



Komputerowa analiza danych doświadczalnych

Wykład 1
24.02.2017

dr inż. Łukasz Graczykowski
lgraczyk@if.pw.edu.pl

Semestr letni 2016/2017

Prowadzący przedmiot

- **Wykład:**

- dr inż. Łukasz Graczykowski
Zakład Fizyki Jądrowej
pok. 117D, Gmach Fizyki
lgraczyk@if.pw.edu.pl



- **Laboratoria:**

- dr inż. Łukasz Graczykowski – ROOT
- mgr inż. Andrzej Lipiec – ROOT
- mgr inż. Grzegorz Siudem – Matlab



- **Strona przedmiotu:**

- http://www.if.pw.edu.pl/~lgraczyk/wiki/index.php/KADD_2016/2017

- **Konsultacje:** wtorki 14-15, 117D GF

Sprawy organizacyjne

- **Organizacja zajęć:**

- wykłady: 1h w tygodniu (15h w semestrze)
- laboratoria: 2h w tygodniu (30h w semestrze)

- **Laboratoria:**

- 15 zajęć: 1 wstępne, 11 punktowanych, 2 kolokwia, 1 dodatkowe
- prowadzone w środowisku ROOT lub Matlab
- zajęcia trwają 90 minut (bez przerwy)
- spóźnienie powyżej 15 minut – nieobecność

- **Wykłady:**

- piątki 12:15-13:00, s. 111 Gmach Fizyki
- http://www.if.pw.edu.pl/~lgraczyk/wiki/index.php/KADD_2016/2017

Warunki zaliczenia (1)

- **Laboratorium:**

- 11 punktowanych zadań o zróżnicowanym stopniu trudności **(0-5 pkt)**
- dopuszczenie do wykonania zadania może być warunkowane zaliczeniem kolokwium wstępnego (“wejściówki”)
- w trakcie pisania programu można korzystać z **własnych** programów i zasobów Internetu*
- program **w pełni** dokończony w domu: **+1 pkt, ale max 4 pkt**

*) nie wolno korzystać z programów pocztowych (chyba, że prowadzący wyrazi zgodę), komunikatorów internetowych, serwisów społecznościowych (w celu komunikacji z innymi użytkownikami), ani z programów kolegów z grupy swojej, jak i żadnej innej; korzystanie z telefonów komórkowych (smartfonów, tabletów) jest także zabronione.

Warunki zaliczenia (2)

- **Nieobecności na laboratorium:**
 - nieobecność nieusprawiedliwiona: **0 pkt.**
 - nieobecność usprawiedliwiona: **max 4 pkt.**
konieczność zrealizowania materiału we własnym zakresie i przedstawienia na najpóźniej 2 tygodnie od powrotu (na zajęciach lub konsultacjach)
 - maksymalna liczba nieobecności nieuspr.: **2** (w przypadku dłuższej nieobecności usprawiedliwionej, np. choroba – warunki zaliczenia ustalane będą indywidualnie)

Warunki zaliczenia (3)

- **Kolokwia na laboratorium:**
 - punktacja: **0-30 pkt** za **każde** kolokwium
 - w trakcie semestru przewidziane są **2 kolokwia**
 - napisanie **3 programów** z materiału zrealizowanego na zajęciach
 - każdy program punktowany **0-10 pkt.**
- **Kolokwium na wykładzie:**
 - punktacja: **0-35 pkt.**
 - kolokwium z wiedzy (pisemne) na wykładzie
- **Zaliczenie kolokwiów: >50% pkt.**
- **Poprawa kolokwium z lab.:**
 - możliwa jednokrotnie, wynik poprawy **zastępuje** wynik regularny
 - tylko na ostatnich (15) zajęciach, **max 24 pkt.** (8 pkt. za program)

Warunki zaliczenia (4)

- **Punktacja:**

- maksymalna ilość punktów: **150**

- laboratoria: **$11 \cdot 5 = 55$**

- kolokwia (lab.): **$2 \cdot 30 = 60$**

- kolokwium (wykł.): **$1 \cdot 35 = 35$**

- **Zaliczenie (procent sumy punktów):**

- **>50%** - **3** (75,5 pkt. – 90,0 pkt.)

- **>60%** - **3,5** (90,5 pkt. – 105,0 pkt.)

- **>70%** - **4** (105,0 pkt. – 120,0 pkt.)

- **>80%** - **4,5** (120,5 pkt. – 135,0 pkt.)

- **>90%** - **5** (135,5 pkt. – 150,0 pkt.)

- **Uwaga! Do zaliczenia przedmiotu konieczne jest zaliczenie (>50% punktów) wszystkich kolokwiów**

Literatura

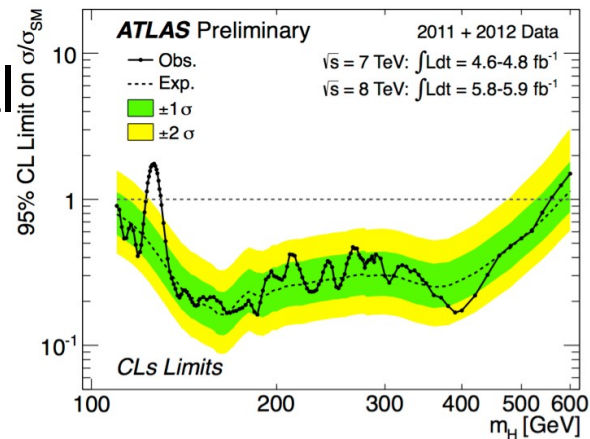
1. **S. Brand, “Analiza danych: metody statystyczne i obliczeniowe”, PWN, Warszawa (1998)**
2. R. Nowak, “Statystyka dla fizyków”, PWN, Warszawa (2002)
3. W.T.Eadie, D.Drijard, F.E.James, M.Ross, B.Sadoulet, “Metody statystyczne w fizyce doświadczalnej”, PWN, Warszawa (1989)
4. A.Plucińska, E.Pluciński, “Elementy probablistyki”, PWN, Warszawa (1979)
5. Przykładowe programy i dokumentacja środowiska ROOT i Matlab

