Komputerowa analiza danych doświadczalnych

Wykład 11
5.05.2017

dr inż. Łukasz Graczykowski
lgraczyk@if.pw.edu.pl

Semestr letni 2016/2017

Jednoczesna estymacja kilku parametrów - przykład

Weryfikacja hipotez statystycznych

Test F-Fischera

Test t-Studenta

Test χ^2

Jednoczesna estymacja kilku parametrów – przykład

Jednoczesna estymacja kilku parametrów

- **Przykład:** badamy zasięg cząstek α w materii powstałych w wyniku rozpadu promieniotwórczego. Zasięg podlega rozkładowi normalnemu wokół wartości średniej → Innymi słowy, w wyniku eksperymentu mamy próbę losową o liczebności N z rozkładu normalnego
- Funkcja wiarygodności w tym przypadku:

$$L=\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\lambda_2\sqrt{2\pi}}\exp\frac{-\left(X^{(j)}-\lambda_1\right)^2}{2\lambda_2^2}$$

$$l=\ln L=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(X^{(j)}-\lambda_1\right)^2}{2\lambda_2^2}-N\ln\lambda_2-const$$

- Układ równań wiarygodności:

$$\frac{\partial l}{\partial\lambda_1}=\sum_{j=1}^{N}\frac{X^{(j)}-\lambda_1}{2\lambda_2^2}=0$$

$$\frac{\partial l}{\partial\lambda_2}=\frac{1}{\lambda_2^3}\sum_{j=1}^{N}\left(x^{(j)}-\lambda_1\right)^2-\frac{N}{\lambda_2}=0$$

- Rozwiązanie:

$$\tilde{\lambda}_1=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}X^{(j)}$$

$$\tilde{\lambda}_2=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}\left(X^{(j)}-\lambda_1\right)^2}{N}}$$

Jednoczesna estymacja kilku parametrów

- Wyznaczamy macierz A, a następnie B i macierz C poprzez policzenie drugich pochodnych i w granicy $N\to\infty$ zastąpienie ich wartościami oczekiwanymi:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_1^2}=-\frac{N}{\lambda_2^2} \qquad \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}=-\frac{2\sum X^{(j)}-\lambda_1}{\lambda_2^3} \qquad \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_2^2}=-\frac{3\sum\left(X^{(j)}-\lambda_1\right)^2}{\lambda_2^4}+\frac{N}{\lambda_2^2}$$

$$B=\begin{pmatrix} N/\tilde{\lambda}_2^2 & 0 \\ 0 & 2N/\tilde{\lambda}_2^2 \end{pmatrix} \qquad C=B^{-1}=\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_2^2/N & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2^2/2N \end{pmatrix}$$

- Elementy diagonalne macierzy C to odchylenia standardowe estymowanych parametrów

- Elementy pozadiagonalne wynoszą 0, zatem brak jest korelacji między estymowanymi parametrami

$$-\left(l(\boldsymbol{\lambda})-l(\tilde{\boldsymbol{\lambda}})\right)=1/2(\boldsymbol{\lambda}-\tilde{\boldsymbol{\lambda}})^T A(\boldsymbol{\lambda}-\tilde{\boldsymbol{\lambda}})+\ldots$$

$$L=k\exp\left(-1/2(\boldsymbol{\lambda}-\tilde{\boldsymbol{\lambda}})^T B(\boldsymbol{\lambda}-\tilde{\boldsymbol{\lambda}})\right) \qquad C=B^{-1}$$

$$B=E(A),\ \text{dla}\ N\to\infty,\boldsymbol{\lambda}=\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$-A=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_1^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_1\partial\lambda_p} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_2\partial\lambda_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_2\partial\lambda_p} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_p\partial\lambda_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_p\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_p^2} \end{pmatrix}$$

Weryfikacja hipotez statystycznych

Weryfikacja hipotez statystycznych

- Podstawowe pojęcia:
  - **poziom istotności** α – określa prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju (błąd polegający na odrzuceniu hipotezy zerowej, która w rzeczywistości jest prawdziwa). Zwykle **maksymalne** prawdopodobieństwo (odrzucenia) ustalamy na 0,01, 0,03 lub 0,05
  - **poziom ufności** p=1–α – określa prawdopodobieństwo wyznaczenia takiego przedziału ufności, że rzeczywista wartość parametru znajduje się w tym przedziale ufności (czyli jak bardzo ufamy naszemu wynikowi). Jest prawdopodobieństwem dopełniającym poziom istotności

$$\chi^2 = X^2 = \frac{(X_1 - a)^2 + (X_2 - a)^2 + \ldots + (X_n - a)^2}{\sigma^2} \longrightarrow \text{rozkład } \chi^2$$

$$W(\chi^2) = 1 - F(\chi^2) \equiv p = 1 - \alpha$$

Weryfikacja hipotez statystycznych

- Co to jest i po co wykorzystujemy weryfikację hipotez statystycznych?
  - wyznaczamy **wartości parametrów**, które nie są całkowicie nieznane
  - mamy pewne **przypuszczenia (przewidywania, hipotezę)** co do ich wartości (np. z dotychczasowych badań czy z modeli teoretycznych)
  - zadaniem próby losowej (naszego pomiaru) jest **weryfikacja (test)** tej hipotezy (naszych przypuszczeń)
  - innymi słowy – procedura weryfikacji hipotez statystycznych to **test statystyczny**
- **Przykład:** pobrano 10-elementową próbę, uzyskaliśmy średnią arytmetyczną (jest ona zmienną losową) $\bar{X} = 0{,}154$
- **Założenie (hipoteza):** zmienna losowa $\bar{X}$ pochodzi z populacji opisanej rozkładem normalnym ze średnią 0 i odchyleniem $1/\sqrt{10}$

Weryfikacja hipotez statystycznych

- **Przykład:** pobrano 10-elementową próbę, uzyskaliśmy średnią arytmetyczną (jest ona zmienną losową) $\bar{X}=0{,}154$
- **Założenie (hipoteza):** zmienna losowa $\bar{X}$ pochodzi z populacji opisanej std. rozkładem normalnym ze średnią 0 i odchyleniem $1/\sqrt{10}$
- Jakie jest prawdopodobieństwo zaobserwowania wartości $|\bar{X}|\geq 0{,}154$?
- Można skorzystać z tabel dystrybuanty rozkładu normalnego oraz wprowadzonego kilka wykładów wcześniej wzoru:

$$P(|X-a|\leqslant n\sigma)=2\Phi_0\left(\frac{nb}{b}\right)-1=2\Phi_0(n)-1$$

- Wtedy: $P(|\bar{X}|\geq 0.154)=2\{1-\Phi_0(0.154\cdot\sqrt{10})\}=0.62$
- Czyli, **jeżeli hipoteza jest prawdziwa**, istnieje prawdopodobieństwo 62%, że próba o liczebności 10 może mieć wartość średnią różniącą się więcej niż o 0,154 od wartości średniej 0 z populacji
- **Hipoteza jest prawdziwa czy nie?** Tak nie odpowiemy na to pytanie
- Źródłem trudności jest **probabilistyczny charakter wyników (próby)**

