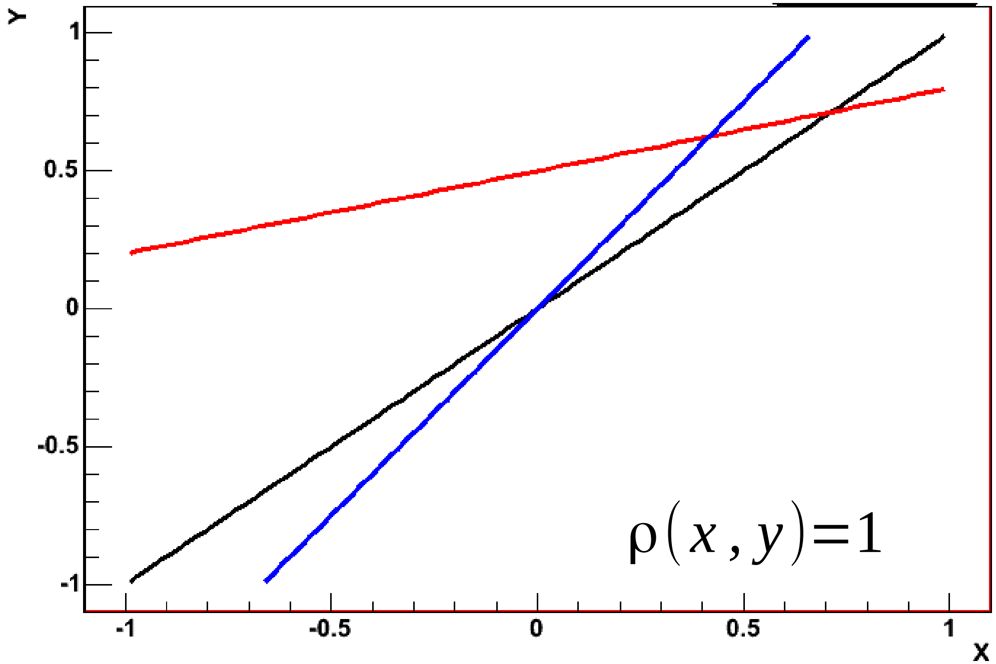
$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

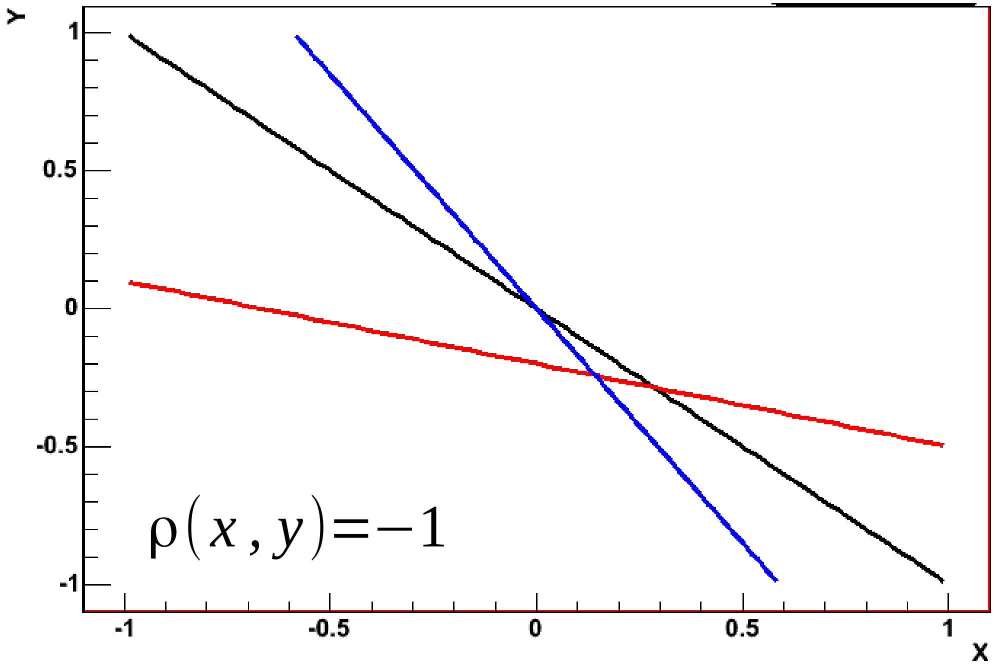
- Kowariancja i współczynnik korelacji to miary zależności liniowej X oraz Y:
- Można wykazać (patrz Brandt), że: $-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$
  - współczynnik korelacji jest zatem wielkością znormalizowaną
- Współczynnik korelacji ocenia **jedynie liniową zależność (nie jest to zależność przyczyna-skutek!)**



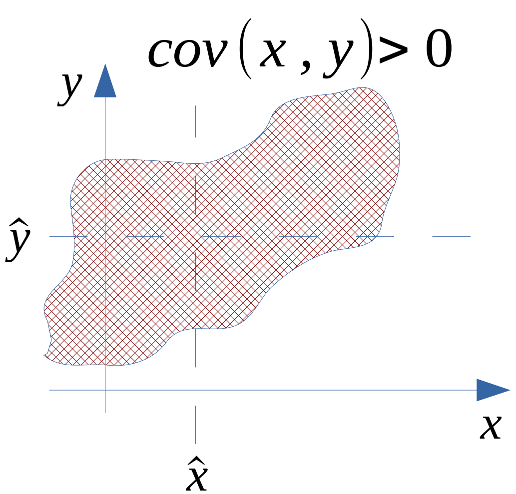


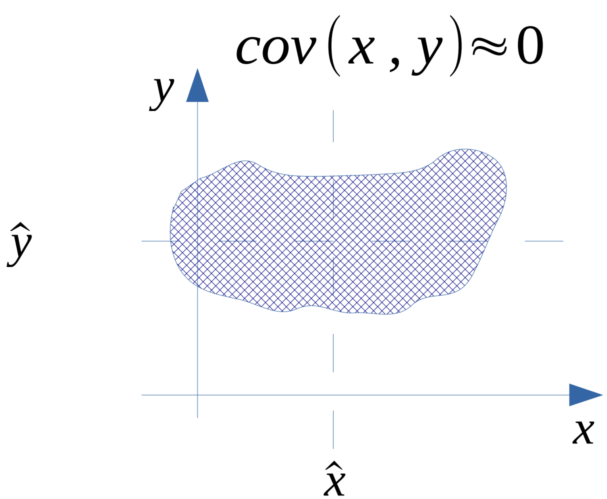
Kowariancja

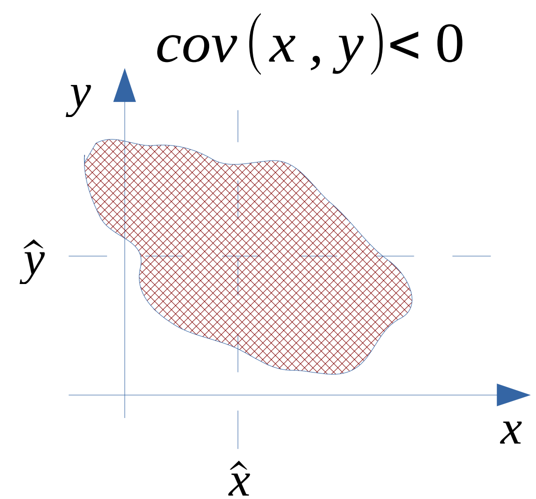




Rozkłady o maksymalnej kowariancji (wsp. korelacji)