Program wykładu

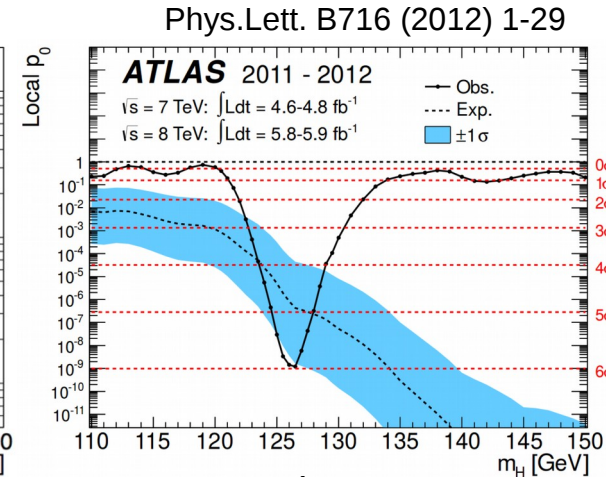
1. Pomiar w eksperymentach fizycznych (przypomnienie z rachunku niepewności).
2. Zmienne losowe i ich rozkłady (1D, 2D, nD).
3. Elementy metody Monte Carlo, generacja liczb pseudolosowych za pomocą komputera.
4. Podstawowe rozkłady statystyczne (dyskretne i ciągłe; centralne twierdzenie graniczne).
5. Pomiar jako pobieranie próby. Estymatory.
6. Metoda największej wiarygodności.
7. Weryfikacja hipotez statystycznych (m. in. test χ^2)
8. Metoda najmniejszych kwadratów (przypadek liniowy, wielomianowy, ...)
9. Zagadnienie minimalizacji i optymalizacji.

Po co nam to wszystko?

1. Poprawne opracowanie danych jest niezbędne niemal we wszystkich badaniach empirycznych.
2. Metody analizy danych są w zasadzie bardzo zbliżone niezależnie od dziedziny (fizyka, elektronika, dane medyczne, bankowe itp.)
3. Umiejętność czytania i rozumienia publikacji naukowych.
4. Umiejętność przedstawiania danych i wyników ich analizy (**wykresy**).

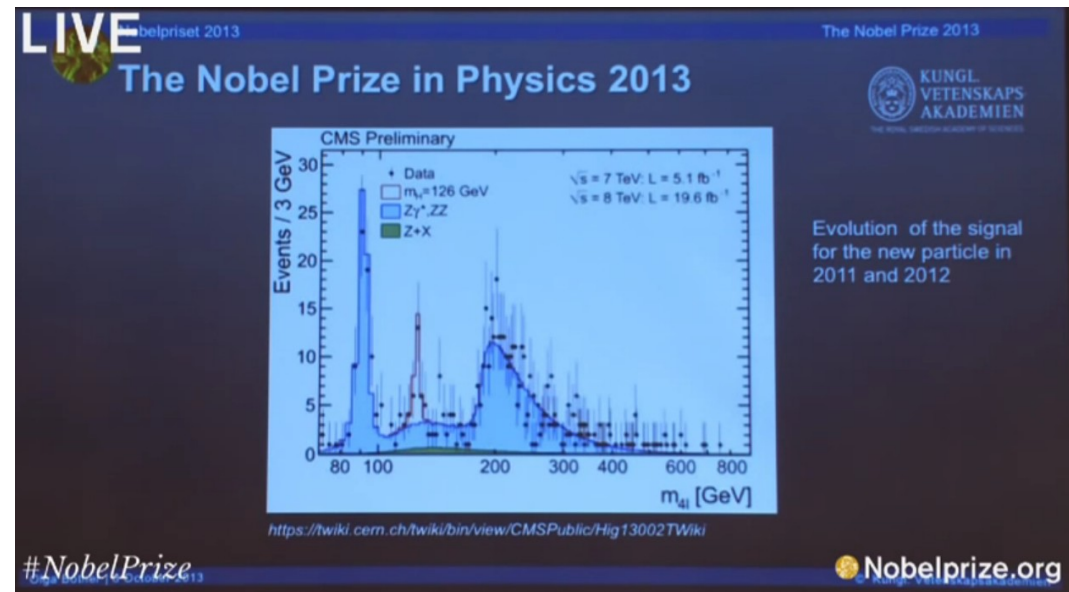


Obszar wykluczenia masy bozonu Higgsa na poziomie ufności 95% (poniżej 1)



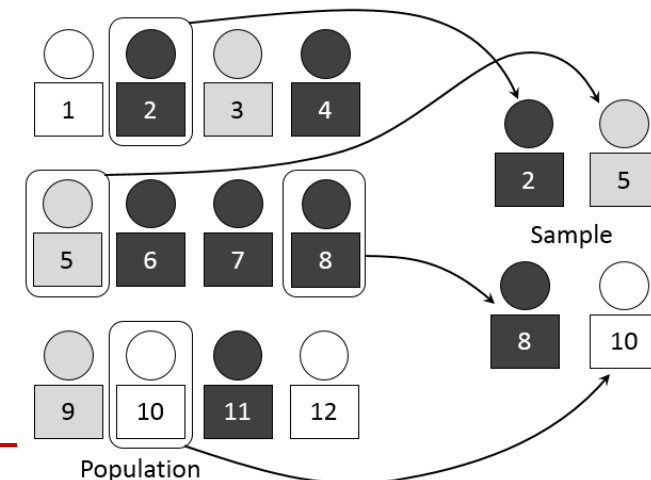
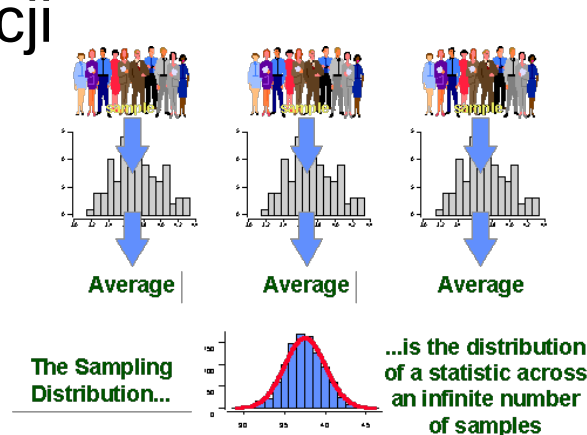
Poziom istotności obserwowanego sygnału bozonu Higgsa.

