



Komputerowa analiza danych doświadczalnych

Wykład 12

12.05.2017

dr inż. Łukasz Graczykowski

lgraczyk@if.pw.edu.pl

Semestr letni 2016/2017



Weryfikacja hipotez statystycznych - ponownie

Test χ^2

Test F -Fishera

Metoda najmniejszych
kwadratów

Weryfikacja hipotez statystycznych

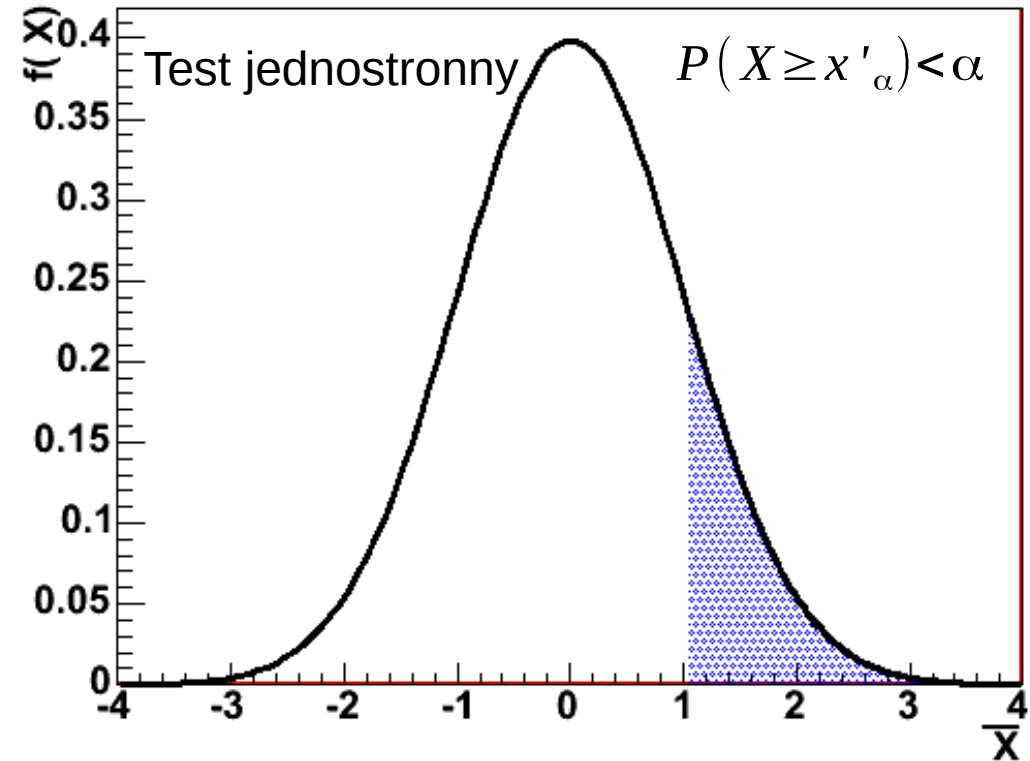
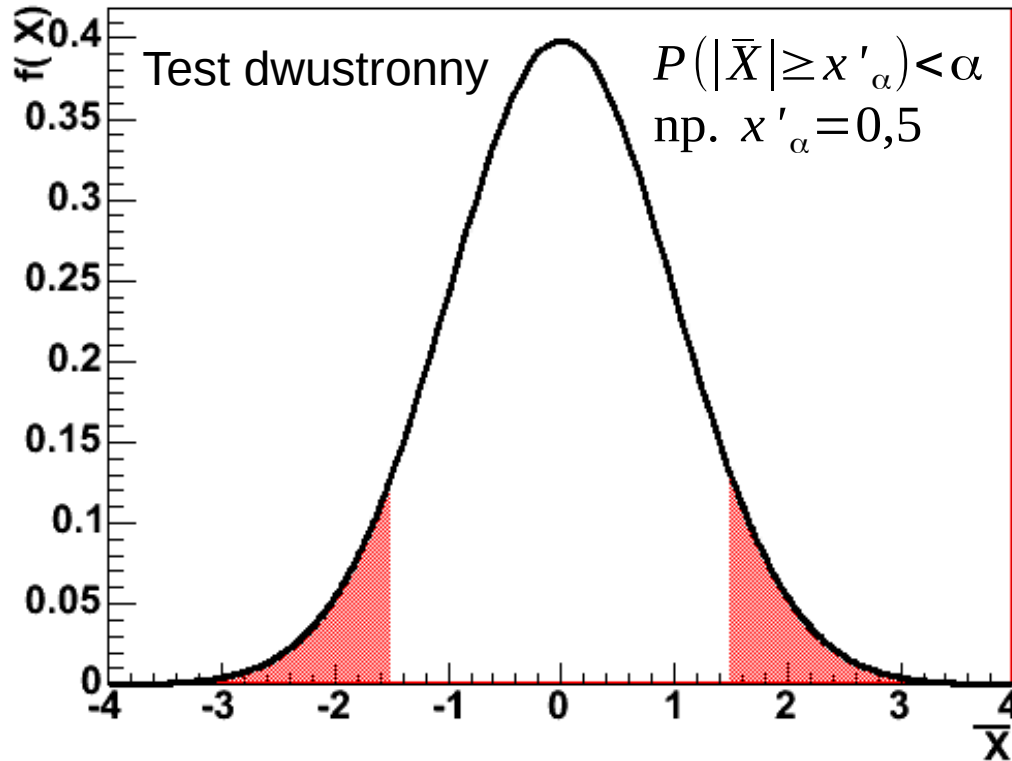
- **Przykład:** rozważamy zmienną losową X opisaną standardowym rozkładem Gaussa (średnia 0, odchylenie 1). Pobieramy 10-elementową próbę, uzyskaliśmy średnią arytmetyczną: $\bar{X}=0,5$
- Jak na podstawie tej jednej realizacji próby (np. wyniku eksperymentu) możemy stwierdzić, czy pochodzi ona z takiej populacji?
- Jeżeli **hipoteza jest słuszna (nasze założenie)** to wartość średnia (będąca również zmienną losową) \bar{X} pochodzi z populacji opisanej rozkładem normalnym ze średnią 0 i odchyleniem std. $1/\sqrt{10}$
$$\sigma^2(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sigma^2(X) = \frac{1}{10} \cdot 1 \Rightarrow \sqrt{\sigma^2(\bar{X})} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$
- Procedura weryfikacji hipotezy nazywana jest **testem statystycznym**

Weryfikacja hipotez statystycznych

- Jak na podstawie **konkretnej realizacji próby** sprawdzić, czy założona hipoteza jest prawdziwa?
 - **I:** musimy ustalić pewną wartość prawdopodobieństwa α (zwanego **poziomem istotności**, z reguły mała wartość, np. 0,01, albo 0,03, czy 0,05)
 - **II:** pytamy, czy prawdopodobieństwo zaobserwowania określonych wartości próby jest mniejsze niż α : $P(|\bar{X}| \geq 0,5) < \alpha$
 - **nierówność spełniona** – jest mało prawdopodobne, aby próba pochodziła z rozkładu określonego przez testowaną hipotezę → **możemy ją odrzucić**
 - **prawdopodobieństwo zaobserwowania tego, że $|\bar{X}|$ jest duże, jest bardzo małe, ale takie nam się trafiło – więc prawdopodobnie (z prawdopodobieństwem $1-\alpha$) nasza hipoteza nie jest słuszna**
 - **III:** jeśli prawdopodobieństwo jest mniejsze niż przyjęta wartość prawdopodobieństwa (poziom istotności) α , odrzucamy hipotezę na zadanym poziomie istotności

Weryfikacja hipotez statystycznych

Rozkład wartości średniej \bar{X}



- Jeśli (w naszym przykładzie) wartość średnia znajduje się w zaznaczonym obszarze (nazywamy go **obszarem krytycznym**), to hipotezę odrzucamy
 - jeśli oczekujemy rozkładu normalnego o średniej 0 i małym odchyleniu, a z próby losowej mamy np. średnią 1000, to lądujemy w “**ogonie**” rozkładu średniej i na podstawie tej konkretnej próby **odrzucaamy** hipotezę (**ale na podstawie innej próby moglibyśmy zaakceptować**)

