Komputerowa analiza danych doświadczalnych

Wykład 1
26.02.2016

dr inż. Łukasz Graczykowski
lgraczyk@if.pw.edu.pl

Semestr letni 2015/2016

Prowadzący przedmiot

- **Wykład:**
  - dr inż. Łukasz Graczykowski
    Zakład Fizyki Jądrowej
    pok. 117D, Gmach Fizyki
    lgraczyk@if.pw.edu.pl
- **Laboratoria:**
  - dr inż. Łukasz Graczykowski – ROOT
  - mgr inż. Tobiasz Czopowicz – ROOT
  - mgr inż. Andrzej Lipiec – ROOT
  - mgr inż. Tomasz Sobiech – Matlab
- **Strona przedmiotu:**
  - http://www.if.pw.edu.pl/~lgraczyk/wiki/index.php/KADD_2015/2016
- **Konsultacje:** wtorki 14-16, 117D GF

Sprawy organizacyjne

- **Organizacja zajęć:**
  - wykłady: 1h w tygodniu (15h w semestrze)
  - laboratoria: 2h w tygodniu (30h w semestrze)
- **Laboratoria:**
  - 15 zajęć: 1 wstępne, 11 punktowanych, 2 kolokwia, 1 dodatkowe
  - prowadzone w środowisku ROOT lub Matlab
  - zajęcia trwają 90 minut (bez przerwy)
  - spóźnienie powyżej 15 minut – nieobecność
- **Wykłady:**
  - piątki 12:15-13:00, s. 306 Gmach Główny
  - http://www.if.pw.edu.pl/~lgraczyk/wiki/index.php/KADD_2015/2016

Warunki zaliczenia (1)

- **Laboratorium:**
  - 11 punktowanych zadań o zróżnicowanym stopniu trudności (**0-5 pkt**)
  - dopuszczenie do wykonania zadania może być warunkowane zaliczeniem kolokwium wstępnego (“wejściówki”)
  - w trakcie pisania programu <u>można</u> korzystać z **własnych** programów i zasobów Internetu*
  - program **w pełni** dokończony w domu: **+1 pkt**, ale **max 4 pkt**

*) nie wolno korzystać z programów pocztowych (chyba, że prowadzący wyrazi zgodę), komunikatorów internetowych, serwisów społecznościowych (w celu komunikacji z innymi użytkownikami), ani z programów kolegów z grupy swojej, jak i żadnej innej; korzystanie z telefonów komórkowych (smartfonów, tabletów) jest także zabronione.

Warunki zaliczenia (2)

- **Nieobecności na laboratorium:**
  - nieobecność nieusprawiedliwiona: **0 pkt.**
  - nieobecność usprawiedliwiona: **max 4 pkt.**
    konieczność zrealizowania materiału we własnym zakresie i przedstawienia na najpóźniej 2 tygodnie od powrotu (na zajęciach lub konsultacjach)
  - maksymalna liczba nieobecności nieuspr.: **2** (w rzypadku dłuższej nieobecności <u>usprawiedliwionej</u>, np. choroba – warunki zaliczenia ustalane będą indywidualnie)

Warunki zaliczenia (3)

- **Kolokwia na laboratorium:**
  - punktaja: **0-30 pkt** za **każde** kolokwium
  - w trakcie semestru przewidziane są **2 kolokwia**
  - napisanie **3 programów** z materiału zrealizowanego na zajęciach
  - każdy program punktowany **0-10 pkt.**
- **Kolokwium na wykładzie:**
  - punktacja: **0-35 pkt.**
  - kolokwium z wiedzy (pisemne) na wykładzie
- **Zaliczenie kolokwiów: >50% pkt.**
- **Poprawa kolokwium z lab.:**
  - możliwa jednokrotnie, wynik poprawy **zastępuje** wynik regularny
  - tylko na ostatnich (15) zajęciach, **max 24 pkt.** (8 pkt. za program)

Warunki zaliczenia (4)

- **Punktacja:**
  - maksymalna ilość punktów: **150**
    - laboratoria: **11*5 = 55**
    - kolokwia (lab.): **2*30 = 60**
    - kolokwium (wykł.): **1*35 = 35**
- **Zaliczenie (procent sumy punktów):**
  - >50% - 3 (75,5 pkt. – 90,0 pkt.)
  - >60% - 3,5 (90,5 pkt. – 105,0 pkt.)
  - >70% - 4 (105,0 pkt. – 120,0 pkt.)
  - >80% - 4,5 (120,5 pkt. – 135,0 pkt.)
  - >90% - 5 (135,5 pkt. – 150,0 pkt.)
- **Uwaga! Do zaliczenia przedmiotu konieczne jest zaliczenie (>50% punktów) <u>wszystkich</u> kolokwiów**

Literatura

1. **S. Brand, “Analiza danych: metody statystyczne i obliczeniowe”, PWN, Warszawa (1998)**
2. R. Nowak, “Statystyka dla fizyków”, PWN, Warszawa (2002)
3. W.T.Eadie, D.Drijard, F.E.James, M.Ross, B.Sadoulet, “Metody statystyczne w fizyce doświadczalnej”, PWN, Warszawa (1989)
4. A.Plucińska, E.Pluciński, “Elementy probabilistyki”, PWN, Warszawa (1979)
5. Przykładowe programy i dokumentacja środowiska ROOT i Matlab

Program wykładu

1. Pomiary w eksperymentach fizycznych (przypomnienie z rachunku niepewności).
2. Zmienne losowe i ich rozkłady (1D, 2D, nD).
3. Elementy metody Monte Carlo, generacja liczb pseudolosowych za pomocą komputera.
4. Podstawowe rozkłady statystyczne (dyskretne i ciągłe; centralne twierdzenie graniczne).
5. Pomiar jako pobieranie próby. Estymatory.
6. Metoda największej wiarygodności.
7. Weryfikacja hipotez statystycznych (m. in. test χ^2)
8. Metoda najmniejszych kwadratów (przypadek liniowy, wielomianowy, ...)
9. Zagadnienie minimalizacji i optymalizacji.