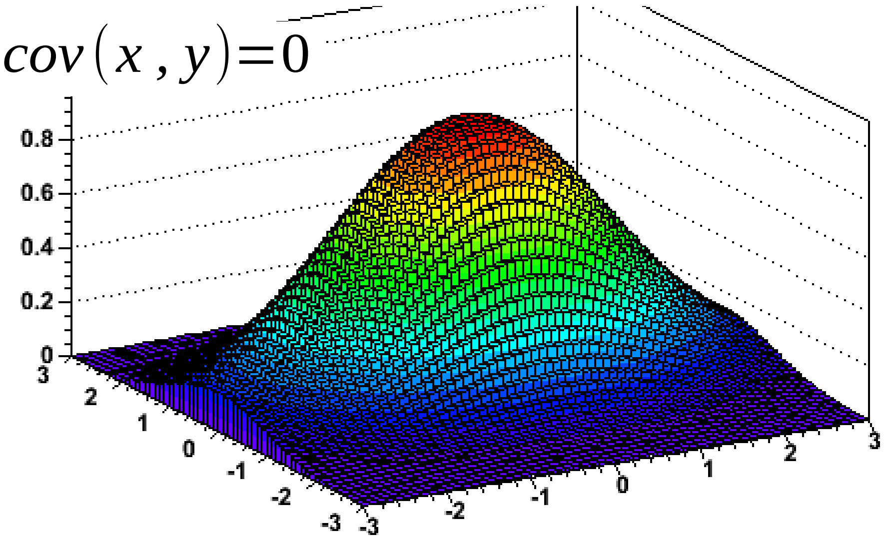




Korelacja a niezależność zmiennych

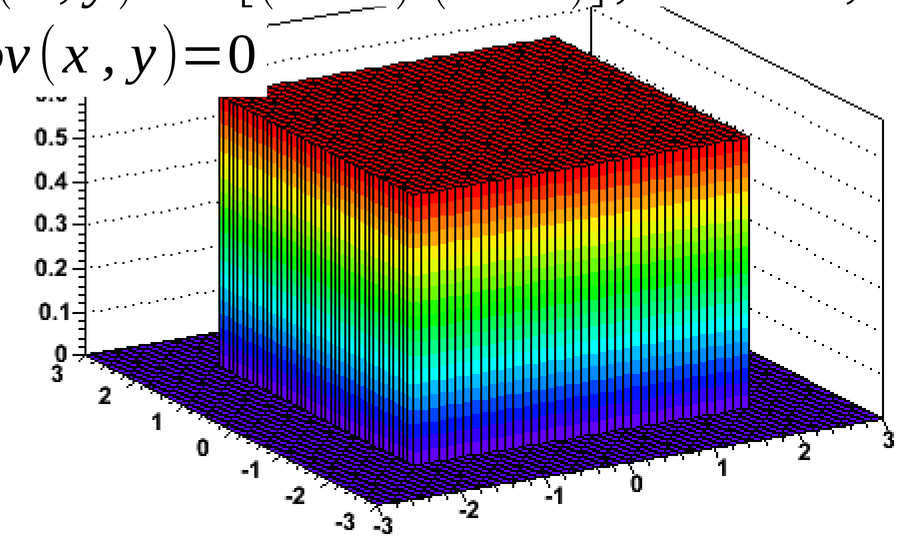
$f(x,y) = gaus(x) \cdot gaus(y)$

$cov(x,y) = 0$



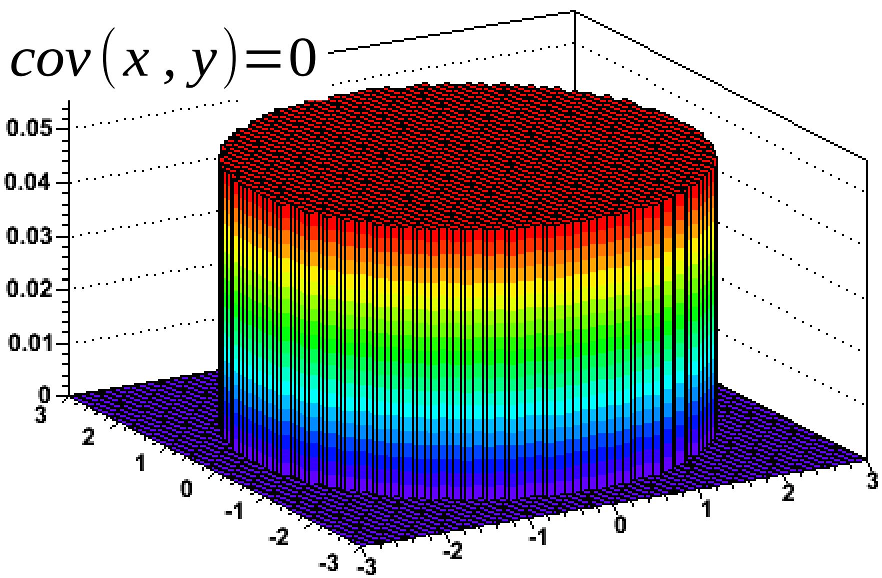
$f(x,y) = 1/[(a-b)\cdot(c-d)]; a < x < b, c < y < d$