Weryfikacja hipotez statystycznych

- W ogólnym przypadku używamy innych wielkości niż średnia:
 - definiujemy jakąś (wygodną dla nas) statystykę testową T (np. różnicę między wynikiem eksperymentu a krzywą teoretyczną)
 - ustalamy poziom istotności α
 - wyznaczamy taki zbiór U , który określa obszar zmienności statystyki testowej T , taki że prawdopodobieństwo znalezienia się w nim jest ograniczone wartością α : $P(T \in U) = \alpha$
 - z pobranej próby wyznaczamy konkretną wartość statystyki testowej T' : jeżeli znajduje się ona **wewnątrz** obszaru krytycznego U , **odrzucaamy hipotezę** (mówimy: krzywa teoretyczna nie opisuje wyniku eksperymentu), czyli odrzucaamy hipotezę, jeżeli $T' \in U$



Test dobroci χ^2 dopasowania

Test χ^2 dobroci dopasowania

- Mamy N pomiarów g_i , $i=1, 2, \dots, N$ oraz ich niepewności σ_i
- Wartości f_i , $i=1,2,\dots,N$ określają nam prawdziwy rozkład danej wielkości mierzonej (**np. znaleziony poprzez estymację**)
- **Dla każdego pomiaru liczymy wielkość u_i :** $u_i = \frac{g_i - f_i}{\sigma_i}$, $i=1,2,\dots,N$
- Jeśli nasza teoria (wartości f_i) jest prawdziwa, to rozkłady różnic u_i mają postać standardowego rozkładu normalnego – **nasza hipoteza**
- Jeśli tak, to rozkład χ^2 o N stopniach swobody będzie miała wielkość:
$$T = \sum_{i=1}^N u_i^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{g_i - f_i}{\sigma_i} \right)^2$$
- **(Subiektywnie)** oczekujemy małej wartości wielkości T
- Gdy hipoteza jest **fałszywa**, wówczas poszczególne różnice u_i przyjmują duże wartości (wartość T jest duża)
- Jak określić granicę zmienności T ? Można zauważyć, że granica ta jest określona **kwantylem** $\chi_{1-\alpha}^2$, czyli: $P(T > \chi_{1-\alpha}^2) = \alpha$

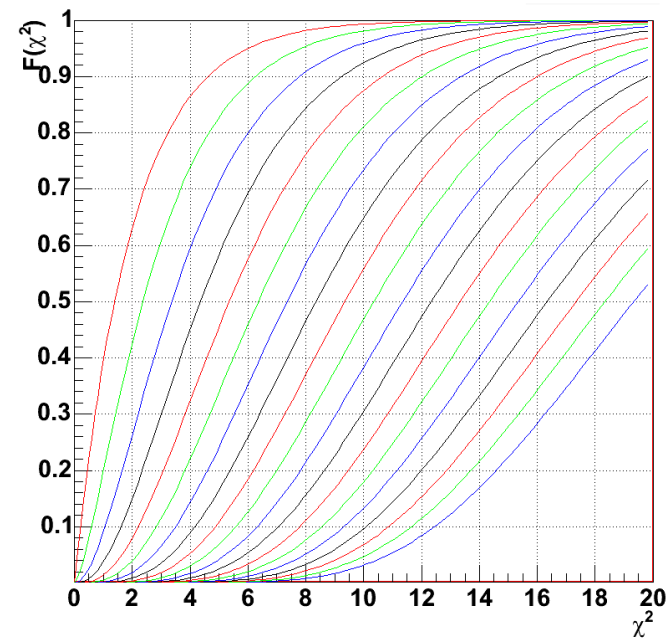
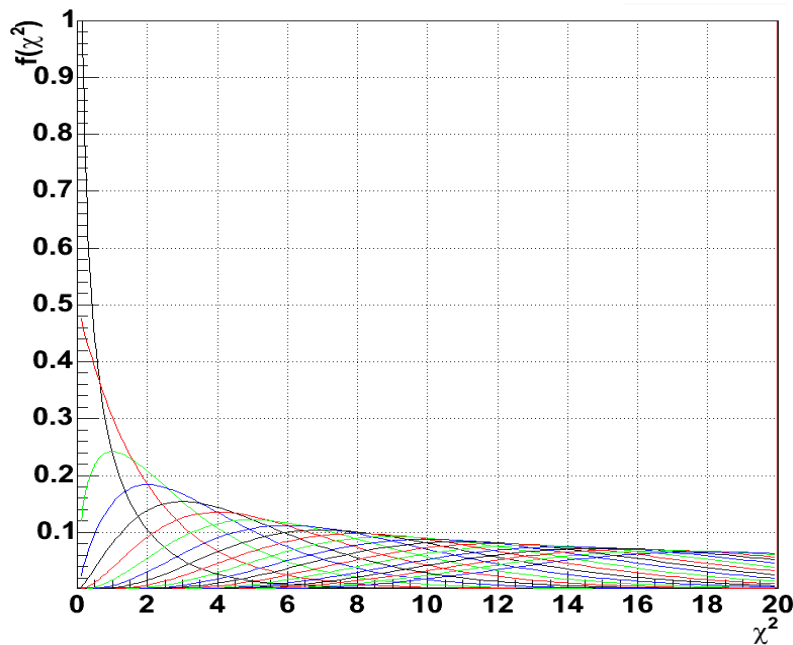
$$F(x_q) = P(X \leq x_q) = q$$
$$P(X > x_q) = 1 - q$$

Test χ^2 dobroci dopasowania

- Podsumowując, w naszym przypadku musimy dla danej realizacji próby (wyniku eksperymentu) wyznaczyć wartość testową T i porównać ją z odpowiednim kwantylem rozkładu χ^2 o odpowiedniej liczbie stopni swobody:

$$T > \chi_{1-\alpha}^2$$

- **Jeżeli ten warunek jest spełniony, to hipotezę odrzucamy** (punkty teoretyczne nie opisują danych eksperymentalnych na zadanym poziomie istotności)
- Skąd wziąć kwantyl? Z tablic lub z dystrybuanty:



Test χ^2 i doświadczalny rozkład częstości

- Możemy również rozważać zmienną losową X , (opisaną rozkładem $f(x)$) którą dzielimy na r przedziałów (histogram): $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_r$

- Całkując $f(x)$ w przedziałach otrzymujemy prawdopodobieństwo p_i zaobserwowania zmiennej X w danym przedziale (binie):

$$p_i = P(x \in \xi_i) = \int_{\xi_i} f(x) dx; \quad \sum_{i=1}^r p_i = 1$$

- Z pobranej próby o liczebności n oznaczamy przez n_i elementy leżące w danym przedziale ξ_i

- Oczywiście zachodzi relacja: $n = \sum_{i=1}^r n_i$
suma wejść w poszczególnych binach równa jest liczebności próby

- **Oczekiwalibyśmy** (zakładając prawdziwość $f(x)$), **że:** $n_i = np_i$

- **Hipoteza:** zakładamy, że dla dużych wartości liczb n_i ich wariancja równa się n_i (patrz dyskusja o rozkładzie Poissona) i że rozkład

wielkości u_i : $u_i^2 = \frac{(n_i - np_i)^2}{n_i}$, lub $u_i^2 = \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ ma rozkład Gaussa

Test χ^2 i doświadczalny rozkład częstości

- Wtedy, suma kwadratów: $T = \sum_{i=1}^r u_i^2$
- Będzie miała (dla dużych n) rozkład χ^2
- **Jaka jest liczba stopni swobody?** Z definicji histogramu mamy jedno **równanie więzów**: $n = \sum_{i=1}^r n_i$
- Zatem zmienne u_i **nie są niezależne**, więc liczba stopni swobody równa się $r-1$
- Oczywiście, jeżeli dodatkowo estymujemy p parametrów rozkładu na podstawie pomiarów (wprowadzamy p kolejnych więzów uzależniających od siebie wielkości u_i), to liczba stopni swobody wynosi $r-1-p$
- Wartość T porównujemy, tak jak do tej pory, z kwantylami rozkładu χ^2 o określonej liczbie stopni swobody dla danego poziomu istotności α : $T > \chi_{1-\alpha}^2$
- **Jeśli nierówność jest spełniona – odrzucamy hipotezę**

Test χ^2 - przykład

Zadanie

Weryfikacja hipotez statystycznych (5 pkt.)