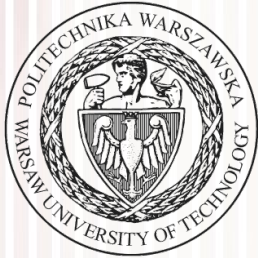
<http://www.nobelprize.org/mediaplayer/index.php?id=1954>



Statystyczna analiza danych

- Statystyczna analiza danych (to o czym będziemy się uczyć):
 - traktujemy pomiar jako pewien element zbioru wszystkich możliwych pomiarów (pewnej cechy **populacji** o danym rozkładzie prawdopodobieństwa – najczęściej nieznanym)
 - na podstawie skończonej liczby pomiarów, obserwacji (**próby losowej**, podzbioru populacji), która ma swój rozkład prawdopodobieństwa (znany z pomiarów czy obserwacji), próbujemy dowiedzieć się czegoś (czyli **estymować**) na temat parametrów rozkładu całej populacji
 - innymi słowy, na podstawie próby losowej (pomiarów, obserwacji) stawiamy hipotezy i wyciągamy wnioski dotyczące interesującej nas cechy całej populacji





No to zaczynamy :)

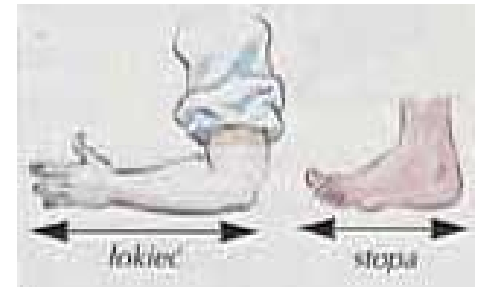
**Pomiar w eksperymencie
fizycznym, niepewności
pomiarowe - przypomnienie**

Pomiar

- **Pomiar** jest podstawowym źródłem informacji o świecie, w którym żyjemy. Proces pomiaru polega na porównaniu pewnej wielkości fizycznej ze wzorcem, przyjętym za **jednostkę** danej wielkości. **Każdy pomiar** jest przeprowadzony z pewną **dokładnością**.

- Prawidłowo przeprowadzony pomiar zawiera:

- **jednostkę** w jakiej wyrażona jest wielkość (np. metry, ampery, dzule)
- **wartość liczbowa**, czyli wynik pomiaru w przyjętych jednostkach
- **niepewność pomiarową** uzyskanej wielkości



<http://fizyka.net.pl/ciekawostki/grafika/miara1.jpg>

Jak mierzyć niepewności?

- Normy i sposób określania niepewności pomiarowych oraz ich terminologii zawarte są w przewodniku **“Guide to the expression of uncertainty in measurements” (GUM)** wydanym w 1995 roku przez Międzynarodową Organizację Standaryzacyjną (ISO).
- Polska wersja normy ISO została wydana przez Główny Urząd Miar w 1999 roku pt. **“Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik”**.
- W laboratoriach Wydziału Fizyki posługujemy się tym sposobem określania niepewności pomiarowych.



www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

Na podstawie prezentacji A. Kubiaczyka (Lab. Fiz. I teren pld.)

http://www.if.pw.edu.pl/~labfiz1p/cmsimple2_4/1instrukcje_pdf/ONP%20-%20prezentacja.pdf

Błąd a niepewność

- **Błąd pomiaru** definiujemy jako odchylenie wyniku pomiaru od wielkości rzeczywistej x_0 (której w praktyce nie znamy!):
 - błąd bezwzględny: $\Delta = x - x_0$
 - błąd względny: $\delta = \frac{\Delta}{x_0}$
- **Niepewność pomiarowa** – charakteryzuje rozrzut wartości, które można przypisać wielkości mierzonej – nigdy nie można jej wyeliminować
- **Niepewność standardowa:** $u(x), u(v), u(\text{stężenie NaCl})$
 - niepewność wyrażona w formie odchylenia standardowego średniej (estymator wariancji)
 - obliczana na dwa sposoby: **typ A, typ B** (następny slajd)
 - niepewność std. względna: $u_r(x) = \frac{u(x)}{x} \cdot 100\%$

Typy niepewności pomiarowych

- **Niepewność typu A** – metoda obliczania niepewności standardowej przy pomocy statystycznego opracowania danych (np. analiza serii niezależnych pomiarów, metoda najmniejszych kwadratów dopasowania do danych)
 - niepewność typu A można utożsamiać z **błędem statystycznym**
- **Niepewność typu B** – metoda obliczania niepewności standardowej przy pomocy innych sposobów niż statystyczne opracowanie danych (czyli na drodze innej niż typ A) (subiektywny osąd eksperymentatora – np. informacje o wykorzystanym przyrządzie, czy badanym materiale).
 - niepewność typu B można utożsamiać z **błędem systematycznym**
 - służy ona również do określania niepewności w sytuacji, gdy dysponujemy tylko **jednym pomiarem**

Niepewność typu A - przykład

- **Niepewność typu A** – obliczanie niepewności standardowej przy pomocy statystycznej analizy serii niezależnych pomiarów
- n pomiarów wielkości fizycznej X (x_1, x_2, \dots, x_n) – analogia do pobrania n-elementowej próby losowej z nieskończonego zbioru wszystkich możliwych pomiarów

- Założenia:

- jednakowe prawdopodobieństwo występowania wyników mniejszych i większych od średniej
- mniejsze prawdopodobieństwo występowania wyników o większym odchyleniu od średniej

- Efekt:

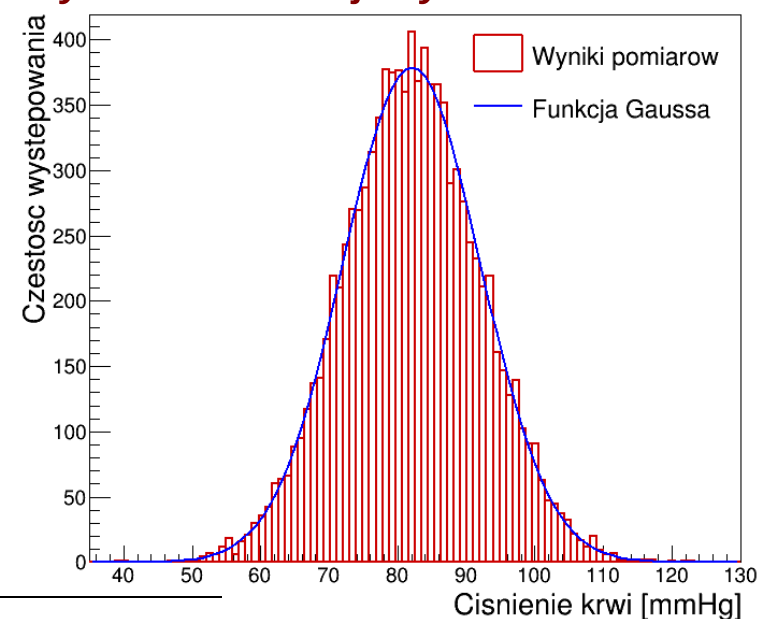
- rozkład dla dużej liczby pomiarów dąży do **rozkładu Gaussa**