$cov(x,y) = 0$



$f(x,y) = 1/(\pi R^2); \sqrt{x^2 + y^2} < R$

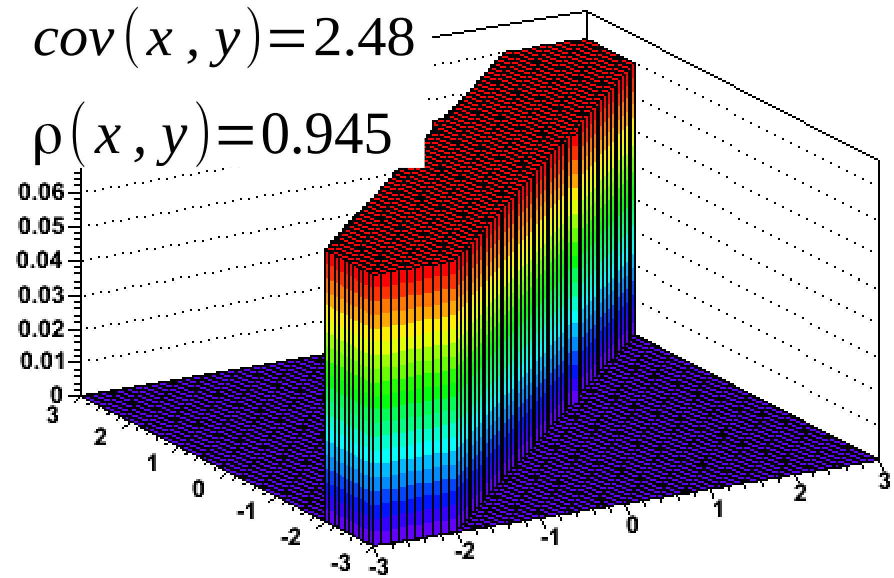
$cov(x,y) = 0$



$f(x,y) = 1/a; |x-y| < a$

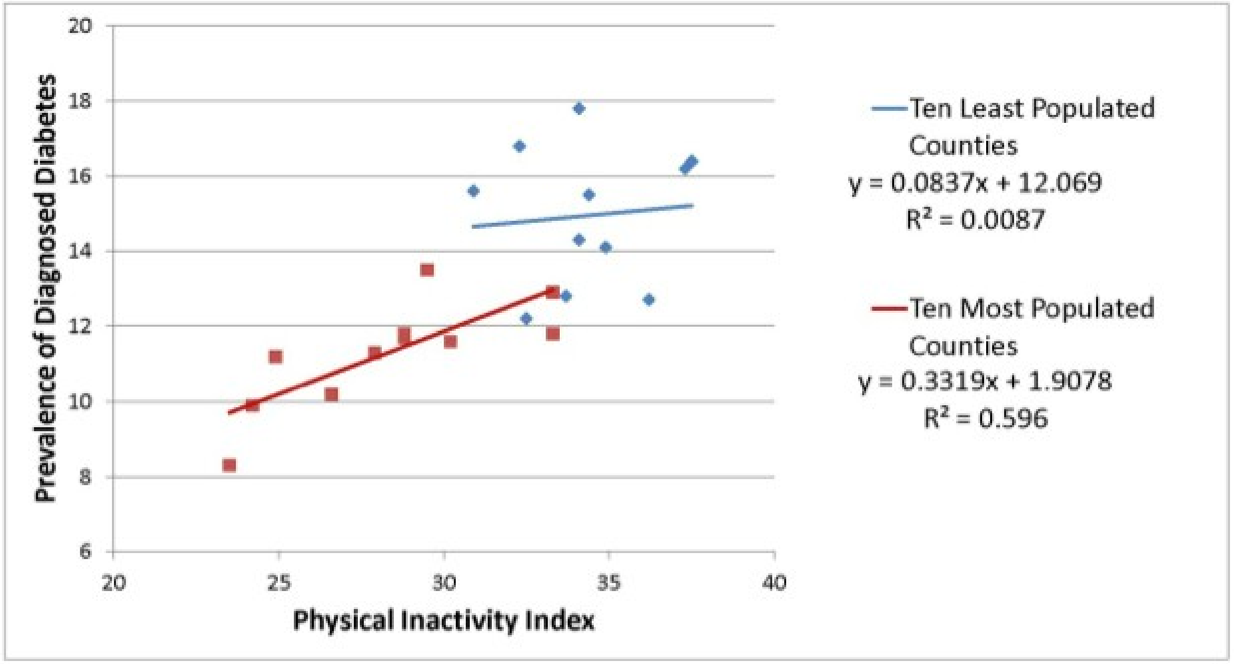
$cov(x,y) = 2.48$

$\rho(x,y) = 0.945$



Przykład - aktywność fiz. a cukrzyca

- Im mniejszy Physical Activity Index – tym większy wysiłek fizyczny
- W hrabstwach USA o małej populacji inne czynniki również mogą wpływać na cukrzycę
- Wysoka korelacja między aktywnością fizyczną a cukrzycą w krajach o wysokiej populacji (np. spowodowana miejskim trybem życia)



http://www.inquiriesjournal.com/articles/720/correlation-between-prevalence-of-diabetes-and-lack-of-physical-activity-in-alabama

Rozkład i dystrybuanta N-wymiarowa

- Mamy N zmiennych losowych:

$$(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

- **Rozkład prawdopodobieństwa**:

$$f(x_{1,} x_2 \ldots, x_N) = P(X_1 = x_{1,} X_2 = x_2, \ldots, X_N = x_N)$$

  - rozkład prawdopod. jest <u>unormowany</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_N = 1$$

- **Dystrybuanta**: $F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = P(x_1 \leqslant X_1, x_2 \leqslant X_2, \ldots, x_N \leqslant X_N) =$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \ldots \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_N} f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_N)\, dx'_1\, dx'_2 \ldots dx'_N$$

- Jeżeli dystrybuanta jest funkcją ciągłą, to:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial}{\partial x_N} F(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

- Gęstość brzegowa zmiennej x_r:

$$g_r(x_r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \ldots d_{x_{r-1}}\, d_{x_{r+1}} \ldots dx_N$$

Wartość oczekiwana, wariancja, kowariancja

- Wartość oczekiwana zmiennej x_r:

$$E(X_r)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} x_r\, f(x_1,x_2,\dots,x_N)\,dx_1\,dx_2\dots dx_N=\int_{-\infty}^{\infty} x_r\, g_r(x_r)\,dx_r$$

- Dla funkcji $H(x_1,x_2,\dots,x_N)$:

$$E\big(H(x_1,x_2,\dots,x_N)\big)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} H(x_1,x_2,\dots,x_N)\, f(x_1,x_2,\dots,x_N)\,dx_1\,dx_2\dots dx_N$$

- Wariancja zmiennej X_r:

$$\sigma^2(X_r)=E\left(\left(X_r-\hat{x}_r\right)^2\right)$$

- Jeżeli zmienne losowe są niezależne:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_N)=g_1(x_1)\,g_2(x_2)\dots g_N(x_N)$$

- Łączny rozkład brzegowy dla dowolnych l spośród N zmiennych:

$$g(x_1,x_2,\dots,x_l)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\dots,x_N)\,dx_{l+1}\dots dx_N$$

- Kowariancja pomiędzy zmiennymi x_i i x_j:

$$cov(X_i,X_j)=E\left(\left(X_i-\hat{x}_i\right)\left(X_j-\hat{x}_j\right)\right)$$

Momenty

- Przez analogię definiujemy również momenty (zwykłe):

$$\lambda_{l_1,l_2,\ldots,l_N}=E\left(X_1^{l_1}X_2^{l_2}\ldots X_N^{l_N}\right)$$

- W szczególności, wartości oczekiwane:

$$\lambda_{100\ldots0}=E\left(X_1\right)=\hat{x}_1$$

$$\lambda_{010\ldots0}=E\left(X_2\right)=\hat{x}_2$$

$$\lambda_{000\ldots N}=E\left(X_N\right)=\hat{x}_N$$

- Momenty centralne:

$$\mu_{l_1,l_2,\ldots,l_N}=E\left(\left(X_1-\hat{x}_1\right)^{l_1}\left(X_2-\hat{x}_2\right)^{l_2}\ldots\left(X_N-\hat{x}_N\right)^{l_N}\right)$$