- ▶ Przeprowadzono eksperyment naświetlania wodorowej komory pęcherzykowej wiązką fotonów w celu badania oddziaływań fotonów z protonami. Fotony powodują powstawanie par elektron-pozyton, które mogą być wykorzystane do monitorowania wiązki fotonów. Częstość występowania zdjęć z 0,1,2,... parami elektron-pozyton powinna podlegać rozkładowi Poissona. Należy wczytać dane z pliku [plik](#) (w pierwszej kolumnie znajduje się liczba par elektronowych na zdjęciu k, a w drugiej liczba zdjęć zawierających k par elektronowych). Widzimy, że rozkład ten przypomina rozkład Poissona - próbujemy zatem obliczyć estymator największej wiarygodności dla parametry rozkładu Poissona (patrz [Wykład 10](#) slajd 13) (1 pkt.)
- ▶ Narysować na jednym wykresie punkty pomiarowe i dopasowanie (metodą estymatora największej wiarygodności).
- ▶ Sprawdzić jakość dopasowania za pomocą testu χ^2 . W tym celu należy zaimplementować funkcję obliczającą statystykę testową

$$\chi^2 \text{ zgodnie z wzorem } T = \sum_k \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$$

gdzie: n_k - liczba obserwacji w k-tym binie, np_k - przewidywana przez teorię liczba przypadków w k-tym binie

- ▶ Określić liczbę stopni swobody i obliczyć wartość statystyki testowej. (1 pkt.)
- ▶ Zaimplementować funkcję zwracającą wynik testu χ^2 na zadanym poziomie istotności α

Wykorzystując zaimplementowaną funkcję zweryfikować hipotezę mówiącą, że dane pomiarowe podlegają rozkładowi Poissona. Dobrać odpowiednią wartość poziomu istotności. Uwaga! Kwanyl możemy odczytać z policzonej na ostatnich zajęciach dystrybuanty. (2 pkt.)

Test χ^2 - przykład

Zadanie

Weryfikacja hipotez statystycznych (5 pkt.)

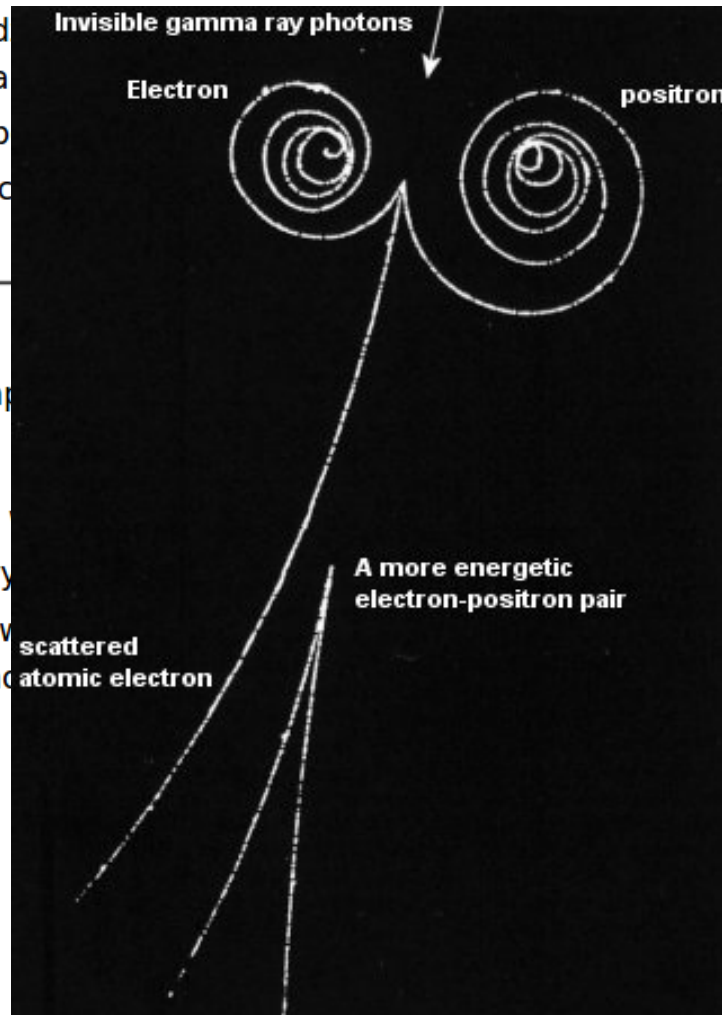
- ▶ Przeprowadzono eksperyment naświetlania wodorowej komory pęcherzykowej wiązką fotonów w celu badania oddziaływań fotonów z protonami. Fotony powodują powstawanie par elektron-pozyton, które mogą być wykorzystane do monitorowania wiązki fotonów. Częstość występowania zdjęć z 0,1,2,... parami elektron-pozyton powinna podlegać rozkładowi Poissona. Należy wczytać dane z pliku [plik](#) (w pierwszej kolumnie znajduje się liczba par elektronowych na zdjęciu k, a w drugiej liczba zdjęć zawierających k par elektronowych). Widujemy, że dane nie pasują do rozkładu Poissona - próbujemy zatem obliczyć estymator największej wiarygodności dla rozkładu Poissona (zobacz [plik](#) slajd 13) (1 pkt.)
- ▶ Narysować na jednym wykresie punkty pomiarowe i krzywą teoretyczną (zobacz [plik](#) slajd 13) (1 pkt.)
- ▶ Sprawdzić jakość dopasowania za pomocą testu χ^2 (zobacz [plik](#) slajd 13) (1 pkt.)

χ^2 zgodnie z wzorem
$$T = \sum_k \frac{(n_k - \mu)^2}{\mu}$$

gdzie: n_k - liczba obserwacji w k-tym binie, μ - wartość oczekiwana

- ▶ Określić liczbę stopni swobody i obliczyć wartość testu χ^2
- ▶ Zaimplementować funkcję zwracającą wartość testu χ^2

Wykorzystując zaimplementowaną funkcję zwracającą wartość testu χ^2 , obliczyć wartość testu χ^2 . Dobrać odpowiednią wartość poziomu istotności α (zobacz [plik](#) slajd 13) (2 pkt.)



gdzie: n_k - liczba obserwacji w k-tym binie, μ - wartość oczekiwana

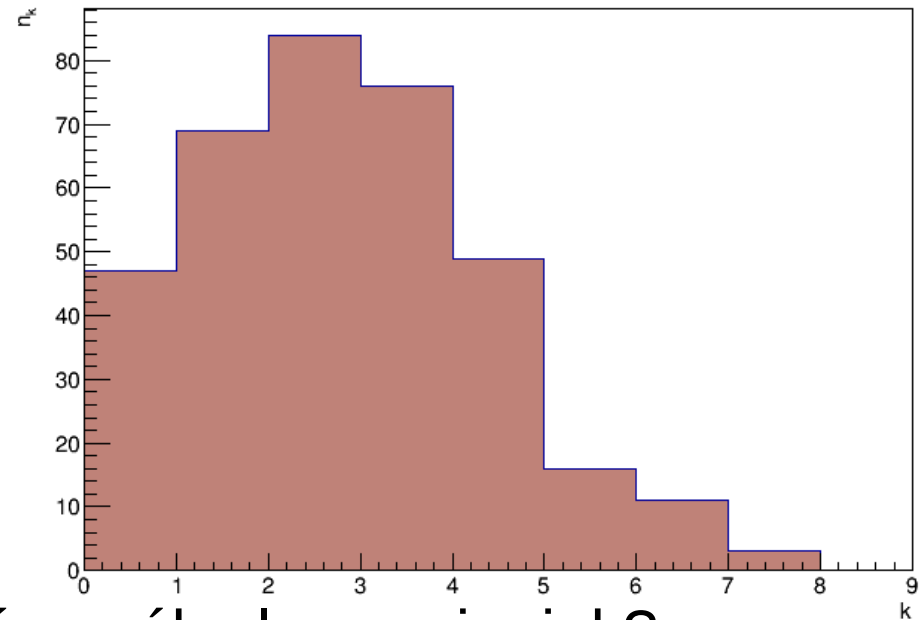
gdzie: n_k - liczba obserwacji w k-tym binie, μ - wartość oczekiwana

gdzie: n_k - liczba obserwacji w k-tym binie, μ - wartość oczekiwana

Test χ^2 - przykład

- Po wczytaniu danych z pliku histogram eksperymentalny wygląda następująco (nasza próba losowa):