- **wynik:** średnia arytmetyczna

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- **niepewność:** odchylenie standardowe średniej

$$u(x) \equiv s_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n(n-1)} (x_i - \bar{x})^2}$$



Niepewność typu B – przykład

- **Niepewność typu B** – obliczana na drodze innej niż metoda A.

Przykład:

- tylko jeden pomiar wielkości mierzonej
- urządzenie pomiarowe jest mało dokładne (np. mierzymy grubość płytki linijką zamiast śrubą mikrometryczną) – wyniki nie wykazują rozrzutu
- Obliczanie niepewności typu B oparte jest o naukowy osąd eksperymentatora – bierzemy pod uwagę wiedzę o przyrządach (wzorcowanie), badanym materiale, itp.
- Założenie:
 - prawdopodobieństwo uzyskania pomiaru mieszczącego się w przedziale wyznaczonym przez wynik i (znaną) niepewność wzorcowania Δx jest jednakowe
- Efekt:
 - rozkład pomiarów jest **rozkładem jednostajnym**
 - **wynik:** jedna wartość (jeden pomiar)
 - **niepewność:** odchylenie standardowe wartości oczekiwanej

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

Prawo dodawania niepewności

- W przypadku pomiarów najczęściej mamy do czynienia jednocześnie z niepewnościami typu A i typu B.
- Całkowita niepewność obliczamy z prawa dodawania dyspersji (wariancji):

$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_e)^2}{3}}$$

Niep. typu A Niep. typu B

Pomiary pośrednie

- Pomiary pośrednie to pomiary wielkości fizycznej dokonywane poprzez bezpośrednie pomiary innych wielkości fizycznych, z którymi dana wielkość jest związana prawem fizycznym.

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Przykład – prawo Ohma: $R = \frac{U}{I}$ $R = f(U, I); z = R; U = x_1; I = x_2$
- Przypadek ogólny:
 - założenie: wielkości mierzone bezpośrednio są **nieskorelowane**
 - mamy k serii pomiarowych wielkości mierzonych bezpośrednio: x_1, x_2, \dots, x_k
 - obliczamy średnie \bar{x}_i i niepewności $u(x_i)$
 - obliczamy wynik: $\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$
 - obliczamy niepewność złożoną: $u_c(z) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j} \right)^2 u^2(x_j)}$
 - dla prawa Ohma: $u_c(R) = \sqrt{\left(\frac{1}{I} \right)^2 u^2(U) + \left(\frac{U}{I^2} \right)^2 u^2(I)}$

Niepewność rozszerzona

- Niepewność standardowa określa przedział wokół wyniku \bar{x} , dla którego prawdopodobieństwo znalezienia wartości prawdziwej wynosi:
 - dla niepewności typu A: 68%
 - dla niepewności typu B: 58%
- **Niepewność rozszerzona** $U(x)$ lub $U_c(x)$ określa przedział, który obejmuje **przeważającą większość** pomiarów (więcej niż niepewność standardowa):
 - **definicja:** $U(x) = k \cdot u(x)$, $U_c(x) = k \cdot u_c(x)$
 - gdzie k to **współczynnik rozszerzenia** (z przedziału od 2 do 3)
 - najczęściej: $k = 2$
 - prawdopodobieństwa (dla $k=2$):
 - niepewność typu A: 95%
 - niepewność typu B: 100%

Zapis wyniku pomiaru

- Wynik pomiaru **zawsze** należy podać wraz z niepewnością.
- Obie wielkości podajemy **wraz z jednostką**.
- Obowiązuje zasada zapisu z **2 cyframi znaczącymi** – niepewność zaokrąglamy do 2 cyfr znaczących
- Dokładność wyniku pomiaru określona jest przez zapis niepewności:

- przykład zapisu wyniku i niepewności standardowej:

$$t = 21,364 \text{ s}, u(t) = 0,023 \text{ s}$$

$$t = 21,364 (23) \text{ s} \quad \text{- zapis zalecany}$$

$$t = 21,364 (0,023) \text{ s}$$

- przykład zapisu wyniku i niepewności rozszerzonej ($k=2$):

$$t = 21,364 \text{ s}, U(t) = 0,046 \text{ s} (k=2), n=11 \quad \text{- opcjonalnie}$$

$$t = (21,364 \pm 0.046) \text{ s} \quad \text{- dopiero przy niep. rozszerzonej można stosować znak } \pm$$

Przykład 1 - pomiar bezpośredni

- Mierzymy przy pomocy suwmiarki bok pręta d o przekroju kwadratowym

<http://www.kreocen.pl/img/p/1057776/1/TESA-Suwmiarka-STANDARD-005-mm.jpg>
http://www.drut.com.pl/images/com_sobi2/gallery/69/69_image_1_bml.jpg

- Dokładność suwmiarki (niepewność wzorcowania):



$$\Delta d = 0,1 \text{ mm}$$

- Seria pomiarów (w mm): 12,5; 12,3; 12,6; 12,5; 12,6; 12,5; 12,4; 12,3; 12,5; 12,4; 12,6

- Wynik (średnia arytmetyczna): $\bar{d} = 12,4727 \text{ mm}$

- Niepewność typu B: $u_B(d) = \frac{\Delta d}{\sqrt{3}} = 0,057735 \text{ mm}$

- Niepewność typu A: $u_A(d) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n(n-1)} (d_i - \bar{d})^2} = 0,033278 \text{ mm}$

- Niepewność całkowita:

$$u(d) = \sqrt{u_A^2(d) + u_B^2(d)} = 0,06639 \text{ mm} \approx 0,066 \text{ mm}$$