- W szczególności, wariancje:

$$\mu_{200\ldots0}=E\left(\left(X_1-\hat{x}_1\right)^2\right)=\sigma^2\left(X_1\right)$$

$$\mu_{020\ldots0}=E\left(\left(X_2-\hat{x}_2\right)^2\right)=\sigma^2\left(X_2\right)$$

$$\mu_{000\ldots N}=E\left(\left(X_N-\hat{x}_N\right)^2\right)=\sigma^2\left(X_N\right)$$

Kowariancja:

$$l_i=l_j=1;\ \ \forall\, l_k=0\left(i\neq k\neq j\right)$$

$$c_{ij}=cov\left(X_i,X_j\right)=E\left(\left(X_i-\hat{x}_i\right)\left(X_j-\hat{x}_j\right)\right)$$

Zapis wektorowy

- N zmiennych losowych można przedstawić jako N-wymiarowy wektor (**wektor losowy**):

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

Wektor wartości zmiennych losowych

- Funkcja gęstości:

$$f(\boldsymbol{x})=P(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})$$

- Dystrybuanta:

$$F(\boldsymbol{x})=P(\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{x})$$

- Jeżeli istnieją pierwsze pochodne:

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{\partial^N}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_N} F(\boldsymbol{X})$$

- Wartość oczekiawana funkcji $H(\boldsymbol{X})$:

$$E(H(\boldsymbol{X}))=\int H(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

Macierz kowariancji

- Macierz, której elementy to odpowiednie momenty odpowiadające wariancjom i kowariancjom nazywamy **macierzą kowariancji**:

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots c_{NN} \end{pmatrix}$$

  - elementy c_{ij} dane są wzorem na kowariancję:

$$c_{ij}=cov(X_i, X_j)=E\left(\left(X_i-\hat{x}_i\right)\left(X_j-\hat{x}_j\right)\right)$$

  - elementy diagonalne c_{ii} to <u>wariancje</u>: $c_{ii}=\sigma^2(X_i)$
  - macierz kowariancji jest <u>symetryczna</u>: $c_{ij}=c_{ji}$
- wartość oczekiwana w zapisie wektorowym: $E(\boldsymbol{X})=\hat{\boldsymbol{x}}$

Macierz kowariancji

- Każdy element c_{ij}

$$c_{ij}=E\left(\left(X_i-\hat{x}_i\right)\left(X_j-\hat{x}_j\right)^T\right)$$

macierzy kowariancji możemy interpretować jako wartość średnią elementu o wskaźnikach ij iloczynu diadycznego wektorów $\left(\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{x}}\right)^T$ i $\left(\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{x}}\right)$

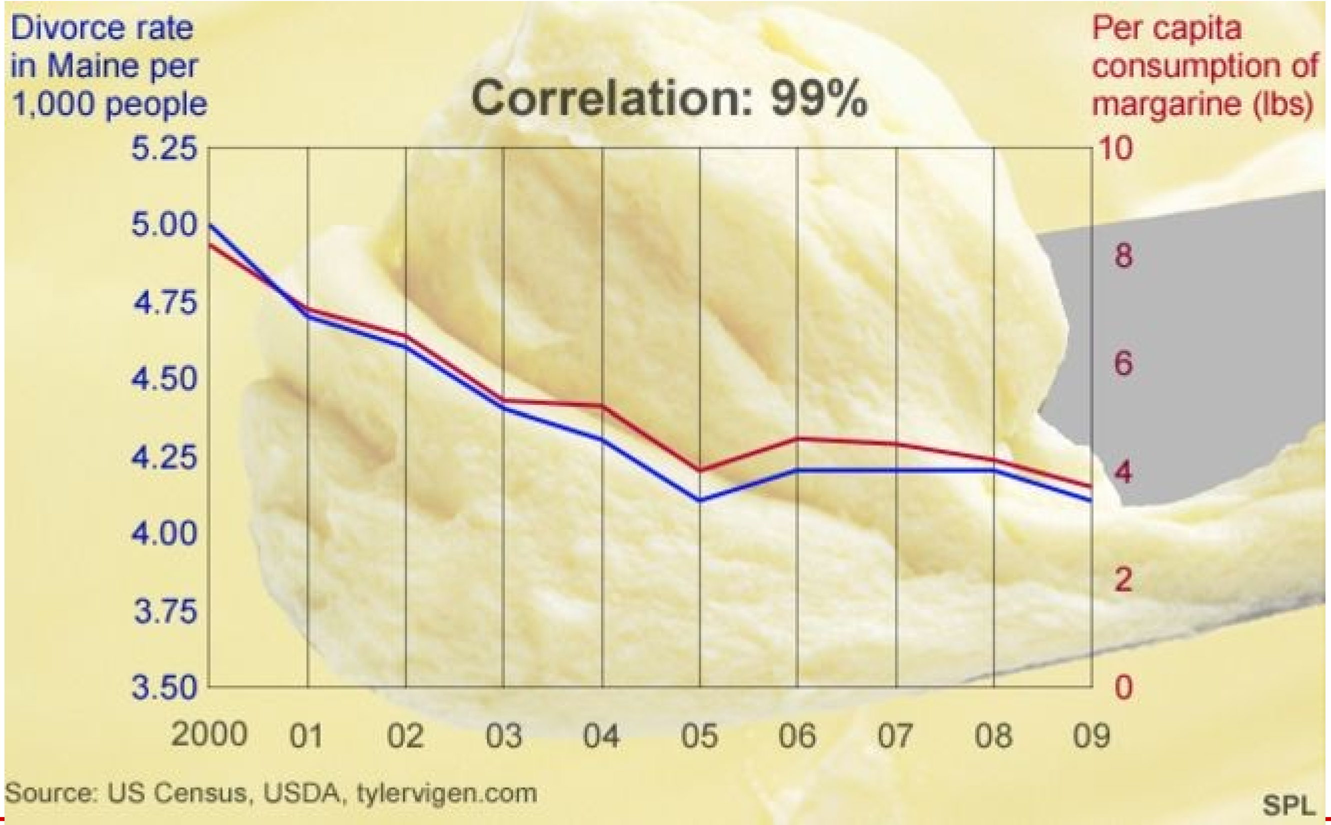
$$\boldsymbol{x}^T=\left(x_{1,}\,x_{2,}\dots,x_N\right) \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

- Wtedy macierz kowariancji możemy zapisać krótko:

$$C=E\left(\left(\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{x}}\right)^T\right)$$