Wynik eksperymentu



- Zakładamy hipotezę:** teoria mówi to jest rozkład Poissona (“na oko” zresztą tak wygląda)
- Rozkład Poissona ma tylko jeden parametr (wartość średnią):

$$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- Musimy go zatem jakoś wyznaczyć z próby losowej – jak?
Na przykład metodą największej wiarygodności – szukamy estymatora nieobciążonego największej wiarygodności o minimalnej wariancji – wyprowadziliśmy go sobie na Wykładzie 10:

$$\frac{dl}{d\lambda} = l' = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{k^{(j)}}{\lambda} - 1 \right\} =$$

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^N \{k^{(j)} - \lambda\} = \frac{N}{\lambda} (\bar{K} - \lambda)$$

$$\tilde{\lambda} = \bar{K}, \quad \sigma^2(\bar{K}) = \frac{N}{\lambda}$$

Przypomnienie – definicja estymatora o min. wariancji:

$$l' = A(\lambda)(\tilde{\lambda} - \lambda)$$

$$\sigma^2(S) = \frac{1}{|A(\lambda)|}$$

Test χ^2 - przykład

- Czyli estymatorem największej wiarygodności o minimalnej wariancji dla rozkładu Poissona jest średnia arytmetyczna z próby
- Oczywiście w naszym przypadku mamy histogram, który zawiera jakąś całkowitą liczbę wejść (całka z histogramu nie jest równa 1), wobec tego do średniej dodajemy wagi w postaci liczby wejść w danym binie i średnia staje się średnią ważoną:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sum_k k \cdot n_k}{\sum_k n_k}$$

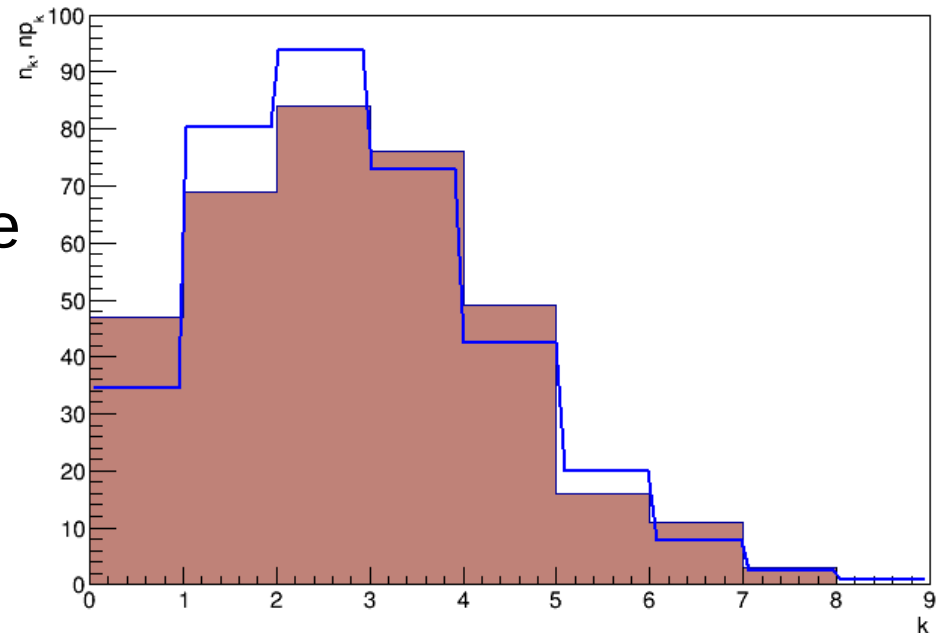
- W naszym przypadku wartość ta wynosi mniej więcej: $\tilde{\lambda} \approx 2,33$

Wynik eksperymentu

- Rysujemy więc funkcję:

$$n \cdot p_k = n \cdot f(k) = n \cdot \frac{\tilde{\lambda}^k}{k!} e^{-\tilde{\lambda}}, \text{ gdzie } n = \sum_k n_k$$

- Jak teraz sprawdzić, czy faktycznie nasza hipoteza jest słuszna?
- **Testujemy dobroć dopasowania**



Test χ^2 - przykład

- Musimy zatem wyznaczyć wartość statystyki testowej T :

$$T = \sum_{k=0}^7 u_i^2 = \sum_{k=0}^7 \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} \approx 10,53$$

- Co dalej? Zakładamy poziom istotności, na przykład: $\alpha = 0,01$
- Musimy jeszcze określić liczbę stopni swobody – ile ich jest?
 - liczba binów (8) minus 1 minus liczba parametrów (1)

$$r - 1 - p = 8 - 1 - 1 = 6$$

- Teraz szukamy odpowiedniego kwantyla rozkładu χ^2 o 6 stopniach swobody: $\chi_{1-\alpha}^2 = \chi_{0,99}^2 \approx 16,81$
- Porównujemy statystykę z kwantylem: $T = 10,51 < \chi_{0,99}^2 = 16,81$
- **Warunek $T > \chi_{1-\alpha}^2$ nie jest spełniony, zatem na poziomie istotności $\alpha = 0,01$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy**



Inny przykład - test równości wariancji (test F -Fischera)

Test równości wariancji (F -Fishera)

- Możemy definiować różne statystyki testowe
- W teście F -Fishera sprawdzamy, czy wariancje dwóch rozkładów o jednakowej średniej są takie same
- Zdefiniujemy statystykę (na podstawie dwóch prób losowych o wariancjach s_1^2 i s_2^2):
$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$
- Oczywiście dążymy do tego, by wielkość ta była bliska 1
- Można udowodnić, że tego typu wielkość ma rozkład F -Fischera (patrz Wykład 11)
- Szukamy zatem analogicznie wartości granicznej określającej obszar krytyczny, która jest odpowiednim kwantylem rozkładu F -Fischera:

$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-\alpha}\right) = \alpha$$

- Ostatecznie sprawdzamy zatem warunek: $\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-\alpha}$
- **To jest test jednostronny**, na ogół posługujemy jednak **testem dwustronnym**:

$$\frac{s_g^2}{s_k^2} > F_{1-\alpha/2}(f_g, f_k), \text{ gdzie } f \text{ to liczby stopni swobody}$$



Metoda najmniejszych kwadratów (least squares method)

Metoda najmniejszych kwadratów

- Jedną z najważniejszych metod estymacji parametrów jest zaproponowana przez Legendre'a i Gaussa
- Metoda ta jest szczególnym przypadkiem ogólniejszej metody największej wiarygodności (można ją z niej wyprowadzić)
- Założenia:
 - wynik pomiaru y_j przedstawiamy jako sumę nieznannej wielkości x oraz niepewności pomiarowej ϵ_j : $y_j = x + \epsilon_j$
 - dobieramy wielkości ϵ_j tak, aby ich suma kwadratów była **najmniejsza**: $\sum_j \epsilon_j^2 = \sum_j (x - y_j)^2 = \min$
- Metoda ta może być również użyta, gdy wielkości y_j nie są wprost związane z x , lecz są to na przykład kombinacje liniowe (lub nieliniowe) wielu zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n
- **Warto przejrzeć rozdział o MNK w podręczniku Brandta, gdzie jest to wszystko bardzo dokładnie omówione**