Weryfikacja hipotez statystycznych

- Źródłem trudności jest **probabilistyczny charakter wyników (próby)**
- Postępujemy zatem inaczej:
  - przed przystąpieniem do analizy pobranej próby ustalamy określoną wartość prawdopodobieństwa α
  - mastępnie, zakładając, że hipoteza jest prawdziwa, pytamy czy prawdopodobieństwo zaobserwowania określonych wartości próby jest mniejsze niż α? W naszym przykładzie: $P(|\bar{X}| \geq 0.154) < \alpha$?
  - **nierówność spełniona** – jest mało prawdopodobne, aby próba pochodziła z rozkładu określonego przez testowaną hipotezę → **możemy ją odrzucić**
  - **nierówność niespełniona** – omawiane prawdopodobieństwo przewyższa wartość α → **nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy** na zadanym poziomie ufności (<u>to nie znaczy, że hipoteza na pewno jest prawdziwa!</u> **Hipoteza nie jest sprzeczna z wynikiem uzyskanym w skutek pobrania próby**)

Weryfikacja hipotez statystycznych

- Jak dobrać wartość prawdopodobieństwa (posiom istotności) α?
- Wszystko zależy od rozpatrywanego problemu (wybór jest subiektywny):
  - przy kontroli jakości ołówków wystarczy 1% (0,01)
  - w firmach ubezpieczeniowych może to być wartość za duża
  - w analizie danych empirycznych najczęściej przyjmuje się 5%, 1% lub 0,1%
- W naszym przykładzie na podstawie tablic dystrybuanty rozkładu normalnego można okreslić granice $|\bar{X}|$ odpowiadające wyżej wymienionym poziomom istotności:

$$\alpha = 0{,}05 = 2\{1 - \Phi_0(1{,}96)\} = 2\{1 - \Phi_0(0{,}62 \cdot \sqrt{10})\}$$

$$\alpha = 0.01 = 2\{1 - \Phi_0(2{,}58)\} = 2\{1 - \Phi_0(0{,}82 \cdot \sqrt{10})\}$$

$$\alpha = 0.001 = 2\{1 - \Phi_0(3{,}29)\} = 2\{1 - \Phi_0(1{,}04 \cdot \sqrt{10})\}$$

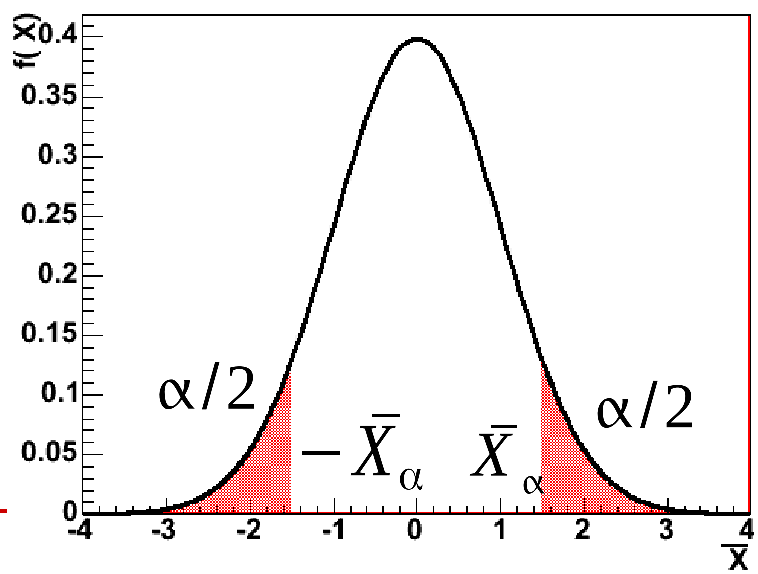
- Do odrzucenia hipotezy wymagane jest, aby wartość $|\bar{X}|$ przekraczała $0{,}62$, $0{,}82$, $1{,}04$ dla powyższych poziomów istotności

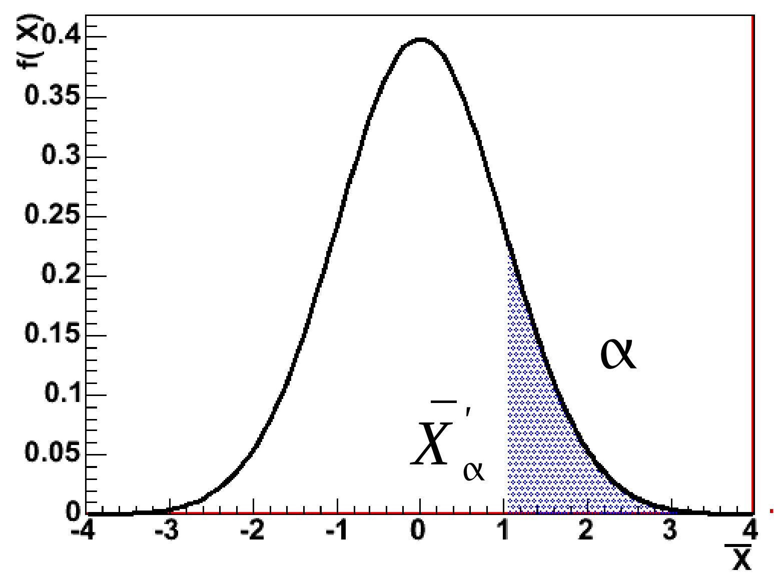
Weryfikacja hipotez statystycznych

- W niektórych przypadkach ważny jest również znak rozpatrywanej wielkości $\bar{X}$
- W wielu procesach produkcji odstępstwa w jedną lub drugą stronę od założonych w projekcie parametrów wyrobu mogą powodować różne skutki. Na przykład piekarz produkujące zbyt duże bochenki zmniejsza swój zysk, natomiast produkując zbyt małe może narazić się na kary. Możemy zatem testować odchylenia w jednym kieurnku i zapytać, czy spełniony jest warunek:

$$P(\bar{X} \geq x'_\alpha) < \alpha$$

- Jest to tzw. **test jednostrony**, w przeciwieństwie do **testu dwustronnego**





Weryfikacja hipotez statystycznych

- Jak dobrać wartość prawdopodobieństwa (posiom istotności) α?
- Wszystko zależy od rozpatrywanego problemu (wybór jest subiektywny):
  - przy kontroli jakości ołówków wystarczy 1% (0,01)
  - w firmach ubezpieczeniowych może to być wartość za duża
  - w analizie danych empirycznych najczęściej przyjmuje się 5%, 1% lub 0,1%
- W naszym przykładzie na podstawie tablic dystrybuanty rozkładu normalnego można okreslić granice $|\bar{X}|$ odpowiadające wyżej wymienionym poziomom istotności:

$$\alpha=0,05=2\{1-\Phi_0(1,96)\}=2\{1-\Phi_0(0,62\cdot\sqrt{10})\}$$
$$\alpha=0.01=2\{1-\Phi_0(2,58)\}=2\{1-\Phi_0(0,82\cdot\sqrt{10})\}$$
$$\alpha=0.001=2\{1-\Phi_0(3,29)\}=2\{1-\Phi_0(1,04\cdot\sqrt{10})\}$$