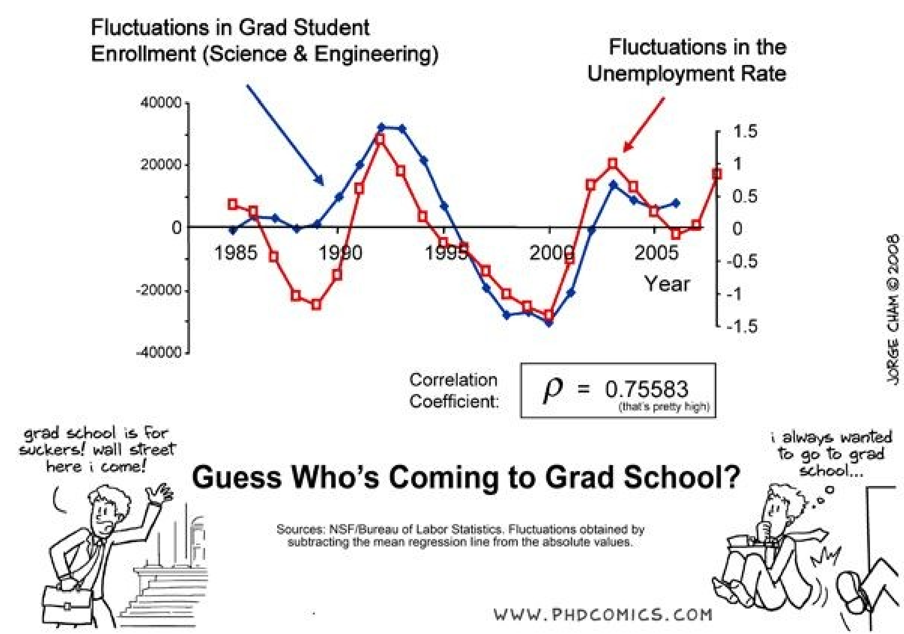
Uwagi do interpretacji wsp. korelacji

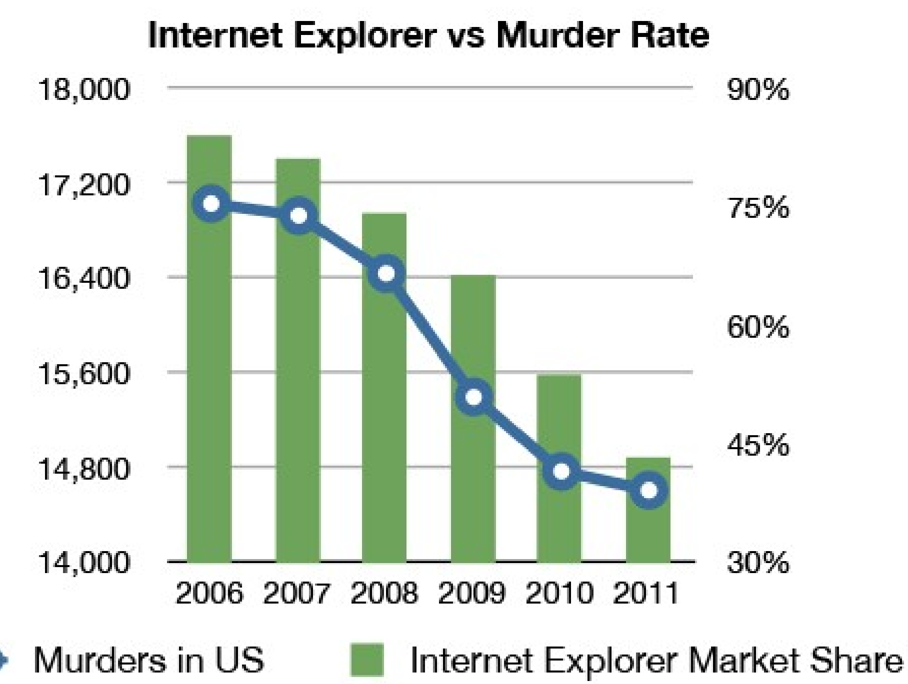
- Zerknijmy na taką zależność:
  - konsumpcja margaryny w czasie i liczba rozwodów w stanie Maine na 1000 osób
  - współczynnik korelacji liniowej wynosi aż 0,99!
  - wynika to z faktu, że obie zmienne są **skorelowane ze wspólną zmienną – czasem** a nie same ze sobą