Po co nam to wszystko?

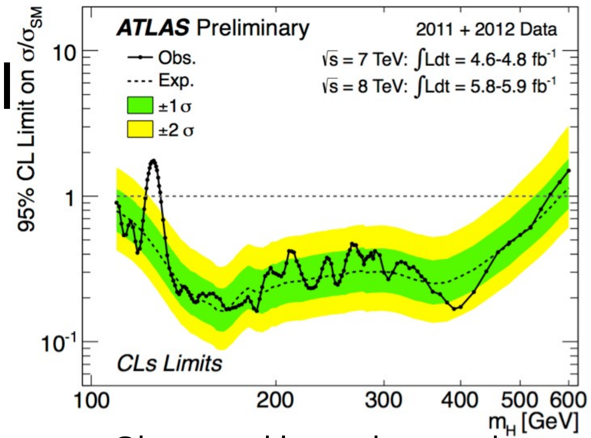
1. Poprawne opracowanie danych jest niezbędne niemal we wszystkich badaniach empirycznych.

2. Metody analizy danych są w zasadzie bardzo zbliżone niezależnie od dziedziny (fizyka, elektronika, dane medyczne, bankowe itp.)

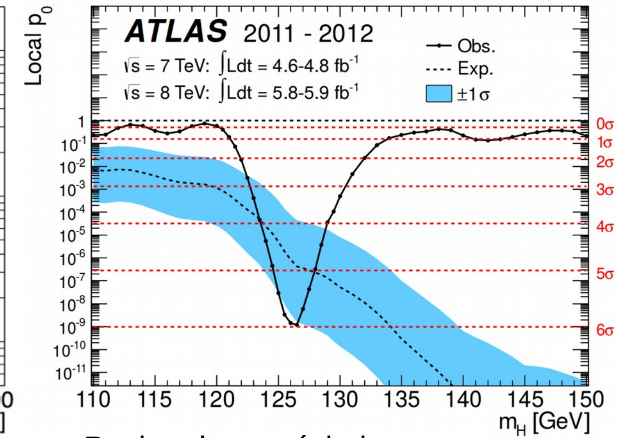
3. Umiejętność czytania i <u>rozumienia</u> publikacji naukowych.

4. Umiejętność przedstawiania danych i wyników ich analizy (**wykresy**).

Phys.Lett. B716 (2012) 1-29

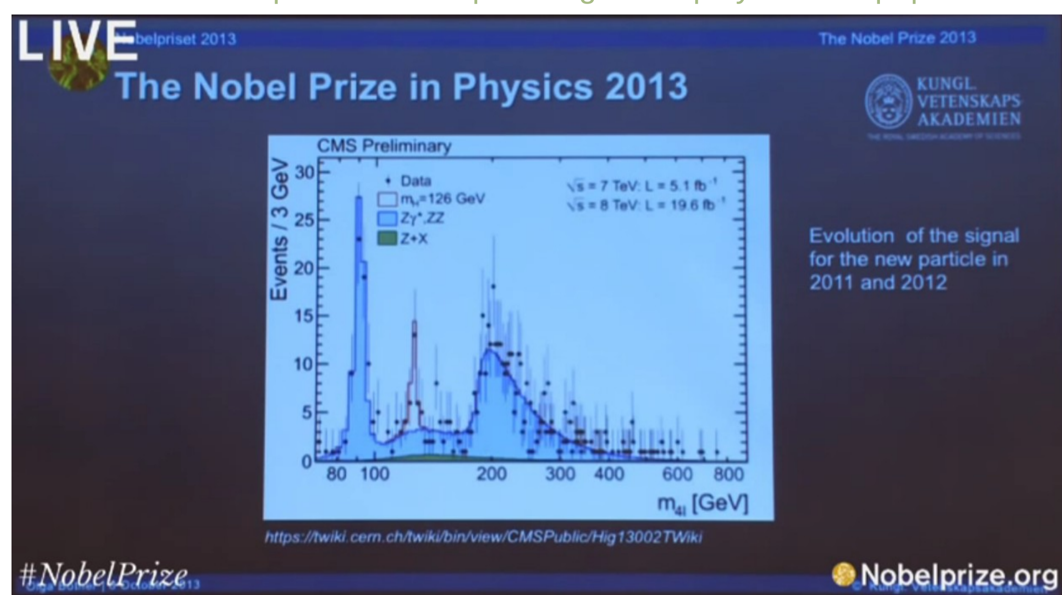


Obszar wykluczenia masy bozonu Higgsa na poziomie ufności 95% (poniżej 1)



Poziom istotności obserwowanego sygnału bozonu Higgsa.

http://www.nobelprize.org/mediaplayer/index.php?id=1954

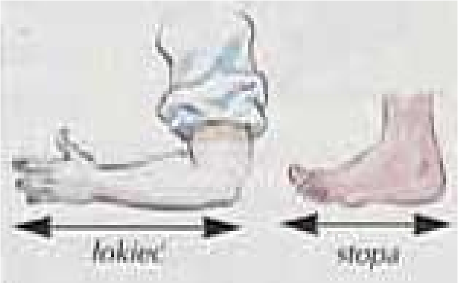


No to zaczynamy :)