- Wynik: $d = 12,473(66) \text{ mm}$ lub (niep. rozszerzona): $d = 12,47 \text{ mm}$, $U(d) = 0,20 \text{ mm}$
 $k = 3, n = 11$

Przykład 2 - pomiar pośredni

- Wyznaczymy wartość przyspieszenia ziemskiego g poprzez pomiar czasu spadku ciała z pewnej wysokości

Famous Apples

<https://hikingartist.files.wordpress.com/2011/10/famous-apples-steve-jobs.jpg>

- Wysokość spadku mierzyliśmy taśmą mierniczą (dokładność $\Delta h = 1 \text{ mm}$) i za każdym razem uzyskaliśmy ten sam wynik:

$$h = 1270 \text{ mm} = 1,27 \text{ m}$$

- Niepewność pomiaru wysokości:

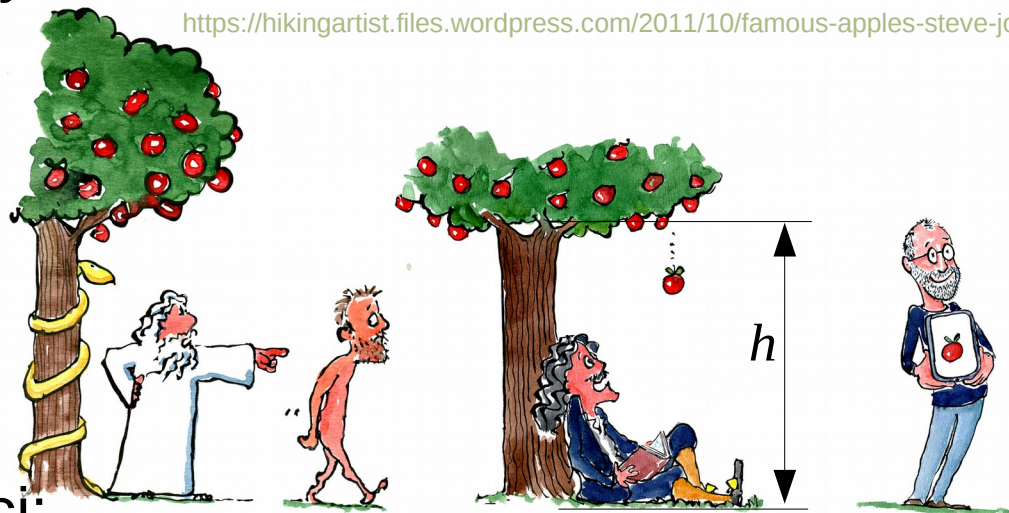
$$u(h) = u_B(h) = \frac{\Delta h}{\sqrt{3}} = 0,577 \text{ mm} \approx 0,00058 \text{ m}$$

- Czas spadku mierzyliśmy stoperem (dokładność $0,001 \text{ s}$):

$$t_1 = 0,509 \text{ s}, t_2 = 0,512 \text{ s}, t_3 = 0,510 \text{ s}, t_4 = 0,504 \text{ s}, t_5 = 0,501 \text{ s}$$

- Niepewność związana z wyborem chwili włączenia i wyłączenia oszacowano na $0,01 \text{ s}$ (czyli 10 ms)

- Średni czas: $\bar{t} = 0,5072 \text{ s}$



Adam

Isaac Newton

Steve Jobs

By Frits Ahlefeldt

Niepewność dokładności stopera można **zaniedbać** (10x mniejsza!)

Przykład 2 - pomiar pośredni

- Niepewność pom. czasu typu A: $u_A(t) = 2,035 \text{ s}$
- Niepewność pom. czasu typu B: $u_B(t) = \frac{\Delta t_e}{\sqrt{3}} = \frac{10 \text{ ms}}{\sqrt{3}} = 5,7735 \text{ ms}$
- Niepewność całkowita pomiaru czasu:

$$u(t) = \sqrt{u_A^2(t) + u_B^2(t)} = 6,122 \text{ ms} \approx 0,0061 \text{ s}$$

Niepewność dokładności stopera można **zaniedbać** (10x mniejsza!)

- Wynik pomiaru czasu spadku: $t = 0,5072(61) \text{ s}$
- Wyznaczamy przyspieszenie grawitacyjne: $g = \frac{2h}{t^2}$
- Obliczamy niepewność złożoną:

$$u_c(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2 u^2(h) + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 u^2(t)} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\right)^2 u^2(h) + \left(-\frac{4h}{t^3}\right)^2 u^2(t)} = 0,237 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Ostateczny wynik:

$$g = 9,87(24) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

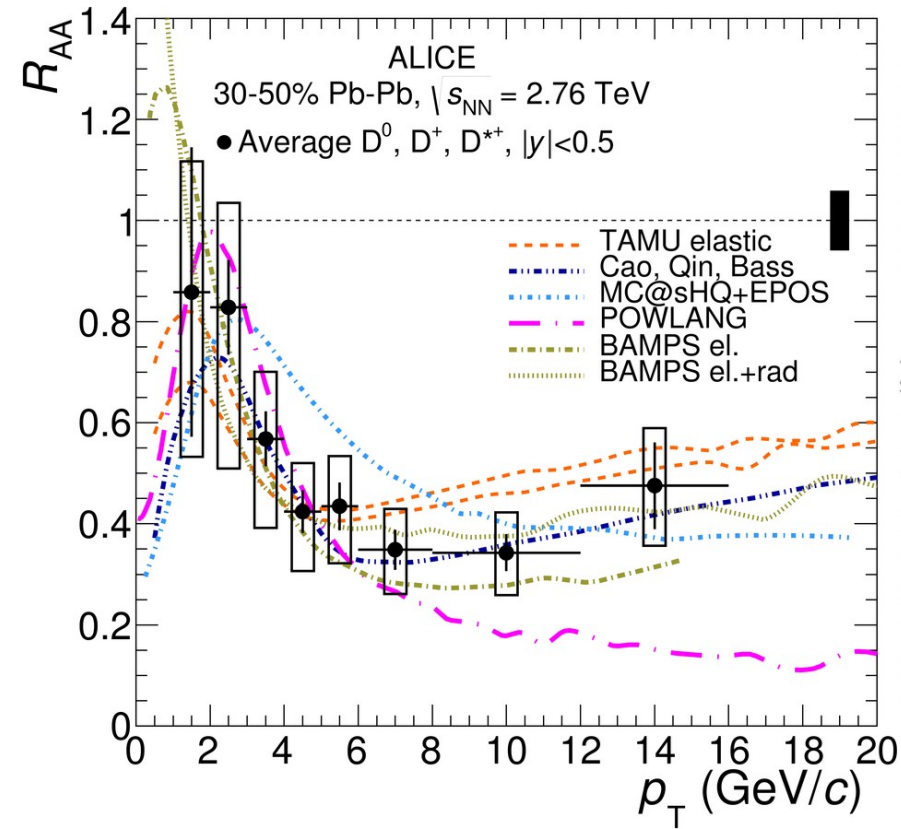
$$g = (9,87 \pm 0,48) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Zasady sporządzania wykresów