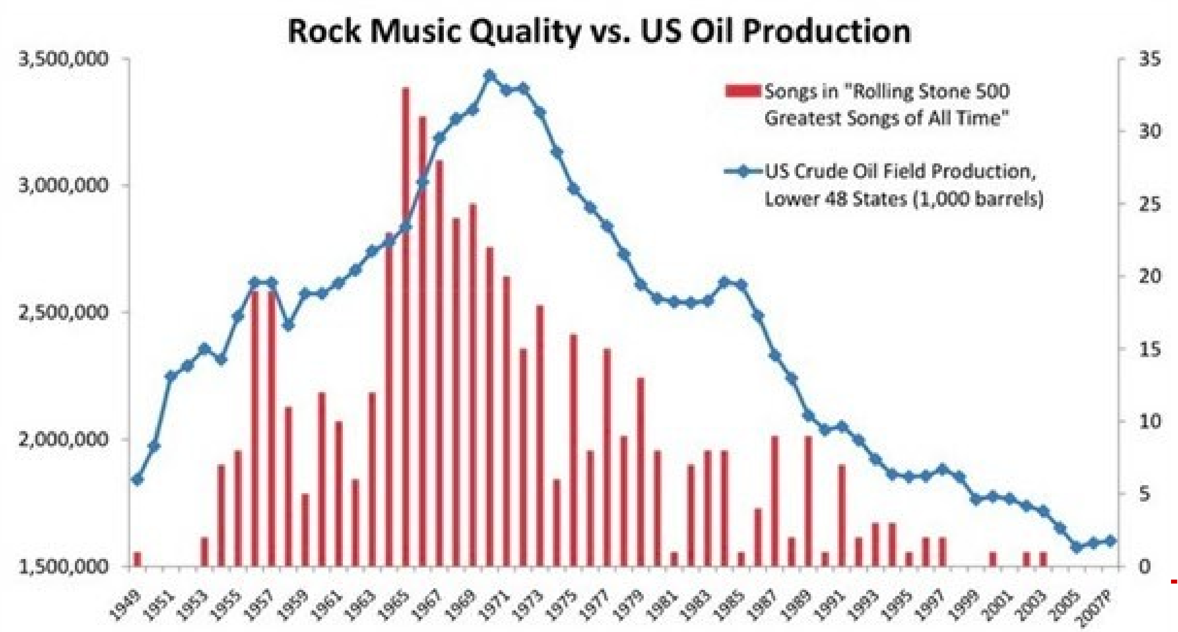


Uwagi do interpretacji wsp. korelacji

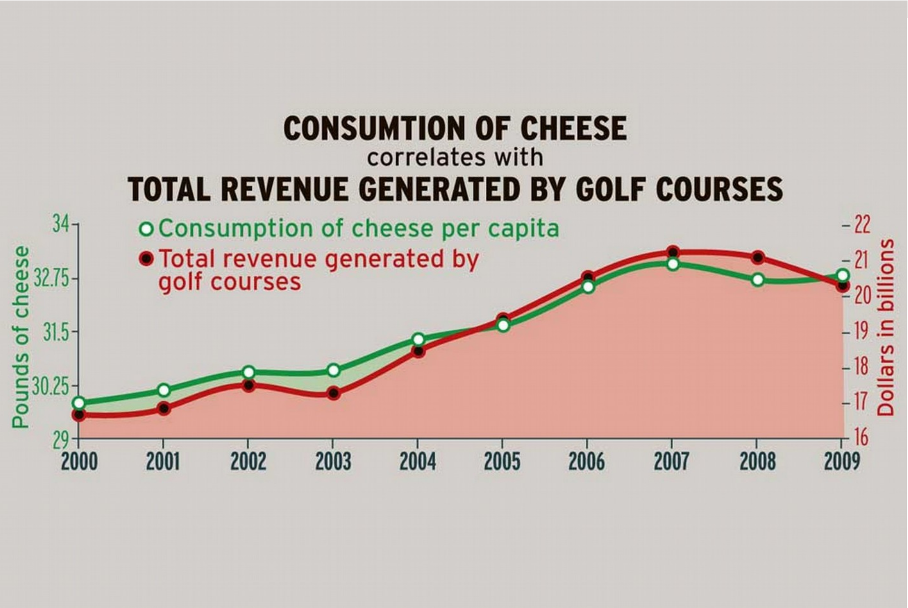
- Podobne przykłady:
- Korelację dwóch wielkości zależnych od czasu można symulować przez **błądzenie losowe** (**random walk**):
  - im dłuższy przedział czasowy tym korelacja się zwiększa
- Wygooglaj “spurious correlations”

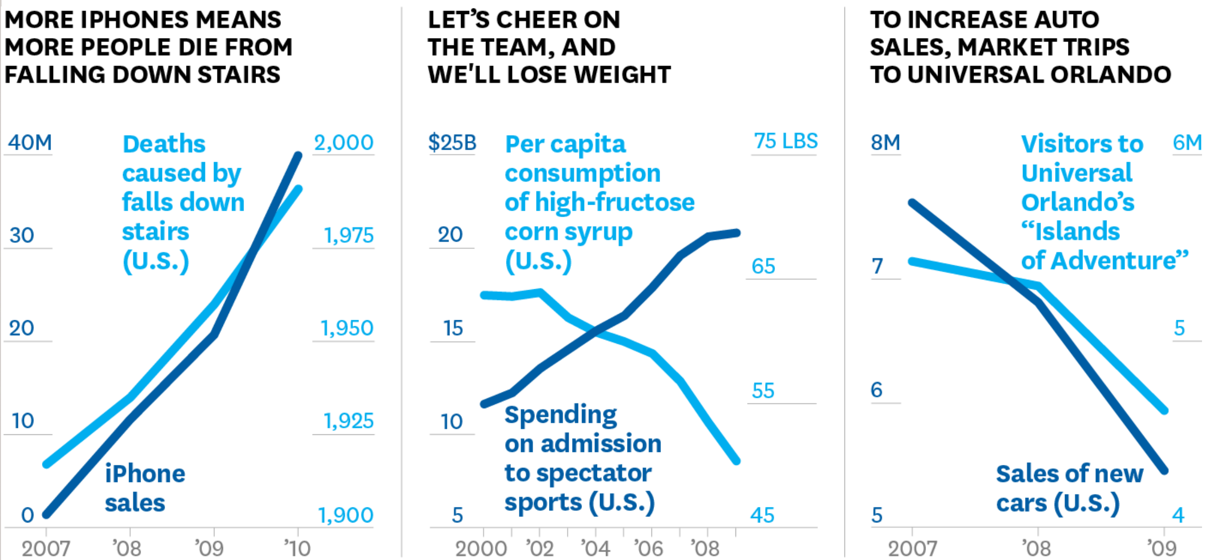






Uwagi do interpretacji wsp. korelacji

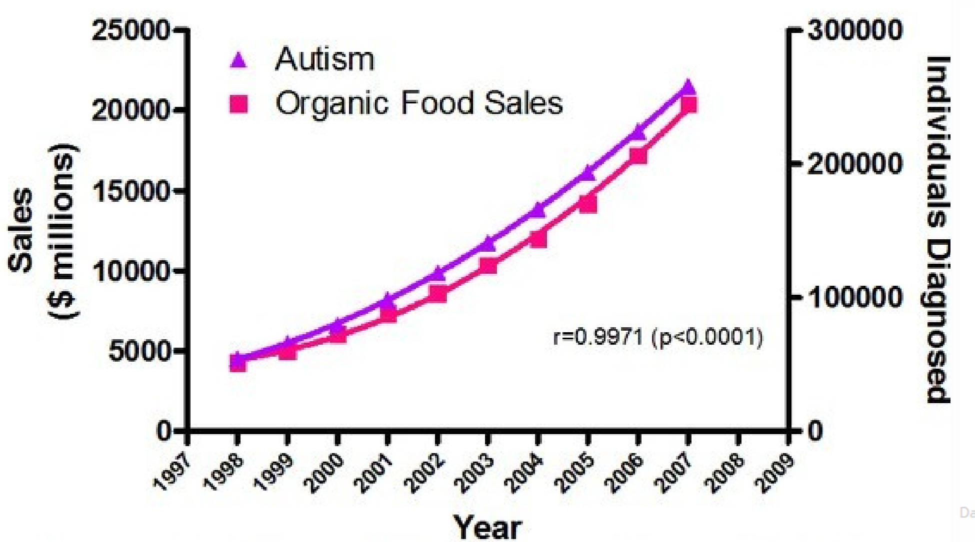




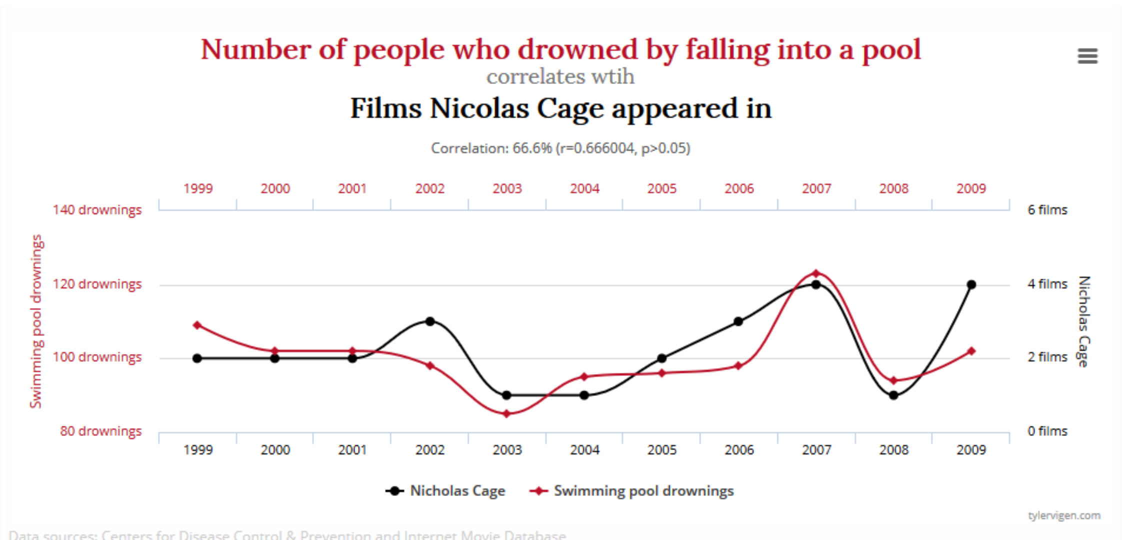
SOURCE TYLERVIGEN.COM
FROM "BEWARE SPURIOUS CORRELATIONS," JUNE 2015

© HBR.ORG

The real cause of increasing autism prevalence?