- Do odrzucenia hipotezy wymagane jest, aby wartość $|\bar{X}|$ przekraczała $0,62$, $0,82$, $1,04$ dla powyższych poziomów istotności

Weryfikacja hipotez statystycznych

- W ogólnym przypadku weryfikację możemy przeprowadzać na podstawie innych wielkości niż wartość średnia
- Postępujemy najpierw w sposób następujący:
  - definiujemy funkcję próby najwygodniejszą dla prowadzenia testu, nazywamy ją statystyką T
  - ustalamy poziom istotności α i wyznaczamy taki podzbiór U z obszarami zmienności T, tak aby: $P_H(T \in U) = \alpha$
  - wskaźnik H oznacza, że prawdopodobieństwo to obliczane jest przy założeniu, że hipoteza H jest prawdziwa
  - następnie pobieramy próbę i określamy wartość statystyki testowej T'
  - jeżeli T' znajduje się wewnątrz obszaru krytycznego U, to hipotezę H można odrzucić
- Przedyskutujemy teraz kilka specyficznych testów

Test równości wariancji (test F-Fischera)

Test równości wariancji (F-Fischera)

- **Częsty problem:** porównywanie wariancji populacji o jednakowych wartościach średnich
- **Przykład:** pomiar tej samej wielkości dwoma przyrządami pomiarowymi (zakładamy brak niepewności systematycznych – typu B)
- **Pytanie (hipoteza):** czy pomiary będą miały jednakowe wariancje (czy dokładność pomiaru jest jednakowa dla obu przyrządów)?
- Załóżmy, że rozważane populacje mają rozkład normalny
- Pobieramy próby o liczebności N_1 i N_2
- Dla każdej z pobranych prób wyznaczamy wariancję i liczymy iloraz

$$F = s_1^2 / s_2^2 \qquad s^2(X) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \qquad s^2(\bar{X}) = \frac{1}{N\cdot(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = s^2(X)/N$$

- Jeśli hipoteza o równości wariancji jest **prawdziwa**, to iloraz F powinien być bliski jedności $F \sim 1$

Test równości wariancji (F-Fischera)

- Jak pamiętamy, dla każdej próby losowej możemy również skonstruować statystykę o rozkładzie χ^2:

$$\chi_1^2=\frac{(N_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2}=\frac{f_1 s_1^2}{\sigma_1^2} \qquad \chi_2^2=\frac{(N_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2}=\frac{f_2 s_2^2}{\sigma_2^2}$$

$f_1=N_1-1;\ f_2=N_2-1$ - liczba stopni swobody

- Przy równych wariancjach iloraz F: $F=\frac{f_2\chi_1^2}{f_1\chi_2^2}$
- Jak już wiemy, gęstość prawdopodobieństwa rozkładu χ^2 o liczbie stopni swobody f dana jest wzorem:

$$f(\chi^2)=k\cdot(\chi^2)^{\lambda-1}e^{-1/2\chi^2}\Rightarrow f(\chi^2)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}f\right)2^{\frac{1}{2}f}}(\chi^2)^{\frac{1}{2}(f-2)}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

- Możemy obliczyć prawdopodobieństwo W że wartość ilorazu χ_1^2/χ_2^2 jest mniejsza niż pewna wartość Q:

$$W(Q)=P\left(\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}<Q\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}f\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}f_1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}f_2\right)}\int_0^Q t^{\frac{1}{2}f_1-1}(t+1)^{-\frac{1}{2}f}df \qquad f=f_1+f_2$$

Test równości wariancji (F-Fischera)

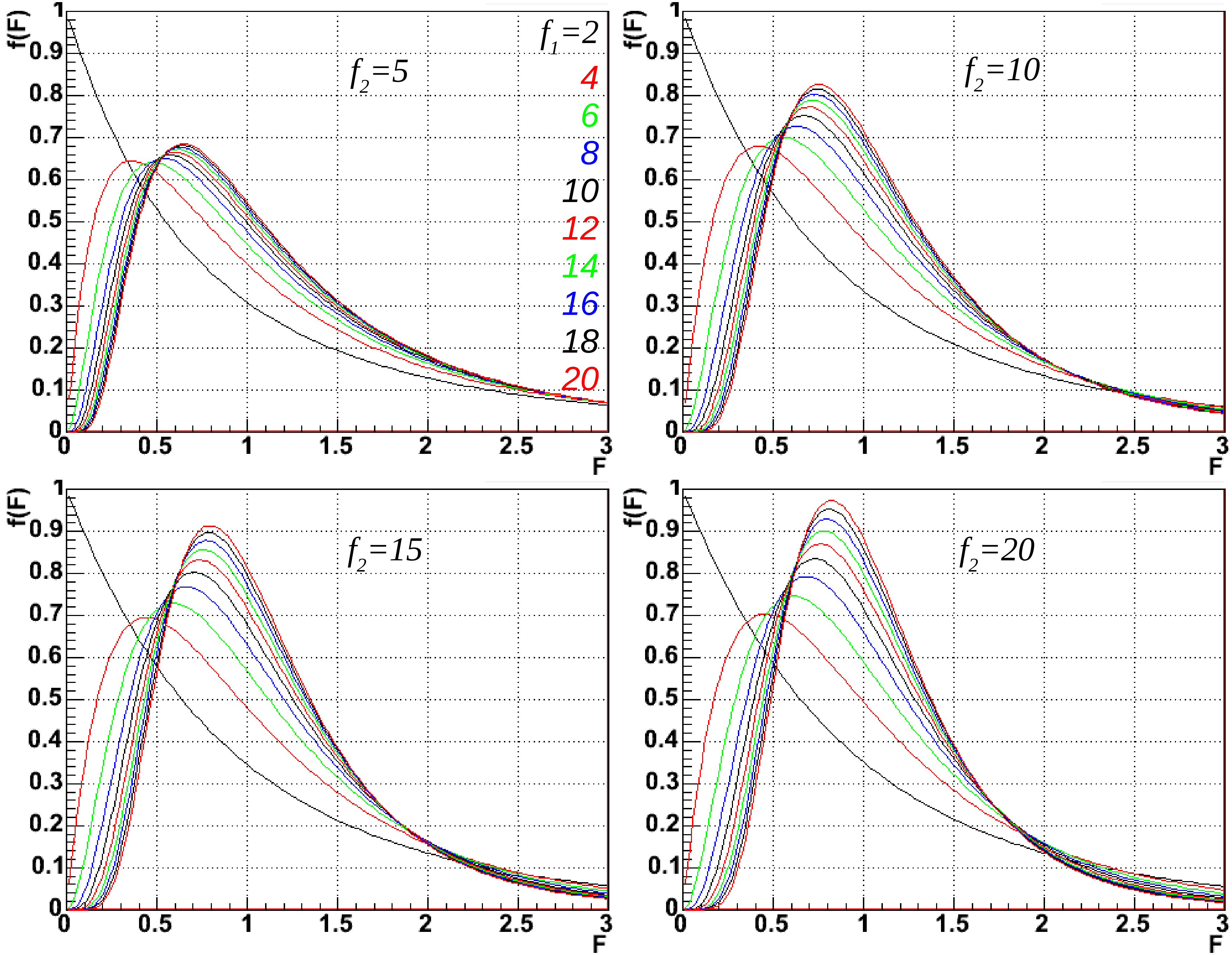
- Jeśli teraz wrócimy do ilorazu F, możemy go zapisać jako:

$$F=\frac{f_2}{f_1}Q$$

- Prawdopodobieństwo W zaś przyjmie postać: $W(F)=P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}<F\right)$
- Ta forma jest tzw. **dystrybuantą rozkładu F-Fischera**
- **Rozkład F-Fischera** dany jest następującym wzorem:

$$f(F)=\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{\frac{1}{2}f_1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(f_1+f_2)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}f_1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}f_2\right)}F^{\frac{1}{2}f_1-1}\left(1+\frac{f_1}{f_2}F\right)^{-\frac{1}{2}(f_1+f_2)}$$

Test równości wariancji (F-Fischera)



Test równości wariancji (F-Fischera)

- Rozkład przypomina kształtem rozkład χ^2, jest różny od 0 jedynie dla dodatnich wartości F, ponadto jest asymetryczny i szybko malejący z rosnącym F
- Można udowodnić, że wartość oczekiwana dla $f_2>2$: $E(F)=\frac{f_2}{f_2-2}$
- Szukamy teraz takiej granicznej wartości prawdopodobieństwa: $P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}>F'_\alpha\right)=\alpha$
- Wielkość F'_α to **kwantyl** $F'_\alpha=F_{1-\alpha}$ rozkładu F: $P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}<F'_\alpha\right)=P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}<F_{1-\alpha}\right)=1-\alpha$
- Jeżeli przy weryfikacji hipotezy uzyskamy wartość wariancji **wyższą** niż $F'_\alpha=F_{1-\alpha}$, to mówimy wówczas, że hipoteza $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ jest **prawdziwa** z poziomem istotności (na poziomie istotności) α
- Wartości $F'_\alpha=F_{1-\alpha}$ rozkładu F-Fischera są stabelaryzowane
- Pokazany wyżej test jest **testem jednostronnym**, możemy też zastosować **test dwustronny**

Test równości wariancji (F-Fischera)

- W teście dwustronnym sprawdzamy 2 wartości graniczne:

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_\alpha^{''}(f_1, f_2)\right) = \frac{1}{2}\alpha \qquad P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_\alpha^{'''}(f_1, f_2)\right) = P\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} > F_\alpha^{''}(f_2, f_1)\right) = \frac{1}{2}\alpha$$

- Relacja ta pozwala na psługiwanie się stabelaryzowanymi wartościami w obydwu przypadkach (dla testów jedno i dwustronnych)
- Dla wszystkich rozsądnych (zwykle używanych) wartości α spełniony jest warunek: $F_{1-\alpha/2} > 1$
- Czyli w praktyce musimy zweryfikować jedynie hipotezę: $\frac{s_g^2}{s_k^2} > F_{1-\alpha/2}(f_g, f_k)$
- Indeksy g i k oznaczają większą i mniejszą wariancję z próby, czyli: $s_g^2 > s_k^2$
- Jeżeli nierówność jest **spełniona**, to hipotezę o równości wariancji można **odrzucić**

Test równości wariancji - przykład

Numer pomiaru	Przyrząd 1	Przyrząd 2				
1	100	97	0,2	0,04	-2,86	8,16
2	101	101	1,2	1,44	1,14	1,31
3	102	102	2,2	4,84	2,14	4,59
4	100	99	0,2	0,04	-0,86	0,73
5	98	101	-1,8	3,24	1,14	1,31
6	97	98	-2,8	7,84	-1,86	3,45
7	100	101	0,2	0,04	1,14	1,31
8	101		1,2	1,44		
9	99		-0,8	0,64		
10	100		0,2	0,04		
Średnia	99,8	99,86				
Stopnie swobody	9	6				
S^2	19,6	20,86				
S^2/f	2,18	3,48				
F	1,6					