- Osie wykresu oznaczamy symbolem lub nazwą mierzonej wielkości wraz z jednostką
- Osie muszą zaczynać się przed pierwszym i kończyć za ostatnim punktem pomiarowym (nie muszą się zaczynać od 0)
- Podziałki na osiach muszą być wyraźnie zaznaczone
- Punkty pomiarowe muszą być wyraźnie rozróżnialne od krzywych teoretycznych
- Jeśli mamy wiele serii danych, stosujemy nie tylko **kolory**, ale również **różne symbole** (otwarte i zamknięte, kółka, kwadraty, itp.) i typy linii (ciągła, przerywana, itp.)
 - serie danych powinno dać się rozróżnić na wydruku czarnobiałym
- Odkładamy niepewności pomiarowe zarówno na osi X jak i na osi Y (np. jeśli wartość niepewności wynosi a , to odkładamy pionową kreskę o wysokości $2a$ i środkiem w wartości punktu)

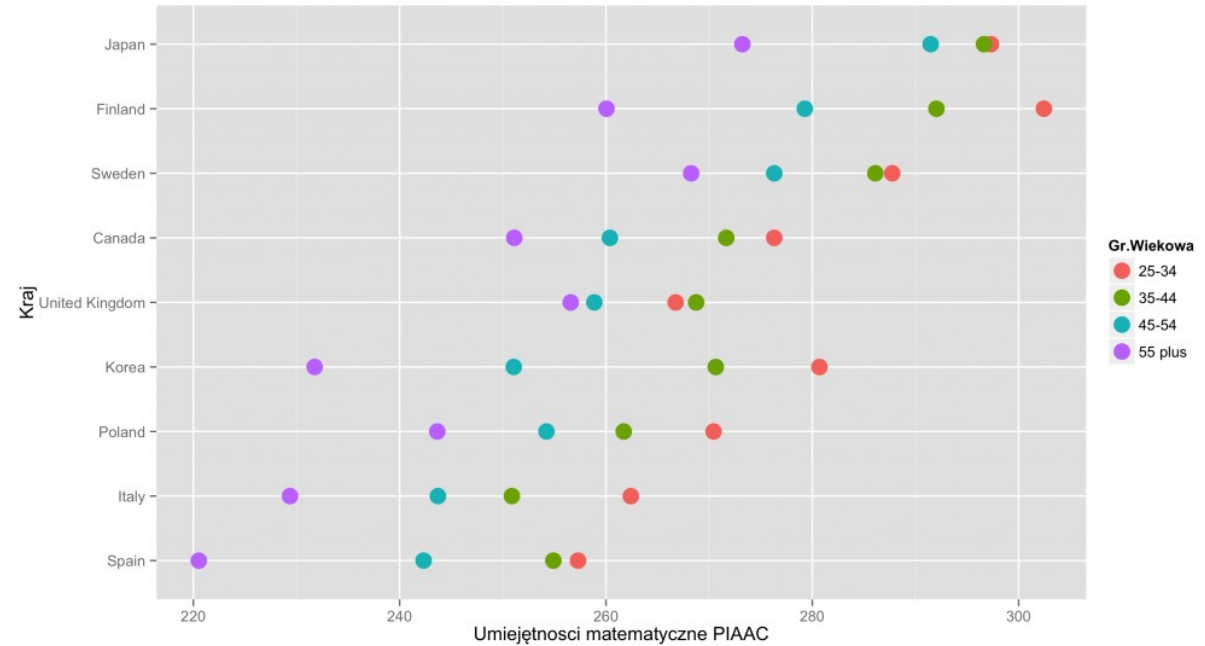
Przykłady wykresów

http://aliceinfo.cern.ch/ArtSubmission/sites/aliceinfo.cern.ch.ArtSubmission/files/papers/1868/AverageDmesonRaavspT_3050_Models_transport-11888.png



Wykres poprawny

<http://smarterpoland.pl/wp-content/uploads/2014/09/fig1-1024x558.png>



Wykres niepoprawny



KONIEC

**Do zimy 2011 w laboratoriach
Wydziału Fizyki Politechniki Warszawskiej
obowiązywały stare zasady rachunku błędów...**

Z wykładu dr inż. H. Zbroszczyk (poprzednie lata)

Dotychczasowa klasyfikacja niepewności pomiarowych

Rodzaje błędów pomiarowych:

- błędy grube, tzw. pomyłki, które należy wyeliminować (np. wykonujemy serię pomiarową 1000 zliczeń rozpadu danego pierwiastka, faktycznie zostało zmierzone 999 zliczeń)
- niepewności przypadkowe, związane z mierzoną wielkością lub samą metodą pomiaru: eksperymentatorem wraz z otoczeniem lub przyrządem, jakim mierzymy (np. pomiar średnicy pręta ołowianego: niepewność systematyczna obiektu wynikać może z różnicami średnicy w różnych miejscach pręta, niepewność systematyczne metody: różnice w dociskaniu śruby mikrometrycznej); związane z wieloma niezależnymi od siebie przyczynami, ich cecha charakterystyczną jest to, że układają się one symetrycznie wokół wartości rzeczywistej
- niepewności systematyczne, których źródłem są ograniczone możliwości pomiarowe związane np. z klasą użytego przyrządu oraz możliwością odczytu jego wskazań przez eksperymentatora.