Sources: Organic Trade Association, 2011 Organic Industry Survey; U.S. Department of Education, Office of Special Education Programs, Data Analysis System (DANS), OMB# 1820-0043: "Children with Disabilities Receiving Special Education Under Part B of the Individuals with Disabilities Education Act



Uwagi do interpretacji wsp. korelacji

http://www.biostat.jhsph.edu/courses/bio621/misc/Chocolate%20consumption%20cognitive%20function%20and%20nobel%20laurates%20%28NEJM%29.pdf

The New England Journal Medicine 2012; 367:1562-1564, Impact Factor (2015): 59.998!!!!! (Nature IF: 38.138)

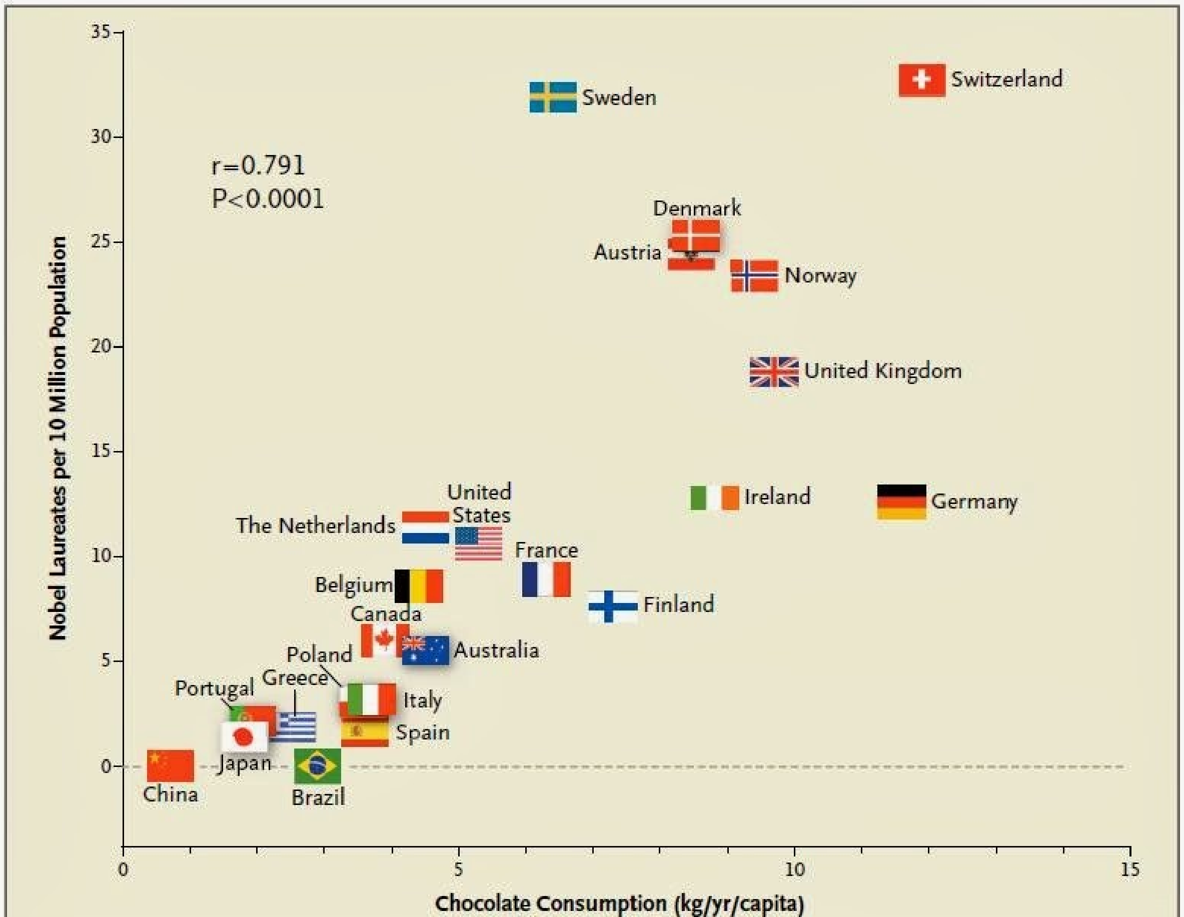


Figure 1. **Correlation between Countries' Annual Per Capita Chocolate Consumption and the Number of Nobel Laureates per 10 Million Population.**

CONCLUSIONS

Chocolate consumption enhances cognitive function, which is a sine qua non for winning the Nobel Prize, and it closely correlates with the number of Nobel laureates in each country. It remains to be determined whether the consumption of chocolate is the underlying mechanism for the observed association with improved cognitive function.

Dr. Messerli reports regular daily chocolate consumption, mostly but not exclusively in the form of Lindt's dark varieties.

Disclosure forms provided by the author are available with the full text of this article at NEJM.org.

From St. Luke's–Roosevelt Hospital and Columbia University, New York.

This article was published on October 10, 2012, at NEJM.org.

- Jaki jest “problem” z tym artykułem?

Uwagi do interpretacji wsp. korelacji

http://news.nationalpost.com/news/correlation-and-causation-the-good-statistical-lesson-behind-study-associating-drinking-milk-and-nobel-prizes

"It's only tongue in cheek," said Franz Messerli, the New York doctor who did the chocolate analysis. "Those among us who are in medicine and do research, they'll immediately realize that this basically is a joke."