Pomiar w eksperymencie fizycznym, niepewności pomiarowe – przypomnienie

Pomiar

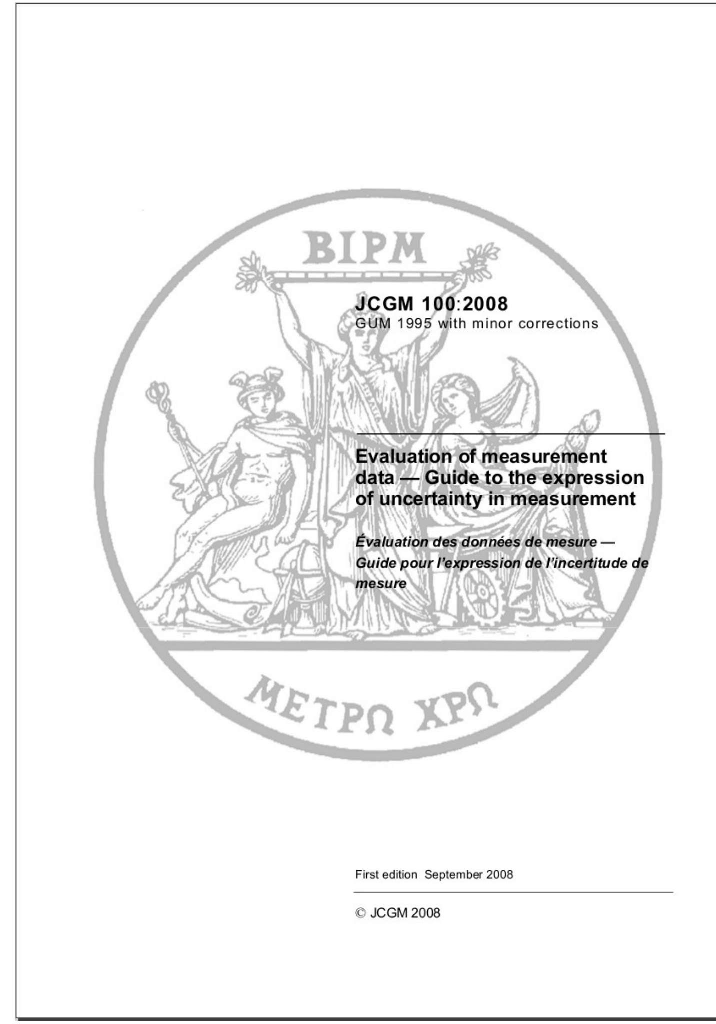
- **Pomiar** jest podstawowym źródłem informacji o świecie, w którym żyjemy. Proces pomiaru polega na porównaniu pewnej wielkości fizycznej ze wzorcem, przyjętym za **jednostkę** danej wielkości. **Każdy pomiar** jest przeprowadzony z pewną **dokładnością**.
- Prawidłowo przeprowadzony pomiar zawiera:
  - **jednostkę** w jakiej wyrażona jest wielkość (np. metry, ampery, dżule)
  - **wartość liczbową**, czyli wynik pomiaru w przyjętych jednostkach
  - **niepewność pomiarową** uzyskanej wielkości



http://fizyka.net.pl/ciekawostki/grafika/miara1.jpg

Jak mierzyć niepewności?

- Normy i sposób określania niepewności pomiarowych oraz ich terminologii zawarte są w przewodniku **“Guide to the expression of uncertainty in measurements” (GUM)** wydanym w 1995 roku przez Międzynarodową Organizację Standaryzacyjną (ISO).
- Polska wersja normy ISO została wydana przez Główny Urząd Miar w 1999 roku pt. **“Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik”**.
- W laboratoriach Wydziału Fizyki posługujemy się tym sposobem określania niepewności pomiarowych.



www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

Na podstawie prezentacji A. Kubiaczyka (Lab. Fiz. I teren płd.)
http://www.if.pw.edu.pl/~labfiz1p/cmsimple2_4/1instrukcje_pdf/ONP%20-%20prezentacja.pdf

Błąd a niepewność

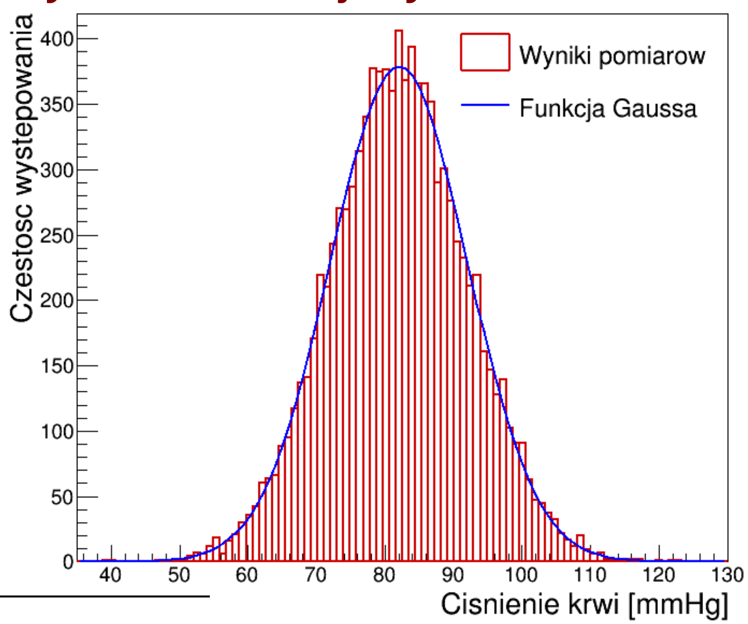
- **Błąd pomiaru** definiujemy jako odchylenie wyniku pomiaru od wielkości rzeczywistej x_0 (**której w praktyce nie znamy!**):
  - błąd bezwzględny: $\Delta = x - x_0$
  - błąd względny: $\delta = \frac{\Delta}{x_0}$
- **Niepewność pomiarowa** – charakteryzuje rozrzut wartości, które można przypisać wielkości mierzonej – nigdy nie można jej wyeliminować
- **Niepewność standardowa:** $u(x), u(v), u(stężenie\ NaCl)$
  - niepewność wyrażona w formie odchylenia standardowego średniej (estymator wariancji)
  - obliczana na dwa sposoby: **typ A**, **typ B** (następny slajd)
  - niepewność std. względna: $u_r(x) = \frac{u(x)}{x} \cdot 100\%$