Prezentacja wyników pomiaru

- Bezwzględna niepewność pomiarowa Δx określa o ile wynik pomiaru x może różnić się od wartości rzeczywistej x_0 : $|x - x_0| \leq \Delta x$

Zapis ten oznacza, że nie znamy wartości rzeczywistej, ale zakładamy, że mieści się ona w przedziale: $(x - \Delta x) \leq x_0 \leq (x + \Delta x)$

Wynik końcowy zapisujemy jako: $x_0 = x \pm \Delta x$

- Niepewność względna pomiaru to stosunek wartości niepewności bezwzględnej do wartości otrzymanego wyniku, wyrażony w procentach: $\Delta x_{\text{wzgl}} = (\Delta x / x) * 100\%$

Niepewności pomiarowe

Pomiary wielkości fizycznych oraz szacowanie ich niepewności zasadniczo można podzielić na 3 kategorie:

- 1) przewaga niepewności systematycznych nad przypadkowymi,
- 2) przewaga niepewności przypadkowych nad systematycznymi,
- 3) niepewności przypadkowe są porównywalne z systematycznymi.

W każdej z tych kategorii dodatkowo należy rozważyć przypadki, kiedy:

- pomiar mierzonej wielkości następuje **bezpośrednio**
(np. pomiar średnicy pręta śrubą mikrometryczną),
- pomiar mierzonej wielkości następuje **pośrednio**
(np. wyznaczenie objętości ołowianej kulki poprzez pomiar jej średnicy).

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

1) Pomiar bezpośredni

Na wielkość niepewności systematycznej składają się:

- użyty przyrząd (klasa przyrządu): np. pomiar napięcia woltomierzem analogowym na zakresie 300V, klasa miernika to 1%: błąd związany z przyrządem wynosi $\Delta V_1 = 300V * 1\% = 3V$

- wykonanie czynności pomiarowej przez eksperymentatora: jeśli niepewność wychylenia się wskazówki w mierniku ocenimy na 1V, to całkowita niepewność pomiaru wyniesie $\Delta V = 4V$

Oba przyczynki nie kompensują się, lecz dodają z jednakowymi znakami.

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

2a) Pomiar pośredni – metoda różniczki zupełnej

Przypadek ten dotyczy większości pomiarów, gdzie niepewności systematyczne dominują nad przypadkowymi: np. pomiar objętości walca poprzez pomiar jego wysokości oraz średnicy podstawy.

Na przykładzie funkcji jednej zmiennej:

Chcemy obliczyć zmianę ΔY funkcji $f(x)$ przy zmianie jej argumentu Δx

$$Y \pm \Delta Y = f(x \pm \Delta x)$$

Rozwijając w szereg Taylora mamy oraz zanedbując wyrazy, gdzie Δx występuje w potęgze wyższa niż 1:

$$Y \pm \Delta Y = f(x) \pm \Delta x \frac{df(x)}{dx}$$

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

Ponieważ:

$$Y = f(x)$$

$$\Delta Y = \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \Delta x$$

Bezwzględna niepewność wielkości będącej funkcją jednej zmiennej (której wartość mierzymy) równa jest bezwzględnej niepewności wielkości mierzonej pomnożonej przez pochodną funkcji.

Uogólniając ten przypadek na funkcję wielu zmiennych $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\Delta Y = \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right| \Delta x_n$$

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

2a) Pomiar pośredni – metoda różniczki zupełnej - przykład

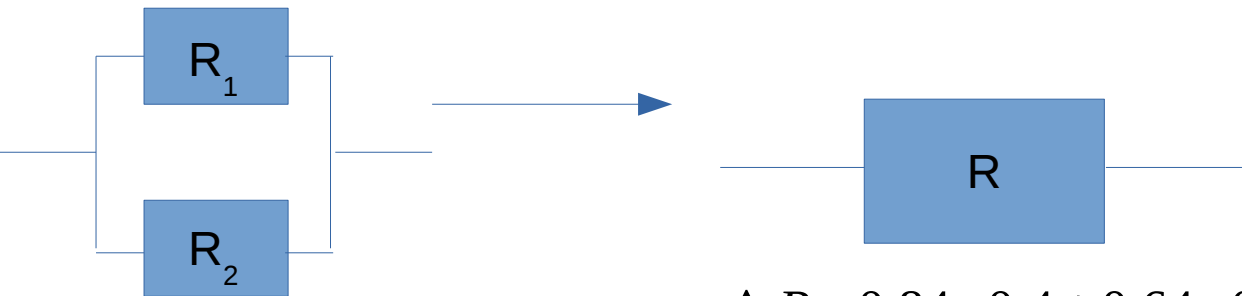
Mamy 2 równolegle połączone oporniki R_1 oraz R_2 . Błąd wyznaczenia oporności każdego z nich wynosi 10%. Wyznaczyć wartość oporu zastępczego.

$$R_1 = 40 \Omega, R_2 = 60 \Omega, \Delta R_1 = 0,4 \Omega, \Delta R_2 = 0,6 \Omega$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 24 \Omega \quad \Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial R_1} \right| \Delta R_1 + \left| \frac{\partial R}{\partial R_2} \right| \Delta R_2$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2(R_1 + R_2) + R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1(R_1 + R_2) + R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$



$$\Delta R = 0,84 * 0,4 + 0,64 * 0,6 [\Omega] = 0,72 \Omega$$

$$R = (24,0 \pm 0,7) \Omega$$

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

2a) Pomiar pośredni – metoda różniczki logarytmicznej

W przypadku, kiedy funkcja $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ma postać iloczynową, wygodniej jest stosować tę metodę.

$$Y = A x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

Po zlogarytmowaniu:

$$\ln Y = \ln A + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \dots + a_n \ln x_n$$

Różniczka:

$$\frac{dY}{Y} = a_1 \frac{dx_1}{x_1} + a_2 \frac{dx_2}{x_2} + \dots + a_n \frac{dx_n}{x_n}$$

$$\left| \frac{\Delta Y}{Y} \right| = \sum |a_i \frac{\Delta x_i}{x_i}|$$

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

$$Y = A x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

$$\left| \frac{\Delta Y}{Y} \right| = \sum \left| a_i \frac{\Delta x_i}{x_i} \right|$$