NATIONAL POST

FINANCIAL POST • NEWS • COMMENT • PERSONAL FINANCE • INVESTING • TECH • SPORTS • ARTS • LIFE • HEALTH • HO

NEWS CANADA • WORLD • ISRAEL & THE MIDDLE EAST • RELIGION • TORONTO • GRAPHICS • PHOTOS • EDITORS BLOG • NP

NEWS

TRENDING Real estate | Lotto Max | Russia | CPC leadership race | Trump | North Korea

Correlation and causation: The good statistical lesson behind study associating drinking milk and Nobel prizes

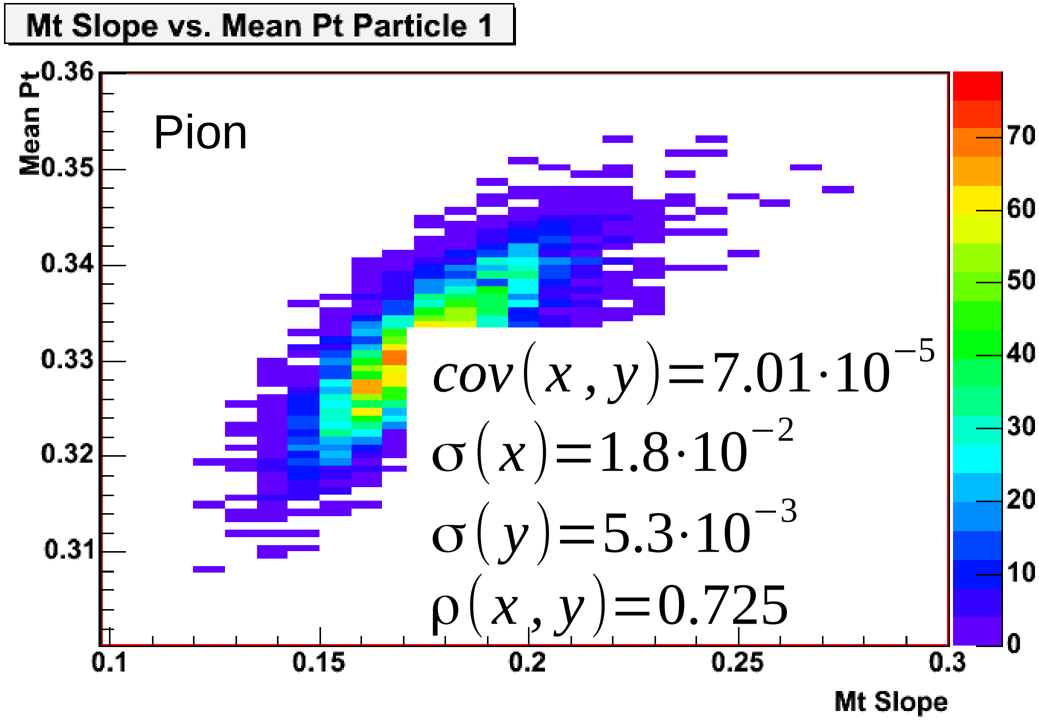
Joseph Brean | January 14, 2013 6:56 PM ET
More from Joseph Brean | @JosephBrean

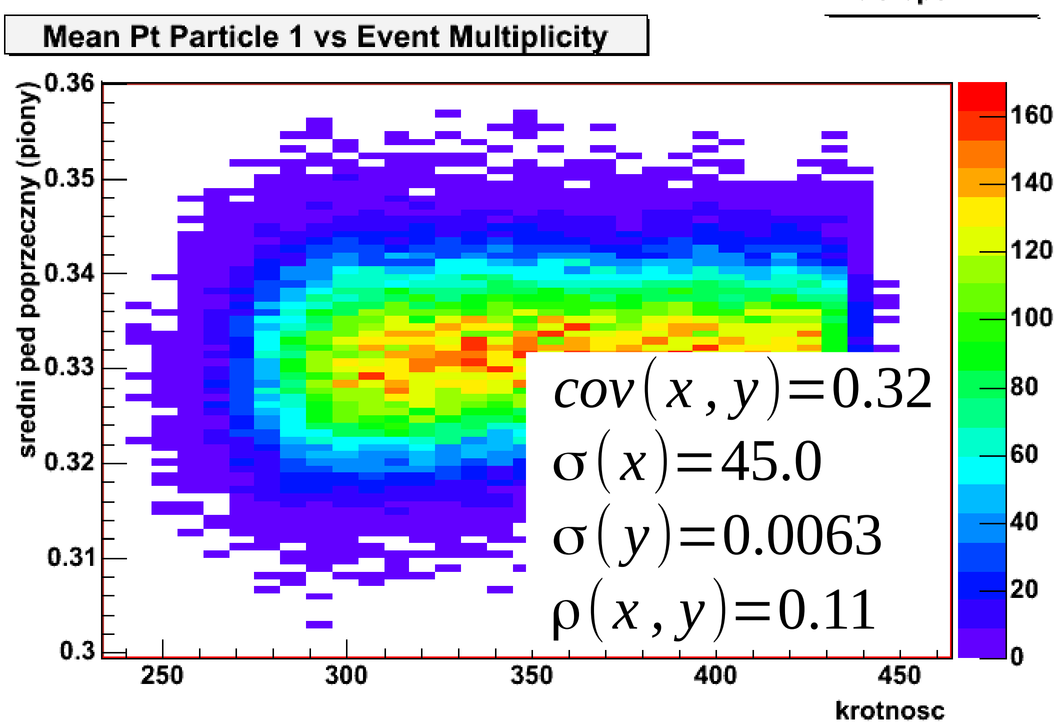
Republish Reprint

He compared it to the observation that after the Second World War in Germany, there were distinct drops in both the human birth rate and the stork population, which led to the tantalizing conclusion that these phenomena were related — that there were fewer babies because there were fewer storks to bring them.

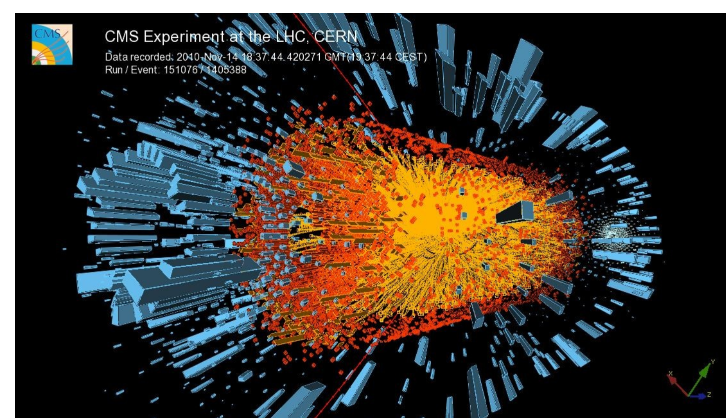
"There was a highly significant correlation," Dr. Messerli said. "But when you think about this, what happened after the Second World War in Germany was a building boom. Logically, storks like open air, they like farms, but they don't like housing projects. And these small apartments are not conducive to have six and seven children … So actually there is a rational reason why storks dwindled and the number of children dwindled at the same time. So here you can find a cause and effect relationship. But I have yet to find one for the chocolate consumption and the Nobel prize winners."

Uwagi do interpretacji wsp. korelacji





- Przykłady rzeczywistych korelacji eksperymentalnych:
  - góra – zależność między średnim pędem cząstki (pionu) a nachyleniem rozkładu pędowego rozkładu pędu
  - dół – praktycznie brak korelacji pomiędzy żrednim pędem cząstki (pionu) a liczbą cząstek produkowanych w zderzeniu



Uwagi do interpretacji wsp. korelacji