Typy niepewności pomiarowych

- **Niepewność typu A** – metoda obliczania niepewności standardowej przy pomocy statystycznego opracowania danych (np. analiza serii niezależnych pomiarów, metoda najmniejszych kwadratów dopasowania do danych)
  - niepewność typu A można utożsamiać z **błędem statystycznym**
- **Niepewność typu B** – metoda obliczania niepewności standardowej przy pomocy innych sposobów niż statystyczne opracowanie danych (czyli na drodze innej niż typ A) (subiektywny osąd eksperymentantora – np. informacje o wykorzystanym przyrządzie, czy badanym materiale).
  - niepewność typu B można utożsamiać z **błędem systematycznym**
  - służy ona również do określania niepewności w sytuacji, gdy dysponujemy tylko **jednym pomiarem**

Niepewność typu A – przykład

- **Niepewność typu A** – obliczanie niepewności standardowej przy pomocy statystycznej analizy serii niezależnych pomiarów
- n pomiarów wielkości fizycznej X (x_1, x_2, …, x_n) – analogia do pobrania n-elementowej próby losowej z nieskończonego zbioru wszystkich możliwych pomiarów
- Założenia:
  - jednakowe prawdopodobieństwo występowania wyników mniejszych i większych od średniej
  - mniejsze prawdopodobieństwo występowania wyników o większym odchyleniu od średniej
- Efekt:
  - rozkład dla dużej liczby pomiarów dąży do **rozkładu Gaussa**
  - **wynik:** średnia arytmetyczna $$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
  - **niepewność:** odchylenie standardowe średniej $$u(x)\equiv s_{\bar{x}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n(n-1)}(x_i-\bar{x})^2}$$



Niepewność typu B – przykład

- **Niepewność typu B** – obliczana na drodze innej niż metoda A.
  Przykład:
  - tylko jeden pomiar wielkości mierzonej
  - urządzenie pomiarowe jest mało dokładne (np. mierzymy grubość płytki linijką zamiast śrubą mikrometryczną) – wyniki nie wykazują rozrzutu
- Obliczanie niepewności typu B oparte jest o naukowy osąd eksperymentatora – bierzemy pod uwagę wiedzę o przyrządach (wzorcowanie), badanym materiale, itp.
- Założenie:
  - prawdopodobieństwo uzyskania pomiaru mieszczącego się w przedziale wyznaczonym przez wynik i (znaną) niepewność wzorcowania Δx jest jednakowe
- Efekt:
  - rozkład pomiarów jest **rozkładem jednostajnym**
  - **wynik:** jedna wartość (jeden pomiar)
  - **niepewność:** odchylenie standardowe wartości oczekiwanej

$$u(x)=\frac{\Delta x}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

Prawo dodawania niepewności

- W przypadku pomiarów najczęściej mamy do czynienia jednocześnie z niepewnościami typu A i typu B.
- Całkowita niepewność obliczamy z prawa dodawania dyspersji (wariancji):

$$u(x)=\sqrt{\underbrace{s_{\bar{x}}^2}_{\text{Niep. typu A}}+\underbrace{\frac{(\Delta x)^2}{3}+\frac{(\Delta x_e)^2}{3}}_{\text{Niep. typu B}}}$$

Pomiary pośrednie

- Pomiary pośrednie to pomiary wielkości fizycznej dokonywane poprzez bezpośrednie pomiary innych wielkości fizycznych, z którymi dana wielkość jest związana prawem fizycznym.

$$z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Przykład – prawo Ohma: $R=\frac{U}{I}$ $\quad R=f(U, I); z=R; U=x_1; I=x_2$
- Przypadek ogólny:
  - założenie: wielkości mierzone bezpośrednio są **nieskorelowane**
  - mamy k serii pomiarowych wielkości mierzonych bezpośrednio: x_1, x_2, …., x_k
  - obliczamy średnie $\bar{x}_i$ i niepewności $u(x_i)$
  - obliczamy wynik: $\bar{z}=f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$
  - obliczamy niepewność złożoną: $u_c(z)=\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j}\right)^2 u^2(x_j)}$
  - dla prawa Ohma: $u_c(R)=\sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 u^2(U)+\left(\frac{U}{I^2}\right)^2 u^2(I)}$