- Korzystamy z kwantyli funkcji F

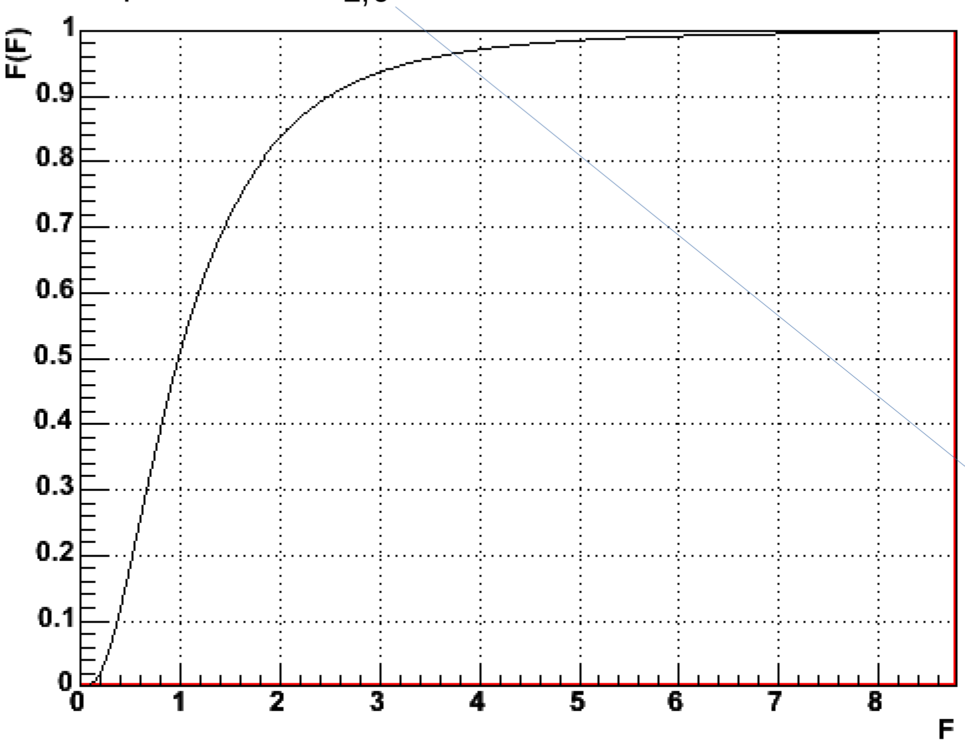
$$F''_{0,2}(6,9)=F_{0,9}(6,9)=2.51$$

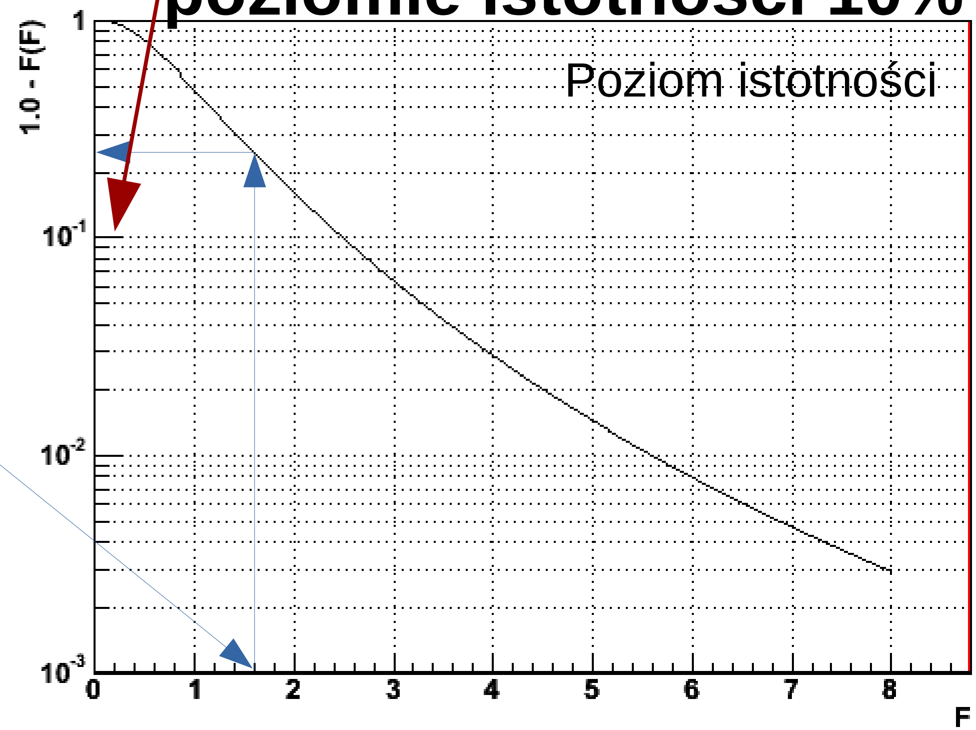
$$\boxed{F''_{0,1}(6,9)=F_{0,95}(6,9)=3.29}$$

$$F''_{0,02}(6,9)=F_{0,99}(6,9)=5.61$$

$$F''_{0,01}(6,9)=F_{0,995}(6,9)=6.89$$

- 1.6<3.29 – **nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy na poziomie istotności 10%**





Porównanie wartości średnich (test t-Studenta)

Test t-Studenta

- Mamy zmienną losową X o rozkładzie normalnym. Pobieramy próbę losową o liczebności N i wartości średniej $\bar{X}$
- Wariancja wartości średniej: $\sigma^2(\bar{X}) = \sigma^2(X)/N$
- Dla dostatecznie dużych prób wartość średnia z próby (na mocy centralnego twierdzenia granicznego) ma rozkład normalny $(\hat{x}, \sigma(\bar{X}))$
- Zmienna $y = \frac{\bar{X} - \hat{x}}{\sigma(\bar{X})}$ ma standardowy rozkład normalny
- Na ogół nie znamy jednak odchylenia standardowego $\sigma^2(X)$
- Posługujemy się estymatorem wariancji:

$$s_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} (X_j - \hat{x})^2 \qquad s_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2$$

- **Pytanie:** jak bardzo będziemy odbiegać od rozkładu Gaussa, jeżeli we wzorze na y zastąpimy odchylenie estymatorem?
- Dla uproszczenia, przyjmiemy, że $\hat{x} = 0$ (każdy rozkład Gaussa możemy przesunąć o wartość średnią)

Test t-Studenta

- Rozpatrzmy zmienną losową T zdefiniowaną następująco:

$$T = \bar{X} / s_{\bar{X}} = \bar{X} \cdot \sqrt{N} / S_X$$

- Wielkość $(N-1) s_X^2 = f s_X^2$ ma rozkład χ^2 o liczbie stopni swobody $f = N - 1$
- Wzór na zmienną T zmieni się nam zatem następująco:

$$T = \bar{X} / s_{\bar{X}} = \bar{X} \cdot \sqrt{N} \cdot \sqrt{f} / \chi$$

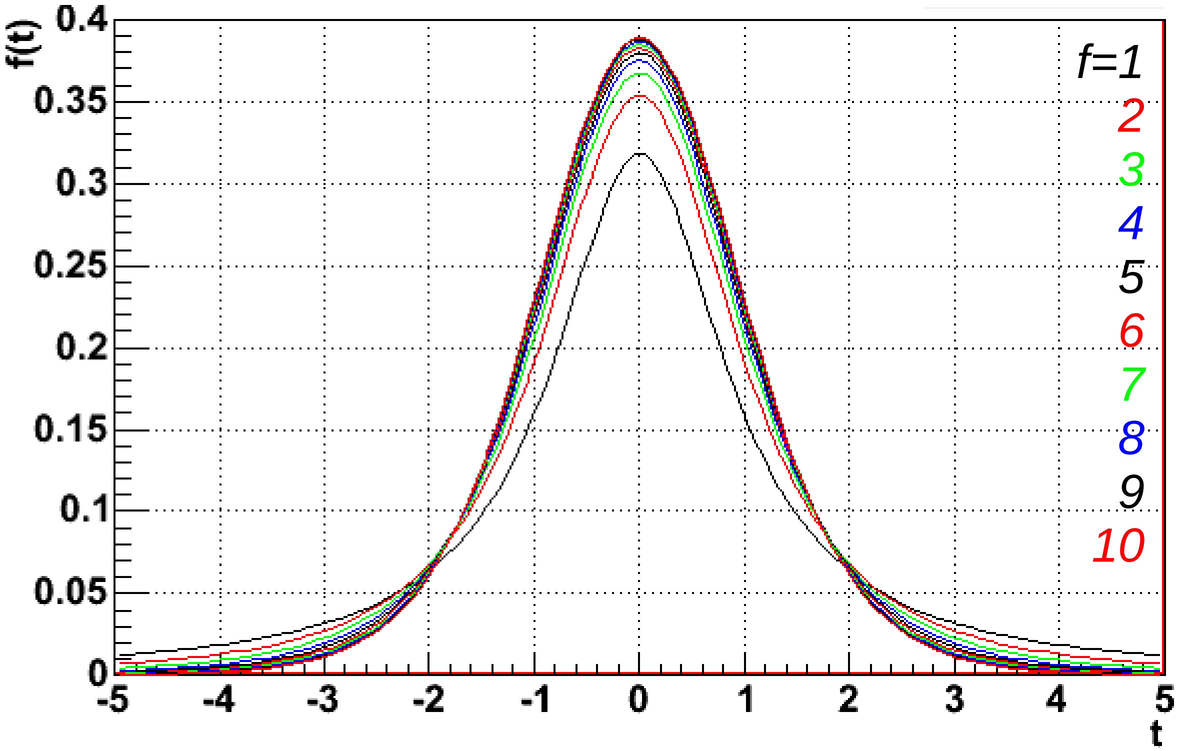
- Dystrybuanta zmiennej T będzie określona wzorem:

$$F(t) = P(T < t) = P\left(\frac{\bar{X}\sqrt{N}\sqrt{f}}{\chi} < t\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(f+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}f\right)\sqrt{\pi}\sqrt{f}} \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{\frac{1}{2}(f+1)} dt$$

- A odpowiadająca jej funkcja gęstości, nosząca nazwę **rozkładu t-Studenta**:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(f+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}f\right)\sqrt{\pi}\sqrt{f}} \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{\frac{1}{2}(f+1)}$$

Rozkład t-Studenta



- Jak widać, rozkład t-Studenta jest symetryczny względem 0
- Rozkład dąży do rozkładu Gaussa gdy $f \to \infty$
- Z symetrii względem 0 mamy związek (analogicznie jak dla Gaussa): $P(|t| \leq t) = 2F(|t|) - 1$

- Możemy wyznaczyć graniczne wartości $\pm t'_\alpha$ odpowiadające poziomowi istotności α poprzez całkę:

$$\int_0^{t'_\alpha} f(t)\,dt = \frac{1}{2}(1-\alpha), \quad gdzie \quad t'_\alpha = t_{1-\frac{1}{2}\alpha}$$

- Kwantyle $t'_\alpha = t_{1-\frac{1}{2}\alpha}$ są stablicowane dla różnych poziomów istotności α oraz liczby stopni swobody *f*
- Jest to dwustronny test t-Studenta (jednostronny analogicznie)

Zastosowanie testu t-Studenta

- **Hipoteza:** zakładamy, że nasza populacja przewiduje wartość oczekiwaną z populacji mającej rozkład normalny równą λ_0
- Pobieramy próbę o liczebności N i wyznaczamy wartość średnią $\bar{X}$ oraz wariancję s_X^2
- Jeżeli przy założonym poziomie istotności α zachodzi nierówność:

$$|t| = \frac{|\bar{X} - \lambda_0|\sqrt{N}}{s_X} > t'_\alpha = t_{1-\frac{1}{2}\alpha}$$

- Wtedy **odrzucamy** naszą hipotezę
- W przypadku testu jednostronnego

$$t = \frac{(\bar{X} \pm \lambda_0)\sqrt{N}}{s_X} > t'_{2\alpha} = t_{1-\alpha}$$

Zastosowanie testu t-Studenta

- Powyższe rozważania możemy **uogólnić** na porównanie wartości średnich dwóch prób losowych z populacji X oraz Y o liczebnościach N_1 i N_2
- **Hipoteza:** równość wartości średnich z obu populacji: $\hat{x}=\hat{y}$
- Zakładamy (z centralnego twierdzenia granicznego), że wartości średnie z prób mają rozkład normalny z wariancjami:

$$\sigma^2(\bar{X})=\sigma^2(X)/N_{1,} \quad \sigma^2(\bar{Y})=\sigma^2(Y)/N_2$$

- Wariancje są estymowane przez estymatory:

$$s_{\bar{X}}^2=\frac{1}{N_1(N_1-1)}\sum_{j=1}^{N_1}(X-\bar{X})^2 \qquad s_{\bar{Y}}^2=\frac{1}{N_1(N_1-1)}\sum_{j=1}^{N_1}(Y-\bar{Y})^2$$

- Różnica wartości średnich z próby również ma rozkład zbliżony do normalnego: $\Delta=\bar{X}-\bar{Y}\Rightarrow\sigma^2(\Delta)=\sigma^2(\bar{X})+\sigma^2(\bar{Y})$
- Jeśli hipoteza jest prawdziwa, wówczas oczywiste jest, że $\hat{\Delta}=0$ oraz iloraz $\Delta/\sigma(\Delta)$ powinien podlegać rozkładowi Gaussa
- Tak postawiona hipoteza cicho zakłada, że X i Y to te same populacje

Test różnic t-Studenta

- Tak postawiona hipoteza cicho zakłada, że X i Y to te same populacje
- Skoro tak, to oczywiście $\sigma^2(X)=\sigma^2(Y)$, zatem można je estymować za pomocą jednego estymatora jako średnią ważoną z dwóch prób:

$$s^2=\frac{(N_1-1)s_X^2+(N_2-1)s_Y^2}{(N_1-1)+(N_2-1)}$$

- Wtedy możemy zdefiniować estymatory:

$$s_{\bar{X}}^2=s^2/N_{1,}\quad s_{\bar{Y}}^2=s^2/N_{2,}\quad s_\Delta^2=s_{\bar{X}}^2+s_{\bar{Y}}^2=\frac{N_1+N_2}{N_1\cdot N_2}s^2$$

- Można udowodnić, że zmienna $\Delta/s(\Delta)$ podlega rozkładowi t-Studenta z liczbą stopni swobody $f=N_1+N_2-2$
- Równość wartości średnich można więc weryfikować posługując się **testem różnic Studenta**
- $\Delta/s(\Delta)$ obliczana jest na podstawie wyników dwóch prób. Jej wartość bezwzględną porównujemy z kwantylem rozkładu Studenta o liczbie stopni swobody f dla ustalonego poziomu istotności α. Sprawdzamy nierówność (**spełniona – odrzucamy hipotezę**): $|t|=\frac{|\Delta|}{s_\Delta}=\frac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{S_\Delta}>t'_\alpha=t_{1-\frac{1}{2}\alpha}$