Pomiary bezpośrednie

- Przedstawione wyżej założenia to najprostszy przypadek **pomiaru bezpośredniego o równej dokładności**
- Wykonujemy n pomiarów nieznannej wielkości x (np. długość stołu). Wyniki pomiarów obarczone są niepewnościami ϵ_j o których zakładamy, że opisane są rozkładem normalnym z wartością średnią równą zero:

$$y_j = x + \epsilon_j \quad E(\epsilon_j) = 0 \quad E(\epsilon_j^2) = \sigma^2$$

- Zatem prawdopodobieństwo uzyskania wartości y_j jako wyniku pojedynczego pomiaru (wewnątrz małego przedziału dy) wynosi:

$$f_j dy = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_j - x)^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

- Logarytmiczna funkcja wiarygodności (dla n pomiarów):

$$l' = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_j - x)^2 + \text{const}$$

- Oczywiście, szukamy maksimum funkcji (warunek wiarygodności):

$$l = \max$$

Pomiary bezpośrednie

- Możemy zauważyć, że warunek ten jest równoważny warunkowi **(najmniejszych kwadratów)**:

$$M = \sum_{j=1}^n (y_j - x)^2 = \sum_{j=1}^n \epsilon_j^2 = \min$$

- W tym przypadku estymatory:

$$\tilde{x} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \quad \sigma^2(\bar{y}) = \sigma^2/n$$

- W ogólniejszym przypadku, gdy mamy **różne dokładności** wyników pomiaru σ_j :

$$y_j = x + \epsilon_j \quad E(\epsilon_j) = 0 \quad E(\epsilon_j^2) = \sigma_j^2 = 1/g_j$$

- Wówczas warunek najmniejszych kwadratów wymaga dodatkowej wagi:**

$$M = \sum_{j=1}^n \frac{(y_j - x)^2}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^n g_j (y_j - x)^2 = \sum_{j=1}^n g_j \epsilon_j^2 = \min$$

- Wtedy estymatory:

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{j=1}^n g_j y_j}{\sum_{j=1}^n g_j} \quad \sigma^2(\tilde{x}) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j^2} \right)^{-1} = \left(\sum_{j=1}^n g_j \right)^{-1}$$

$$\tilde{\epsilon}_j = y_j - \tilde{x}$$

Pomiary bezpośrednie

- Spodziewamy się, że wielkość $\tilde{\epsilon}_j = Y_j - \tilde{x}$ ma rozkład normalny z wartością średnią 0 i wariancją σ_j :
- Oczywiście wtedy wielkość $\tilde{\epsilon}_j / \sigma_j$ ma standardowy rozkład Gaussa
- Co to oznacza już dobrze wiemy, suma:

$$M = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\tilde{\epsilon}_j}{\sigma_j} \right)^2 = \sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \tilde{x}}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^n g_j (Y_j - \tilde{x})^2$$

- Ma znany już nam rozkład χ^2 o $n-1$ stopniach swobody

- **Przykład:** średnia ważona z pomiarów o różnej dokładności

- obliczamy wartość stałej fizycznej (np. masy neutralnej cząstki K) poprzez średnią ważoną otrzymaną w różnych grupach eksperymentalnych

$M = 7,2$, liczba st. swob. $n = 4 - 1 = 3$, $\alpha = 0.05$, $\chi_{0,95}^2 = 7,82$

$$\tilde{x} = \sum_{j=1}^4 \frac{Y_j g_j}{g_j} = 497,9$$

$$u(\tilde{x}) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{x})} = \left(\sum_{j=1}^4 g_j \right)^{-1/2} = 0,2$$

j	y_j	σ_j	$g_j = 1/\sigma_j^2$	$y_j g_j$	$y_j - \tilde{x}$	$(y_j - \tilde{x})^2 g_j$
1	498.1	0.4	6.3	3038.0	0.2	0.3
2	497.4	0.33	10	4974.4	-0.46	2.1
3	498.9	0.5	4	1995.6	1.0	4.0
4	497.4	0.5	4	1989.8	-0.46	0.8
Σ			24.3	11997.8		7.2

Średnia ważona z pomiarów o różnej dokł.

nr pomiaru	Y _j	sigma _j	sigma _j ²	g _j	g _j x _j	Y _j – tilde x	e ²	e ² *g _j
1	99	1,7	2,89	0,35	34,26	0,19	0,04	0,01
2	102,3	2,2	4,84	0,21	21,14	3,49	12,19	2,52
3	89,8	1,9	3,61	0,28	24,88	-9,01	81,15	22,48
4	105,4	2,6	6,76	0,15	15,59	6,59	43,45	6,43
5	101,2	3,5	12,25	0,08	8,26	2,39	5,72	0,47
6	107,4	2,5	6,25	0,16	17,18	8,59	73,81	11,81
7	95,6	3,3	10,89	0,09	8,78	-3,21	10,29	0,95
8	99,4	2,7	7,29	0,14	13,64	0,59	0,35	0,05
9	101,2	2,7	7,29	0,14	13,88	2,39	5,72	0,78
10	97,2	1,3	1,69	0,59	57,51	-1,61	2,59	1,53

ilość pomiarów	10	sum(g _j)	2,18		
		sum(x _j g _j)	215,12	M	47,02
		tilde x	98,81		
		tilde epsilon	0,46		

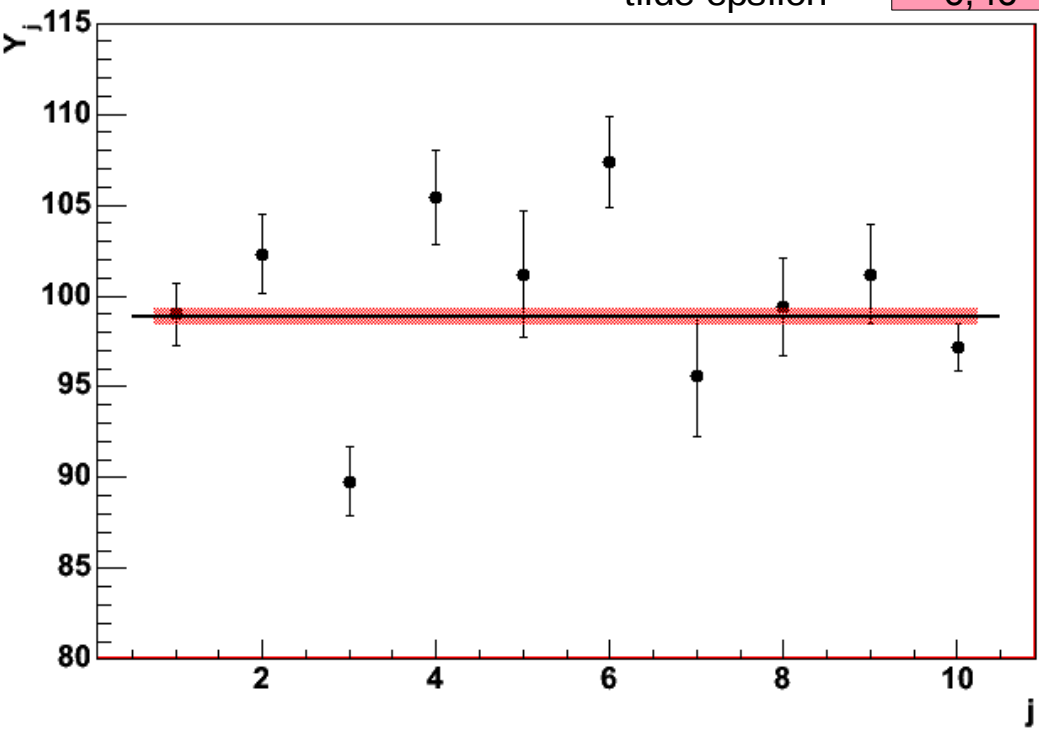
- Przeprowadzając test χ^2 na M widzimy, że hipotezę należy odrzucić:

Kwantyle:

$$\chi^2_{0,9}(9) = 14,7$$

$$\chi^2_{0,95}(9) = 16,9$$

$$\chi^2_{0,99}(9) = 21,7$$



Przykład - odrzucenie pomiarów

nr pomiaru	Y_j	σ_j	σ_j^2	g_j	$g_j x_j$	$Y_j - \tilde{x}$	e^2	$e^2 g_j$
1	99	1,7	2,89	0,35	34,26	0,19	0,04	0,01
2	102,3	2,2	4,84	0,21	21,14	3,49	12,19	2,52
3								
4	105,4	2,6	6,76	0,15	15,59	6,59	43,45	6,43
5	101,2	3,5	12,25	0,08	8,26	2,39	5,72	0,47
6								
7	95,6	3,3	10,89	0,09	8,78	-3,21	10,29	0,95
8	99,4	2,7	7,29	0,14	13,64	0,59	0,35	0,05
9	101,2	2,7	7,29	0,14	13,88	2,39	5,72	0,78
10	97,2	1,3	1,69	0,59	57,51	-1,61	2,59	1,53

Ilość pomiarów

10

sum(g_j) 1,74

sum($x_j g_j$) 173,06

\tilde{x} 99,45

$\tilde{\epsilon}$ 0,57

M

12,73

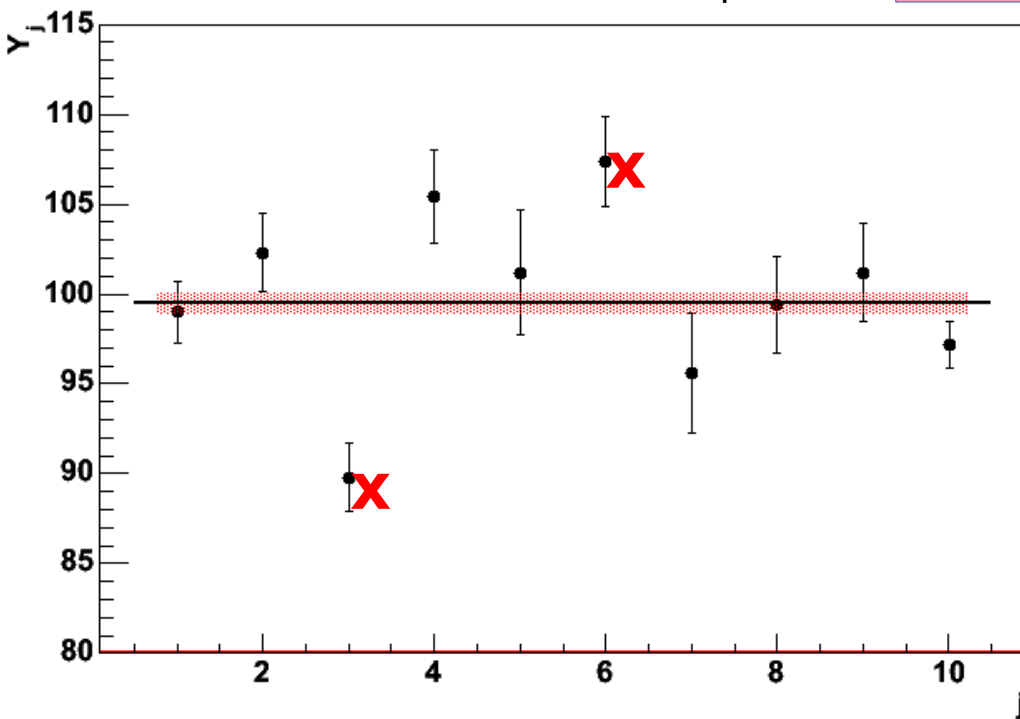
- Odrzucając pomiary najbardziej odbiegające od średniej mamy wynik spełniający test χ^2 :

Kwantyle:

$$\chi_{0,9}^2(7) = 12,02$$

$$\chi_{0,95}^2(7) = 14,07$$

$$\chi_{0,99}^2(7) = 18,47$$



Pomiary pośrednie - przypadek liniowy

- Rozważymy teraz bardziej ogólny przypadek wielu (r) nieznanymi wielkośći x_i ($i=1,2,\dots,r$) **mierzonych pośrednio**
- Interesujące nas wielkośći fizyczne x nie podlegają pomiarom bezpośrednim, mierzymy natomiast liniowe kombinacje wielkośći x_i mierzonych już bezpośrednio wielkośći η_j :

$$\eta_j = p_{j0} + p_{j1}x_1 + p_{j2}x_2 + \dots + p_{jr}x_r \quad j=1,2,\dots,n \quad \begin{array}{l} \text{wielkośći mierzonych} \\ \text{bezpośrednio} \end{array}$$

- Dla uproszczenia rachunków, można to zapisać inaczej:

$$f_j = \eta_j + a_{j0} + a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jr}x_r = 0$$

- W postaci wektorowej:

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \dots \\ a_{jr} \end{pmatrix}$$

$$f_j = \eta_j + a_{j0} + \mathbf{a}_j^T \mathbf{x} = 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

- Jeśli wszystko zdefiniujemy wektorowo:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_{j1} \\ \eta_{j2} \\ \dots \\ \eta_{jr} \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \boldsymbol{\eta} + \mathbf{a}_0 + A \mathbf{x} = 0$$

Pomiary pośrednie - przypadek liniowy

- Oczywiście nadal zakładamy, że każdy pomiar obarczony jest niepewnością o rozkładzie normalnym:

$$y_j = \eta_j + \epsilon_j, \quad E(\epsilon_j) = 0, \quad E(\epsilon_j^2) = \sigma_j^2 = 1/g_j$$

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

- Ponieważ zmienne y_j są zmiennymi niezależnymi, możemy wariancję przedstawić w postaci diagonalnej macierzy kowariancji:

$$C_y = C_\epsilon = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad G_y = G_\epsilon = C_y^{-1} = C_\epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_n \end{pmatrix}$$

- Wstawiając $\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon}$ do wzoru $\mathbf{f} = \boldsymbol{\eta} + \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ otrzymujemy:

$$\mathbf{y} - \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

- Rozwiązujemy ten układ ze względu na \mathbf{x} stosując metodę największej wiarygodności (zakładając rozkład normalny pomiarów y_j). Wtedy:

$$M = \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon_j^2}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^n \frac{(y_j + \mathbf{a}_j^T \mathbf{x} + a_{j0})^2}{\sigma_j^2} = \boldsymbol{\epsilon}^T G_y \boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{y} + \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x})^T G_y (\mathbf{y} + \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x}) = \min$$

Pomiary pośrednie - przypadek liniowy

- Jeśli wprowadzimy: $\mathbf{c} = \mathbf{y} + \mathbf{a}_0$
- Wówczas: $M = (\mathbf{c} + \mathbf{A} \mathbf{x})^T G_y (\mathbf{c} + \mathbf{A} \mathbf{x}) = \min$

- Można to dalej uprościć:

$$G_y = H^T H \quad H = H^T = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma_n \end{pmatrix}$$

- Jeśli teraz wprowadzimy: $\mathbf{c}' = H \mathbf{c} \quad \mathbf{A}' = H \mathbf{A}$
- Wówczas warunek nam się upraszcza: $M = (\mathbf{A}' \mathbf{x} + \mathbf{c}')^2 = \min$
- Po rozwiązaniu dostajemy:

$$\tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}'^{-1} \mathbf{c}'$$

- W praktyce używamy wzoru: $\tilde{\mathbf{x}} = -(\mathbf{A}'^T \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{A}'^T \mathbf{c}' = -(\mathbf{A}^T G_y \mathbf{A}) \mathbf{A}^T G_y \mathbf{c}$
- Żeby wyznaczyć niepewności pomiarowe musimy policzyć macierz kowariancji: $G_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} = (\mathbf{A}'^T \mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^T G_y \mathbf{A})^{-1}$
- Pierwiaski kwadratowe z elementów diagonalnych to niepewności pomiarowe $\tilde{\mathbf{x}}$ (mimo, że \mathbf{x} nie podlegało bezpośredniemu pomiarowi)

Pomiary pośrednie - przypadek liniowy

- Dla pomiarów bezpośrednich η_j :

$$\tilde{\epsilon} = A\tilde{x} + c = -A(A^T G_y A)^{-1} A^T G_y c + c$$

$$\tilde{\eta} = y - \tilde{\epsilon} = y + A(A^T G_y A)^{-1} A^T G_y c - c \quad - \text{ pomiary "poprawione"}$$

$$\tilde{\eta} = A(A^T G_y A)^{-1} A^T G_y c - a_0$$

$$G_{\tilde{\eta}}^{-1} = A(A^T G_y A)^{-1} A^T = A G_{\tilde{x}}^{-1} A^T$$

- Wzór $\eta_j = p_{j0} + p_{j1}x_1 + p_{j2}x_2 + \dots + p_{jr}x_r$ będzie również prawdziwy dla estymatorów