Niepewność rozszerzona

- Niepewność standardowa określa przedzial wokół wyniku $\bar{x}$, dla którego prawdopodobieństwo znalezienia wartości prawdziwej wynosi:
  - dla niepewności typu A: 68%
  - dla niepewności typu B: 58%
- **Niepewność rozszerzona** U(x) lub U_c(x) określa przedział, który obejmuje **przeważającą większość** pomiarów (więcej niż niepewność standardowa):
  - definicja: $U(x)=k\cdot u(x), U_c(x)=k\cdot u_c(x)$
  - gdzie k to **współczynnik rozszerzenia** (z przedziału od 2 do 3)
  - najczęściej: $k=2$
  - prawdopodobieństwa (dla k=2):
    - niepewność typu A: 95%
    - niepewność typu B: 100%

Zapis wyniku pomiaru

- Wynik pomiaru **zawsze** należy podać wraz z niepewnością.
- Obie wielkości podajemy **wraz z jednostką**.
- Obowiązuje zasada zapisu z **2 cyframi znaczącymi** – niepewność zaokrąglamy do 2 cyfr znaczących
- Dokładność wyniku pomiaru określona jest przez zapis niepewności:
  - przykład zapisu wyniku i niepewności standardowej:

    $t=21{,}364\,s\,,u(t)=0{,}023\,s$

    $\boxed{t=21{,}364(23)\,s}$ - zapis zalecany

    $t=21{,}364(0{,}023)\,s$

  - przykład zapisu wyniku i niepewności rozszerzonej (k=2):

    $t=21{,}364\,s\,,U(t)=0{,}046\,s\boxed{(k=2),n=11}$ - opcjonalnie

    $t=(21{,}364\pm 0.046)\,s$ - dopiero przy niep. rozszerzonej można stosować znak ±

Przykład 1 - pomiar bezpośredni

- Mierzymy przy pomocy suwmiarki bok pręta d o przekroju kwadratowym

http://www.kreocen.pl/img/p/1057776/1/TESA-Suwmiarka-STANDARD-005-mm.jpg
http://www.drut.com.pl/images/com_sobi2/gallery/69/69_image_1_bml.jpg

- Dokładność suwmiarki (niepewność wzorcowania):

$$\Delta d = 0{,}1\,mm$$

- Seria pomiarów (w mm): 12,5; 12,3; 12,6; 12,5; 12,6; 12,5; 12,4; 12,3; 12,5; 12,4; 12;6
- Wynik (średnia arytmetyczna): $\bar{d} = 12{,}4727\,mm$
- Niepewność typu B: $u_B(d) = \frac{\Delta d}{\sqrt{3}} = 0{,}057735\,mm$
- Niepewność typu A:

$$u_A(d) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n-1)} (d_i - \bar{d})^2} = 0{,}033278\,mm$$

- Niepewność całkowita:

$$u(d) = \sqrt{u_A^2(d) + u_B^2(d)} = 0{,}06639\,mm \approx 0{,}066\,mm$$

- Wynik: $d = 12{,}473(66)\,mm$ lub (niep. rozszerzona): $d = 12{,}47\,mm, U(d) = 0{,}20\,mm$

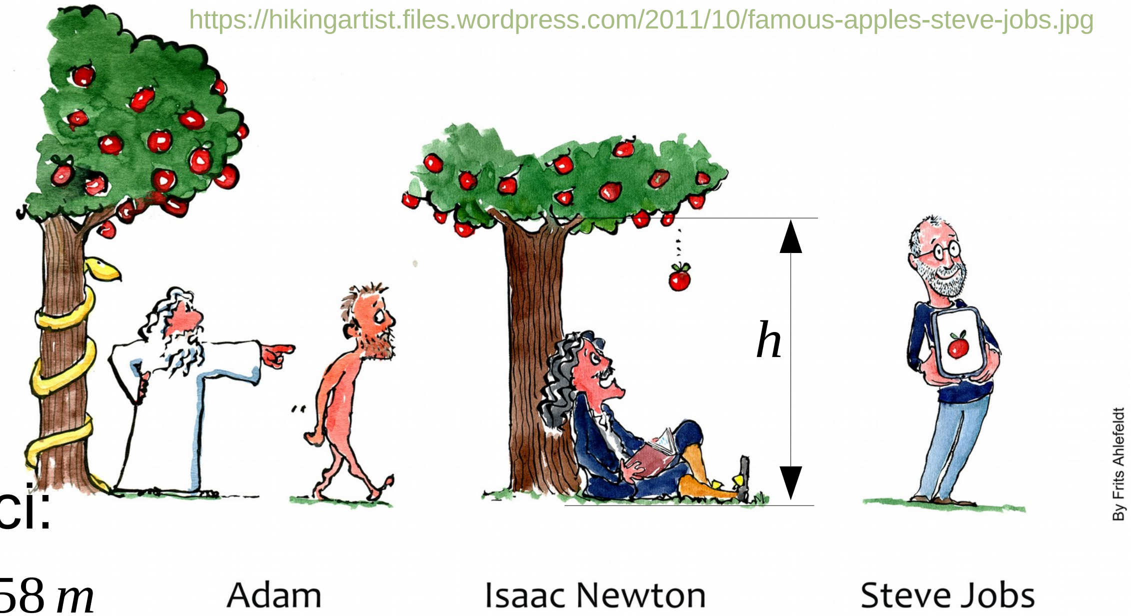
$$k = 3, n = 11$$

Przykład 2 - pomiar pośredni

- Wyznaczamy wartość przyspieszenia ziemskiego g poprzez pomiar czasu spadku ciała z pewnej wysokości