Test różnic t-Studenta - przykład

Numer pomiaru	Przyrząd 1	Przyrząd 2				
1	**100**	**97**	-0,21	0,04	-3,8	14,44
2	**101**	**101**	0,79	0,62	0,2	0,04
3	**102**	**102**	1,79	3,2	1,2	1,44
4	**100**	**99**	-0,21	0,04	-1,8	3,24
5	**98**	**101**	-2,21	4,89	0,2	0,04
6	**97**	**108**	-3,21	10,31	7,2	51,84
7	**100**	**101**	-0,21	0,04	0,2	0,04
8	**101**	**102**	0,79	0,62	1,2	1,44
9	**99**	**96**	-1,21	1,47	-4,8	23,04
10	**100**	**101**	-0,21	0,04	0,2	0,04
11	**98**		-2,21	4,89		
12	**101**		0,79	0,62		
13	**100**		-0,21	0,04		
14	**102**		1,79	3,2		
15	**103**		2,79	7,78		
16	**101**		0,79	0,62		
17	**99**		-1,21	1,47		
18	**100**		-0,21	0,04		
19	**102**		1,79	3,2		
Ilość pomiarów	19	10				
Średnia	**100,21**	**100,8**	**-0,59**			
Stopnie swobody	18	9				
S^2	43,16	95,6				
S^2/f	2,4	10,62				
S^2	49,1					
S^2 Delta	8,18					

- Mamy kwantyle:

$$t'_{0,2}(27)=t_{0,9}(27)=1.71$$

$$t'_{0,1}(27)=t_{0,95}(27)=2,05$$

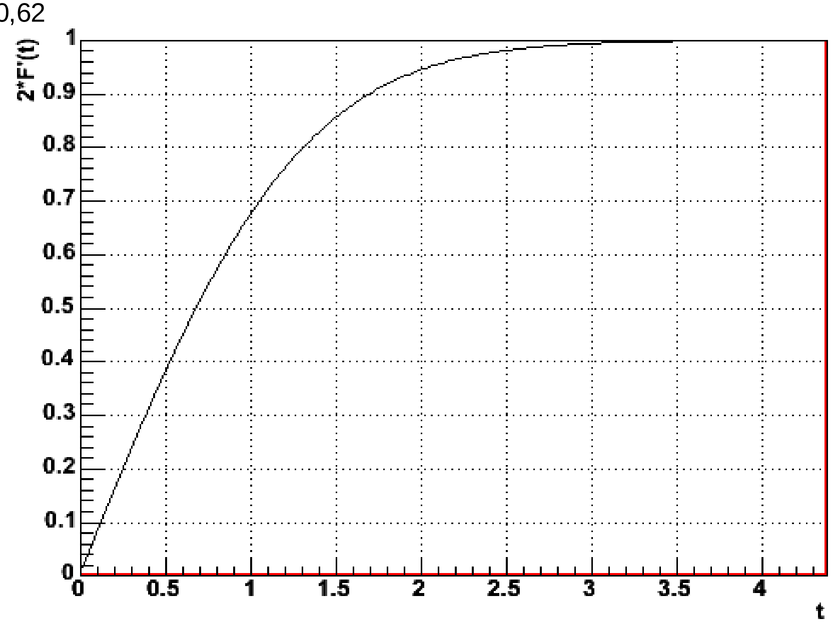
$$t'_{0,02}(27)=t_{0,99}(27)=2,77$$

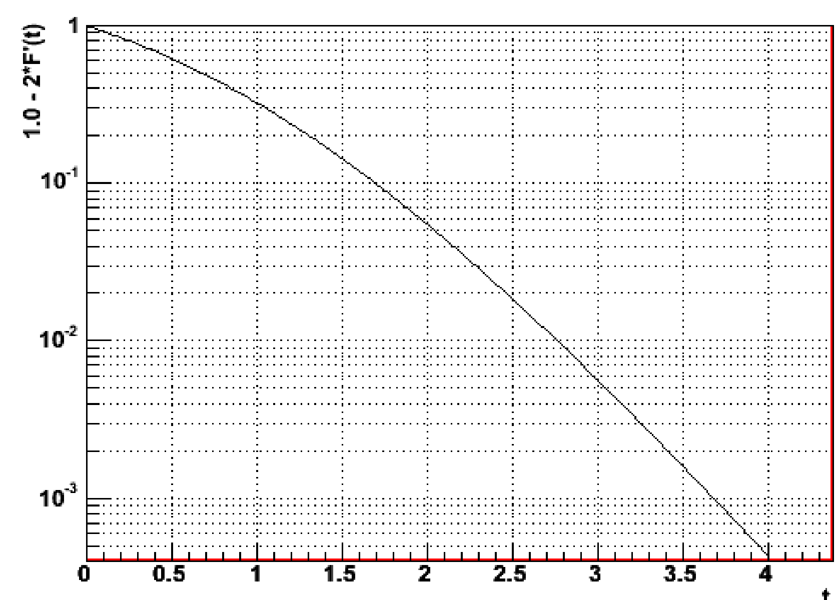
$$t'_{0,01}(27)=t_{0,995}(27)=3,05$$

$$t'_{0,004}(27)=t_{0,998}(27)=3,43$$

$$t'_{0,002}(27)=t_{0,999}(27)=3,69$$

- **Hipotezy nie można odrzucić**





Test dobroci χ^2 dopasowania

Test χ^2 dobroci dopasowania

- Mamy N pomiarów g_i, i=1, 2, …, N oraz ich niepewności σ_i
- Wartość g_i jest wynikiem pomiaru wielkości prawdziwej (lecz nieznanej) h_i, spełniony jest zatem warunek: $g_i = h_i + \epsilon_i, \; i = 1,2,\ldots,N$
- Wielkość ϵ_i jest zmienną losową o rozkładzie normalnym o wartości średniej równej 0 i odchyleniu standardowym równym σ_i
- **Weryfikujemy hipotezę taką, że:** $h_i = f_i, \; i = 1,2,\ldots,N$

  $u_i = \frac{g_i - f_i}{\sigma_i}, \; i = 1,2,\ldots,N$ mają rozkład standardowy normalny
- Tym samym rozkład χ^2 o N stopniach swobody będzie miała wielkość:

  $$T = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{g_i - f_i}{\sigma_i} \right)^2$$
- Gdy hipoteza jest fałszywa, wówczas poszczególne różnice wielkości mierzonych g_i oraz wielkości f_i (których dotyczy nasza hipoteza), dzielone przez niepewności σ_i przyjmują duże wartości
- Hipotezę **odrzucamy**, gdy dla danego α jest spełnione: $T > \chi^2_{1-\alpha}$