Przykład: wyznaczenie oporności opornika, na którym zmierzono spadek napięcia U oraz przez który przepłynął prąd stały o natężeniu I

$$U = (31,07 \pm 0,52) \text{ V}$$

$$I = (2,01 \pm 0,07) \text{ A}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{31,07}{2,01} \text{ V/A} = 15,46 \Omega$$

$$\left| \frac{\Delta R}{R} \right| = \left| \frac{\Delta U}{U} \right| + \left| \frac{-\Delta I}{I} \right| = 0,0167 + 0,0348 = 0,0515$$

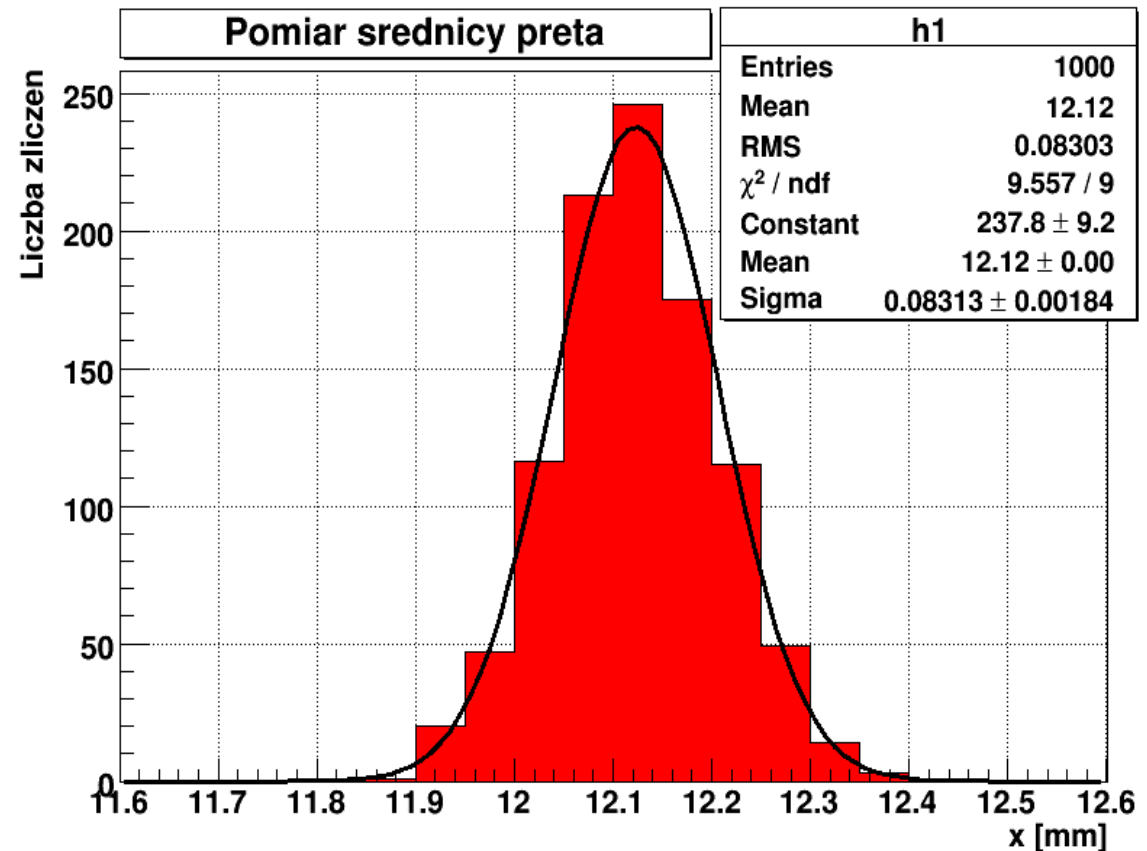
$$R = (15,4 \pm 0,8) \Omega$$



Niepewności przypadkowe (duże w porównaniu z systematycznymi)

1) Pomiar bezpośredni

Przykład: została zmierzona $n=1000$ razy grubość ołowianego pręta za pomocą śruby mikrometrycznej (niepewność systematyczna od śruby to $\Delta x = 0,01$ mm).



Wyniki zestawiono na histogramie, gdzie szerokość jednego przedziału wynosi $\Delta x = 0,05$ mm. Rysujemy rozkład częstości, a następnie dopasowujemy rozkład Gaussa, charakteryzujący się parametrami: wartością średnią a oraz odchyleniem standardowym σ .

Niepewności przypadkowe (duże w porównaniu z systematycznymi)

Średnia arytmetyczna:

$$m = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

Średni błąd kwadratowy średniej:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

Wartości $\bar{x} \pm S_{\bar{x}}$ określają przedział, w jakim z prawdopodobieństwem 68% należy oczekiwać wartości rzeczywistej. Wzięcie przedziału równego $\bar{x} \pm 2S_{\bar{x}}$ lub $\bar{x} \pm 3S_{\bar{x}}$ spowoduje wzrost tego prawdopodobieństwa do 95,4% oraz 99,7%.
W praktyce podajemy wynik na poziomie 1 odchylenia standardowego.

Niepewności przypadkowe (duże w porównaniu z systematycznymi)

2) Pomiar pośredni

Założmy, że przedmiotem pomiaru jest wielkość $Z=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Mierzone bezpośrednio są wielkości X_1, X_2, \dots, X_n
wraz z ich niepewnościami: $S_{\bar{X}_1}, S_{\bar{X}_2}, \dots, S_{\bar{X}_n}$

Można wykazać, że $\bar{Z} = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$

A także:
$$S_{\bar{Z}} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \bigg|_{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n} \right)^2 S_{\bar{X}_i}^2}$$

Przykład: Zmierzona została długość ołowianego pręta: $\bar{l} \pm S_{\bar{l}} = (1,05 \pm 0,11) \text{ cm}$

Celem jest wyznaczenie objętości tego pręta. Zmierzono także średnice,
otrzymano wynik: $\bar{d} \pm S_{\bar{d}} = (5,02 \pm 0,12) \text{ cm}$

Objętość: $V = \pi (\bar{d}/2)^2 \bar{l} = 20,78 \text{ cm}^3$

Błąd:
$$S_{\bar{V}} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f(\bar{l}, \bar{d})}{\partial \bar{l}} \right)^2 s_{\bar{l}}^2 + \left(\frac{\partial f(\bar{l}, \bar{d})}{\partial \bar{d}} \right)^2 s_{\bar{d}}^2} = 2,39 \text{ cm}^3 \quad V = (20,8 \pm 2,4) \text{ cm}^3$$