Famous Apples

https://hikingartist.files.wordpress.com/2011/10/famous-apples-steve-jobs.jpg



- Wysokość spadku mierzyliśmy taśmą mierniczą (dokładność $\Delta h = 1\,mm$) i za każdym razem uzyskaliśmy ten sam wynik:

$$h = 1270\,mm = 1{,}27\,m$$

- Niepewność pomiaru wysokości:

$$u(h) = u_B(h) = \frac{\Delta h}{\sqrt{3}} = 0{,}577\,mm \approx 0{,}00058\,m$$

- Czas spadku mierzyliśmy stoperem (dokładność 0,001 s):

$$t_1 = 0{,}509\,s, t_2 = 0{,}512\,s, t_3 = 0{,}510\,s, t_4 = 0{,}504\,s, t_5 = 0{,}501\,s$$

- Niepewność związana z wyborem chwili włączenia i wyłączenia oszacowano na 0,01 s (czyli 10 ms)

- Średni czas: $\bar{t} = 0{,}5072\,s$

Niepewność dokładności stopera można **zaniedbać** (10x mniejsza!)

Przykład 2 - pomiar pośredni

- Niepewność pom. czasu typu A: $u_A(t) = 2{,}035\, s$
- Niepewność pom. czasu typu B: $u_B(t) = \frac{\Delta t_e}{\sqrt{3}} = \frac{10\, ms}{\sqrt{3}} = 5{,}7735\, ms$
- Niepewność całkowita pomiaru czasu:

$$u(t) = \sqrt{u_A^2(t) + u_B^2(t)} = 6{,}122\, ms \approx 0{,}0061\, s$$

Niepewność dokładności stopera można **zaniedbać** (10x mniejsza!)

- Wynik pomiaru czasu spadku: $t = 0{,}5072(61)\, s$
- Wyznaczamy przyspieszenie grawitacyjne: $g = \frac{2h}{t^2}$
- Obliczamy niepewność złożoną:

$$u_c(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2 u^2(h) + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 u^2(t)} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\right)^2 u^2(h) + \left(-\frac{4h}{t^3}\right)^2 u^2(t)} = 0{,}237\, \frac{m}{s^2}$$

- Ostateczny wynik:

$$g = 9{,}87(24)\, \frac{m}{s^2}$$

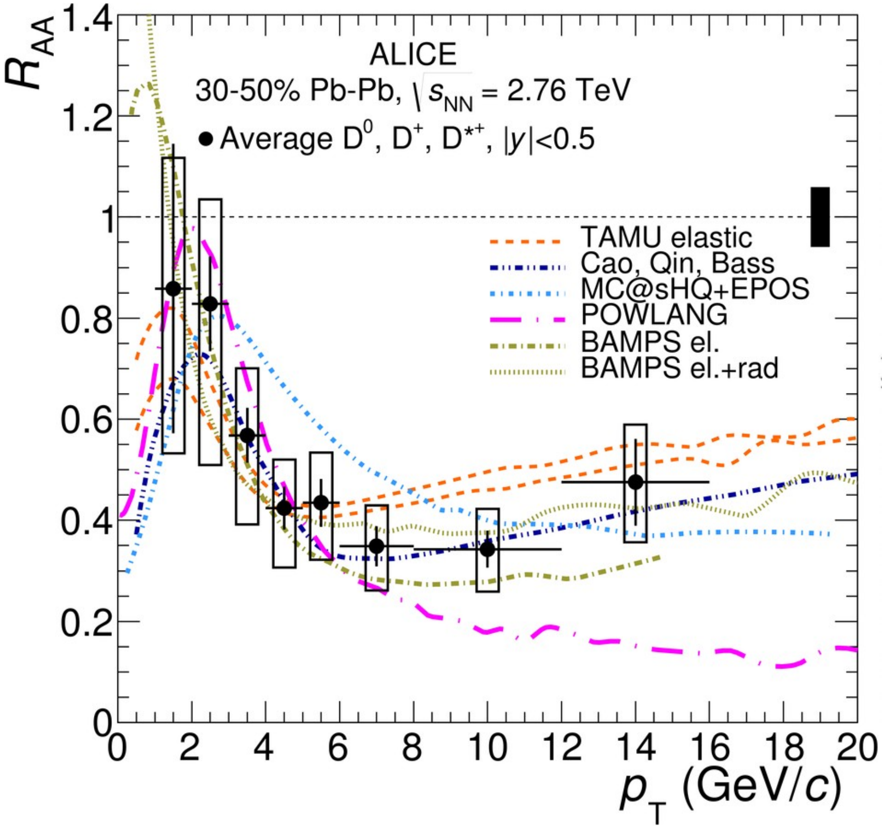
$$g = (9{,}87 \pm 0{,}48)\, \frac{m}{s^2}$$