Pomiary pośrednie – przypadek liniowy

- **Przykład:** dopasowanie prostej do zbioru pomiarów
 - mamy pomiary y_j zależne od pewnej zmiennej kontrolnej t_j (np. czasu)
 - zakładamy, że wartości zmiennej kontrolnej są dokładnie znane (zaniedbywane niepewności) – inaczej przypadek nieliniowy
 - zakładamy liniową postać: $\eta_j = y_j - \epsilon_j = x_1 + x_2 t_j$
 - i szukamy wielkości x mierzonych pośrednio
 - posługując się notacją macierzową: $\boldsymbol{\eta} - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \mathbf{t} = 0 \quad \mathbf{a}_0 = 0$
 - czyli szukamy ostatecznie wektor: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
 - wyniki pomiarów:

j	0	1	2	3
t_j	0.0	1.0	2.0	3.0
y_j	1.4	1.5	3.7	4.1
σ_j	0.5	0.2	1.0	0.5

Pomiary pośrednie - przypadek liniowy

- Obliczenia:

$$A = - \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \mathbf{c} = - \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.5 \\ 3.7 \\ 4.1 \end{pmatrix}$$

$$G_y = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A' = - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 5 \\ 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}' = - \begin{pmatrix} 2.8 \\ 7.5 \\ 3.7 \\ 8.2 \end{pmatrix} \quad A'^T \mathbf{c}' = - \begin{pmatrix} 62.2 \\ 94.1 \end{pmatrix}$$

Pomiary pośrednie - przypadek liniowy

- Obliczenia c.d.:

$$(A'^T A')^{-1} = - \begin{pmatrix} 34 & 39 \\ 39 & 65 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{689} \begin{pmatrix} 65 & -39 \\ -39 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0943 & -0.0556 \\ -0.0556 & 0.0493 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = -(A'^T A')^{-1} A^T \mathbf{c}' = -(A^T G_y A) A^T G_y \mathbf{c}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.0943 & -0.0556 \\ -0.0556 & 0.0493 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 63.2 \\ 94.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.636 \\ 1.066 \end{pmatrix}$$

$$C_{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0.0943 & -0.0556 \\ -0.0556 & 0.0493 \end{pmatrix} \quad u(\tilde{x}_1) = 0.307 \quad u(\tilde{x}_2) = 0.222$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = -A \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.636 \\ 1.702 \\ 2.768 \\ 3.834 \end{pmatrix}$$

- Zminimalizowana suma kwadr.:

$$M = \left(\sum_{j=1}^n \frac{y_j - \tilde{\eta}_j}{\sigma_j} \right)^2 = 4.507$$

N= 4 pomiary, 2 parametry, co daje
n-2 = r =2 stopnie swobody.

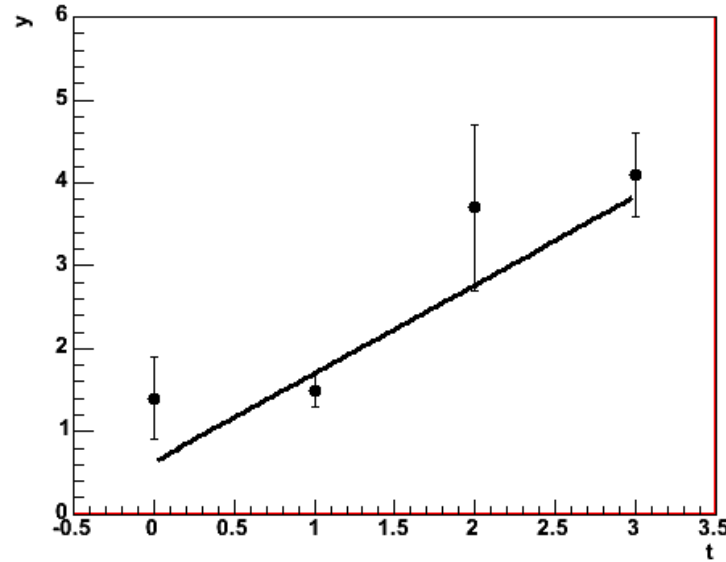
Zakładając poziom istotności 5% z tabel X^2 :
 $X^2_{0.95} = 5.99$.

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

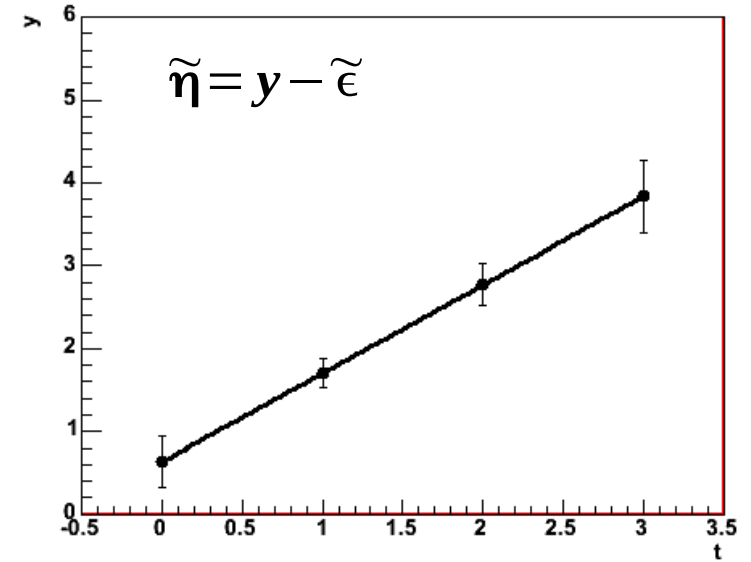
Pomiary pośrednie - przypadek liniowy

- Wykresy:

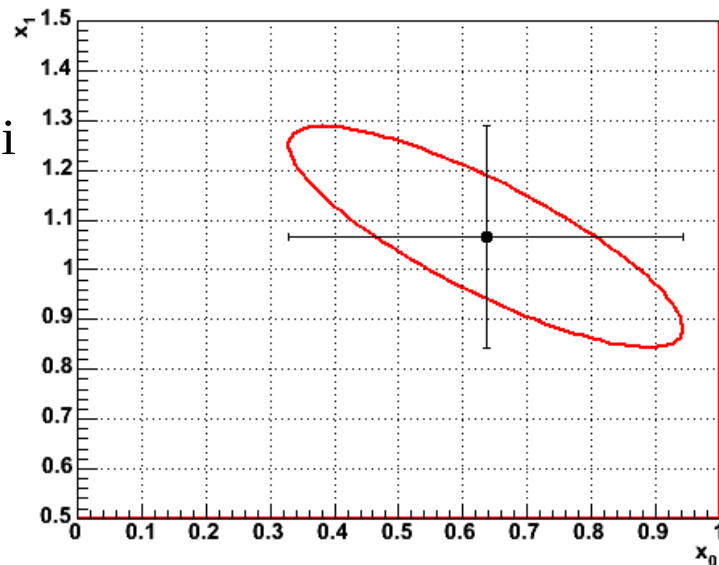
Dopasowanie linii prostej



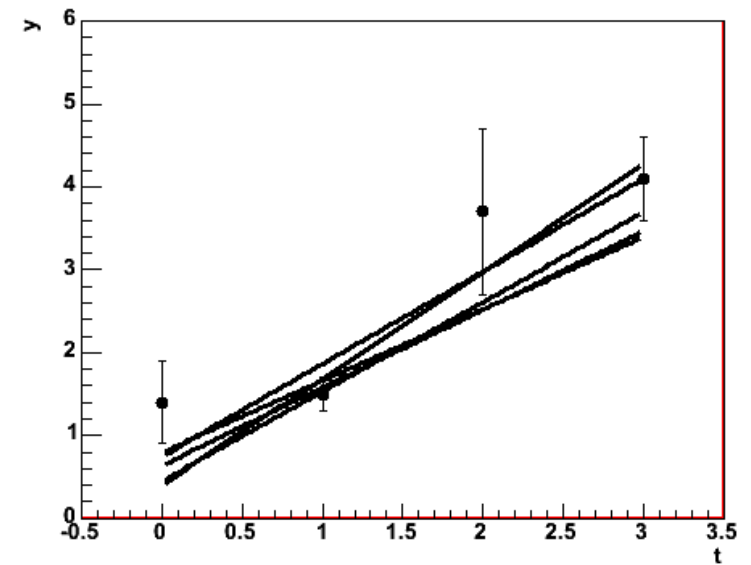
Pomiary poprawione



Elipsa kowariancji



Pek prostych z elipsy kowariancji



elipsa kowariancji
z macierzy kowariancji
 $C_{\tilde{x}}$

Dopasowanie wielomianu

- Poprzedni przykład można uogólnić na wielomian wyższego rzędu:

$$\eta_j = h_j = x_1 + x_2 t_j + x_3 t_j^2 + \dots + x_r t_j^{r-1}$$

$$\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{r-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{r-1} \end{pmatrix}$$

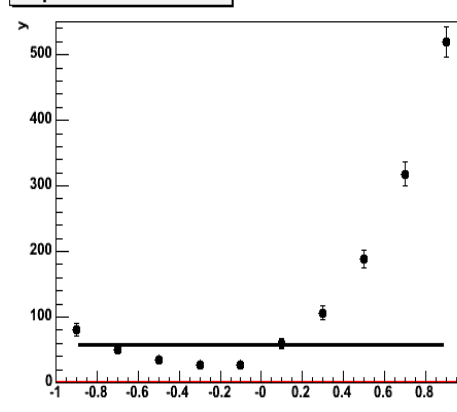
- Pomiary:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t _j	-0,9	-0,7	-0,5	-0,3	-0,1	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
y _j	81	50	35	27	26	60	106	189	318	520

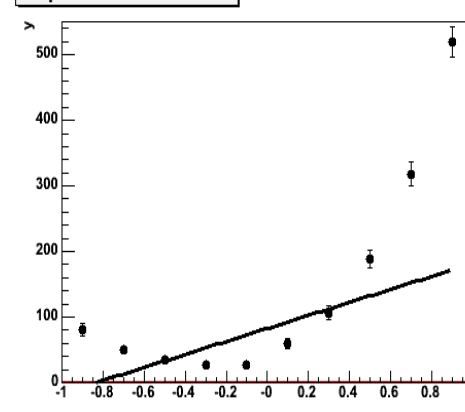
- Wynik:

r	~x ₁	~x ₂	~x ₃	~x ₄	~x ₅	~x ₆	f	M
1	57,85						9	833,55
2	82,66	99,1					8	585,45
3	47,27	185,96	273,61				7	36,41
4	37,95	126,55	312,02	137,59			6	2,85
5	39,62	119,1	276,49	151,91	52,6		5	1,69
6	39,88	121,38	273,19	136,57	56,9	16,73	4	1,66

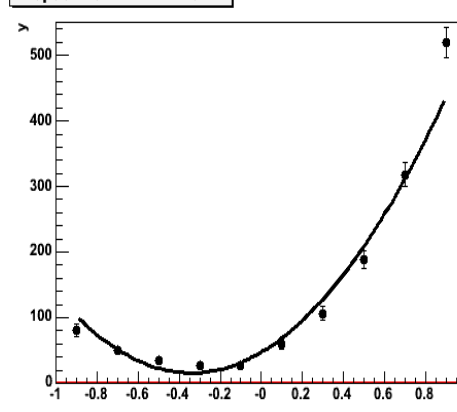
Dopasowanie wielomianu



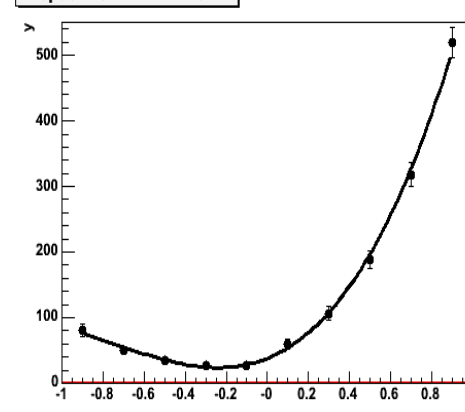
Dopasowanie wielomianu



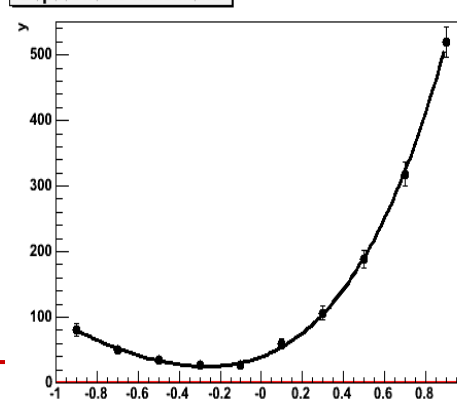
Dopasowanie wielomianu



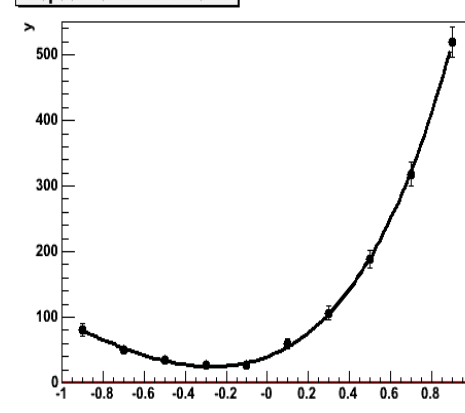
Dopasowanie wielomianu



Dopasowanie wielomianu



Dopasowanie wielomianu



Przykładowe zadania na kolokwium z KADD (wykład):

1) Dana jest dystrybuanta zmiennej X:

x	$(-\infty, -2>$	$(-2, 1>$	$(1, 3>$	$(3, \infty)$
F(x)	0	0.2	0.8	1.0

Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa.

2) Zmienna losowa X ma funkcję prawdopodobieństwa postaci:

x	-3	-1	3	5
p _i	0.1	0.2	0.5	0.2

Wyznaczyć funkcje prawdopodobieństwa zmienne U:

a) $U = 2X + 3$

b) $U = X^3$

c) $U = X^2 - 5$

Ponadto wyznaczyć wartości oczekiwane i wariancję.

3) Zmienna losowa ma rozkład prawdopodobieństwa:

$$f(x) = c \cdot \sin(x) \quad x \in [0, \pi]$$

a) Dobrać stałą c, aby f(x) była gęstością prawdopodobieństwa

b) Wyznaczyć funkcję dystrybuanty

c) Wyznaczyć wartość oczekiwaną, wariancję, odchylenie standardowe

d) Wyznaczyć medianą

4) Zaproponować metodą do generacji liczb z rozkładu potęgowego

5) Zaproponować metodę do generacji liczb z rozkładu sinusoidalnego

6) Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład gęstości: $f(x,y) = 1/(20\pi) \cdot \exp(-0.5 \cdot (x^2/4 + y^2/25))$. Zbadać, czy zmienne X, Y są niezależne, Podać sposób na obliczenie (obliczyć): $P(-1 < X < 2, 0 < Y < 3)$

7) Dane są dwie próby:

A) 21, 19, 14, 27, 25, 23, 22, 18, 21 (N = 9)

B) 16, 24, 22, 21, 25, 21, 18 (N=7)

Czy przy poziomie istotności 5% wariancja próby (B) jest mniejsza niż próby (A)?

8) Zweryfikuj hipotezę, że 10 pomiarów zostało wylosowane z populacji o wartości średniej 25.6? Przyjmij, że poziom istotności wynosi 10%, załóż, że populacji ma rozkład normalny. Pomiar: 22.03, 27.05, 27.5, 22.7, 25.3, 26.2, 27.9, 21.2, 23.3, 25.5.



KONIEC