Liczba stopni swobody

- Często zarówno pomiary g_i, wartości prawdziwe h_i, jak i nasza hipoteza f_i wiążąca h_i z g_i, są funkcjami zmiennej kontrolnej t, której wartośći znamy dokładnie: $g_i = g_i(t_i)\,,\; h_i = h_i(t_i)\,,\; f_i = f_i(t_i)$
- Prosta hipoteza mówi, że jest liniowa zależność: $f(t) = h(t) = at + b$
- Czyli mamy jakąś teorię, która mówi np. jak jakaś wielkość fizyczna zmienia się dajmy na to w czasie
- Często hipoteza (nasza teoria) określa wartości parametrów a i b i wtedy nasz problem ma N stopni swobody (wyniki pomiaru), jednak gdy parametry nie są znane, jedynym założeniem jest liniowość $h(t)$
- W takim przypadku **każdy nieznany parametr, który estymujemy na podstawie pomiarów obniża liczbę stopni swobody o 1**
- Tworzymy więc estymatory parametrów a i b będące funkcjami pomiarów g_i oraz ich niepewności σ_i, wtedy nasza hipoteza przyjmuje postać: $h_i = h(t_i) = f_i = \tilde{a}\, t_i + \tilde{b}$ i liczba stopni swobody wynosi N-2 (w praktyce mamy 2 równania więzów między wielkościami u_i)

Test χ^2 i doświadczalny rozkład częstości

- Każdy ciągły rozkład prawdopodobieństwa $f(x)$ można zamienić na dyskretny poprzez podział zakresu zmienności zmiennej losowej X na r przedziałów: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_r$
- Całkując $f(x)$ w przedziałach otrzymujemy prawdopodobieństwo zaobserwowania zmiennej X w danym przedziale (binie) p_i:

$$p_i = P(x \in \xi_i) = \int_{\xi_i} f(x)\,dx\,; \quad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

- Z pobranej próby o liczebności n oznaczamy przez n_i elementy leżące w przedziale ξ_i
- Oczywiście zachodzi relacja: $n = \sum_{i=1}^{r} n_i \qquad n_i = np_i$
- **Hipoteza:** zakładamy, że dla dużych wartości liczb n_i ich wariancja równa się n_i (patrz dyskusja o rozkładzie Poissona) i że rozkład wielkości u_i:

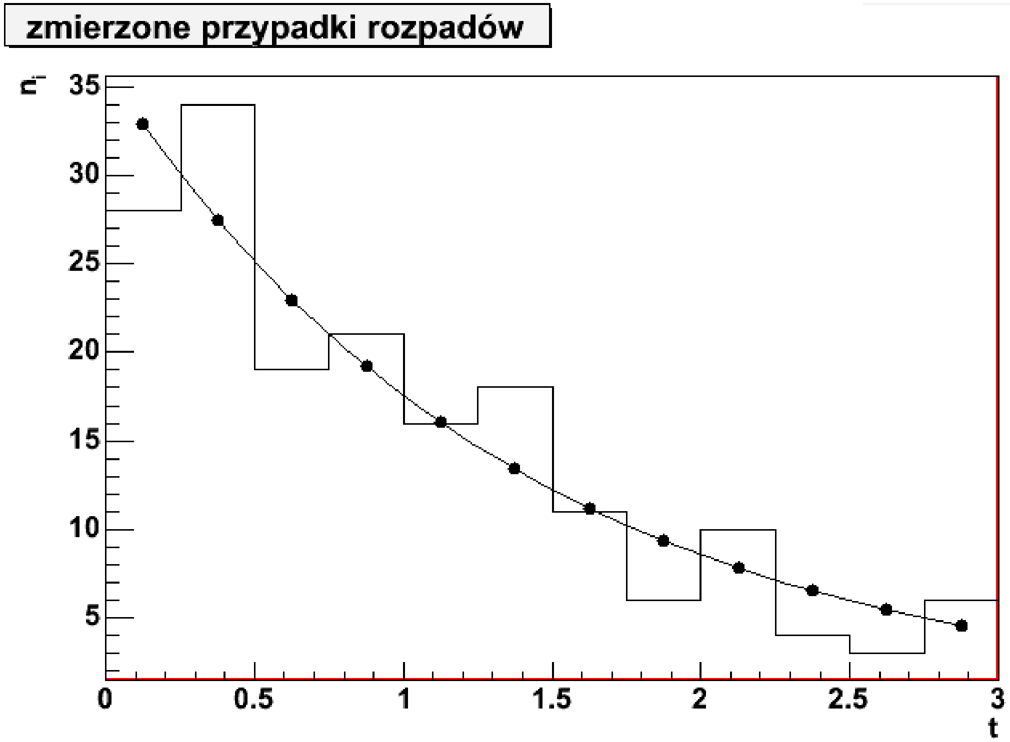
$$u_i^2 = \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n_i}, \quad lub \quad u_i^2 = \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{np_i}$$

- dąży do rozkładu Gaussa

Test χ^2 i doświadczalny rozkład częstości

- Obliczamy teraz sumę kwadratów: $\chi^2 = X^2 = \sum_{i=1}^{r} u_i^2$
- Na podstawie naszej hipotezy oczekujemy, że suma kwadratów (statystyka X^2) ma asymptotycznie rozkład χ^2
- Ponieważ zmienne u_i są niezależne, więc liczba stopni swobody tego rozkładu równa się r-1
- Oczywiście, jeżeli dodatkowo estymujemy p parametrów rozkładu na podstawie pomiarów, to liczba stopni swobody wynosi r-1-p
- Wartość X^2 porównujemy, tak jak do tej pory, z kwantylami rozkładu χ^2 dla zadanego poziomu istotności α. Jeśli nierówność jest spełniona – odrzucamy hipotezę $X^2 > \chi^2_{1-\alpha}$

Test χ^2 – przykład



Numer binu	n_i	p_i	n p_i	(n_i – np_i)^2/np_i
1	28	0,1649	29,02	0,0360
2	34	0,1372	24,15	4,0202
3	19	0,1148	20,2	0,0718
4	21	0,0959	16,88	1,0065
5	16	0,0801	14,1	0,2567
6	18	0,0669	11,77	3,2917
7	11	0,0559	9,84	0,1371
8	6	0,0467	8,22	0,5992
9	10	0,0390	6,86	1,4328
10	4	0,0326	5,74	0,5262
11	3	0,0273	4,8	0,6779
12	6	0,0228	4,01	0,9841
n=sum(n_i)	176		X^2	13,04

$$t_{0,9}(11)=17,274$$
$$t_{0,95}(11)=19,674$$
$$t_{0,99}(11)=24,726$$
$$t_{0,995}(11)=26,758$$
$$t_{0,998}(11)=29,354$$
$$t_{0,999}(11)=31,266$$

$$f(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$$
$$\bar{t}=\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}=\tau$$
$$p_i=\int_{x_{min}}^{x_{max}}\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$$

- Badamy stałą rozpadu promieniotwórczego.
- Estymatorem τ jest wartość średnia t
- Porównując kwantyle χ^2 widać, że nawet dla $\alpha=0.1$ nie możemy odrzucić hipotezy

KONIEC