Zasady sporządzania wykresów

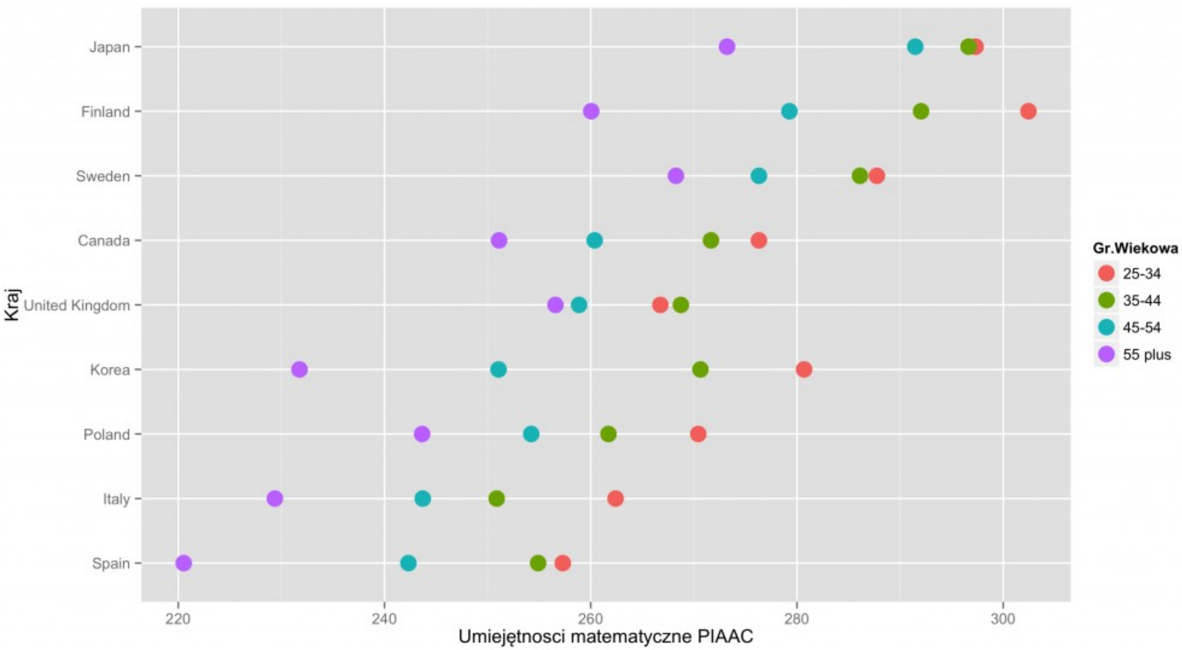
- Osie wykresu oznaczamy symbolem lub nazwą mierzonej wielkości <u>wraz z jednostką</u>
- Osie muszą zaczynać się przed pierwszym i kończyć za ostatnim punktem pomiarowym (nie muszą się zaczynać od 0)
- Podziałki na osiach muszą być wyraźnie zaznaczone
- Punkty pomiarowe muszą być wyraźnie rozróżnialne od krzywych teoretycznych
- Jeśli mamy wiele serii danych, stosujmy nie tylko **kolory**, ale również **różne symbole** (otwarte i zamknięte, kółka, kwadraty, itp.) i typy linii (ciągła, przerywana, itp.)
  - serie danych powinno dać się rozróżnić na wydruku czarnobiałym
- Odkładamy niepewności pomiarowe zarówno na osi X jak i na osi Y (np. jeśli wartość niepewności wynosi a, to odkładamy pionową kreskę o wysokości 2a i środku w wartości punktu)

Przykłady wykresów

http://aliceinfo.cern.ch/ArtSubmission/sites/aliceinfo.cern.ch.ArtSubmission/files/papers/1868/AverageDmesonRaavspT_3050_Models_transport-11888.png



http://smarterpoland.pl/wp-content/uploads/2014/09/fig1-1024x558.png



Wykres **poprawny**

Wykres **niepoprawny**

KONIEC

Do zimy 2011 w laboratoriach

Wydziału Fizyki Politechniki Warszawskiej

obowiązywały stare zasady rachunku błędów…

Z wykładu dr inż. H. Zbroszczyk (poprzednie lata)

Dotychczasowa klasyfikacja niepewności pomiarowych

Rodzaje błędów pomiarowych:

- błędy grube, tzw. pomyłki, które należy wyeliminować (np. wykonujemy serię pomiarową 1000 zliczeń rozpadu danego pierwiastka, faktycznie zostało zmierzone 999 zliczeń)
- niepewności przypadkowe, związane z mierzoną wielkością lub samą metodą pomiaru: eksperymentatorem wraz z otoczeniem lub przyrządem, jakim mierzymy (np. pomiar średnicy pręta ołowianego: niepewność systematyczna obiektu wynikać może z różnicami średnicy w różnych miejsach pręta, niepewność systematyczne metody: różnice w dociskaniu śruby mikrometrycznej); związane z wieloma niezależnymi od siebie przyczynami, ich cecha charakterystyczną jest to, że układają się one symetrycznie wokół wartości rzeczywistej
- niepewności systematyczne, których źródłem są ograniczone możliwości pomiarowe związane np. z klasą użytego przyrządu oraz możliwością odczytu jego wskazań przez eksperymentatora.

Prezentacja wyników pomiaru

- Bezwzględna niepewność pomiarowa Δx określa o ile wynik pomiaru x może różnić się od wartości rzeczywistej x_0: $|x-x_0|\leq\Delta x$

Zapis ten oznacza, że nie znamy wartości rzeczywistej, ale zakładamy, że mieści się ona w przedziale: $(x-\Delta x) \leq x_0 \leq (x+\Delta x)$

Wynik końcowy zapisujemy jako: $x_0 = x \pm \Delta x$

- Niepewność względna pomiaru to stosunek wartości niepewności bezwzględnej do wartości otrzymanego wyniku, wyrażony w procentach: $\Delta x_{wzgl} = (\Delta x / x) * 100\%$

Niepewności pomiarowe

Pomiary wielkości fizycznych oraz szacowanie ich niepewności zasadniczono można podzielić na 3 kategorie:

1) przewaga niepewności systematycznych nad przypadkowymi,
2) przewaga niepewności przypadkowych nad systematycznymi,
3) niepewności przypadkowe są porównywalne z systematycznymi.

W każdej z tych kategorii dodatkowo należy rozważyć przypadki, kiedy:

- pomiar mierzonej wielkości następuje **bezpośrednio**
  (np. pomiar średnicy pręta śrubą mikrometryczną),
- pomiar mierzonej wielkości następuje **pośrednio**
  (np. wyznaczenie objętości ołowianej kulki poprzez pomiar jej średnicy).

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

1) Pomiar bezpośredni

Na wielkość niepewności systematycznej składają się:

- użyty przyrząd (klasa przyrządu): np. pomiar napięcia woltomierzem analogowym na zakresie 300V, klasa miernika to 1%: błąd związany z przyrządem wynosi $\Delta V_1 = 300V * 1\% = 3V$

- wykonanie czynności pomiarowej przez eksperymentatora: jeśli niepewność wychylenia się wskazówki w mierniku ocenimy na 1V, to całkowita niepewność pomiaru wyniesie $\Delta V = 4V$

Oba przyczynki nie kompensują się, lecz dodają z jednakowymi znakami.

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

2a) Pomiar pośredni – metoda różniczki zupełnej

Przypadek ten dotyczy większości pomiarów, gdzie niepewności systematyczne dominują nad przypadkowymi: np. pomiar objętości walca poprzez pomiar jego wysokości oraz średnicy podstawy.

Na przykładzie funkcji jednej zmiennej:

Chcemy obliczyć zmianę ΔY funkcji f(x) przy zmianie jej arumentu Δx

$$Y \pm \Delta Y = f\left(x \pm \Delta x\right)$$

Rozwijając w szereg Taylora mamy oraz zaniedbując wyrazy, gdzie Δx występuje w potędze wyższa niż 1:

$$Y \pm \Delta Y = f\left(x\right) \pm \Delta x \frac{df\left(x\right)}{dx}$$

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

Ponieważ:

$$Y = f(x)$$

$$\Delta Y = \left|\frac{df(x)}{dx}\right| \Delta x$$

Bezwzględna niepewność wielkości będącej funkcją jednej zmiennej (której wartość mierzymy) równa jest bezwzględnej niepewności wielkości mierzonej pomnozonej przez pochodną funkcji.

Uogólniając ten przypadek na funkcję wielu zmiennych $Y= f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\Delta Y = \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \ldots + \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right| \Delta x_n$$

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

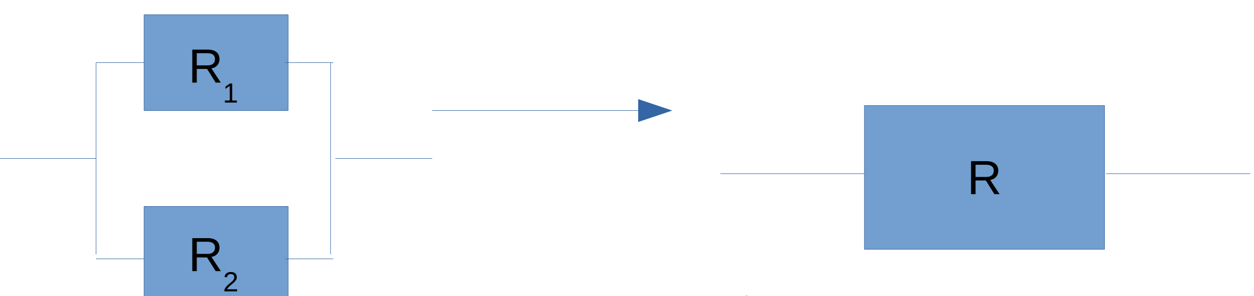
2a) Pomiar pośredni – metoda różniczki zupełnej - przykład

Mamy 2 równolegle połączone oporniki R_1 oraz R_2. Błąd wyznaczenia oporności każdego z nich wynosi 10%. Wyznaczyć wartość oporu zastępczego.

$$R_1 = 40\,\Omega\,,\ R_2 = 60\,\Omega\,,\ \Delta R_1 = 0{,}4\,\Omega\,,\ \Delta R_2 = 0{,}6\,\Omega$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 24\,\Omega \qquad \Delta R = \left|\frac{\partial R}{\partial R_1}\right| \Delta R_1 + \left|\frac{\partial R}{\partial R_2}\right| \Delta R_2$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2 (R_1 + R_2) + R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \qquad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1 (R_1 + R_2) + R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$



$$\Delta R = 0{,}84 * 0{,}4 + 0.64 * 0{,}6\,[\Omega] = 0{,}72\,\Omega$$

$$R = (24{,}0 \pm 0{,}7)\,\Omega$$

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

2a) Pomiar pośredni – metoda różniczki logarytmicznej

W przypadku, kiedy funkcja $Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ma postać iloczynową,

wygodniej jest stosować tę metodę.

$$Y = A x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

Po zlogarytmowaniu:

$$\ln Y = \ln A + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \ldots + a_n \ln x_n$$

Różniczka:

$$\frac{dY}{Y} = a_1 \frac{dx_1}{x_1} + a_2 \frac{dx_1}{x_2} \ln Y + \ldots + a_n \frac{dx_n}{x_n}$$

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right| = \sum \left|a_i \frac{\Delta x_i}{x_i}\right|$$

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

$$Y = A\, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right| = \sum \left|a_i \frac{\Delta x_i}{x_i}\right|$$

Przykład: wyznaczenie oporności opornika, na którym zmierzono spadek napięcia U oraz przez który przepłynął prąd stały o natężeniu I

$$U = (31{,}07 \pm 0{,}52)\, V$$

$$I = (2{,}01 \pm 0{,}07)\, A$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{31{,}07}{2{,}01} V/A = 15{,}46\, \Omega$$

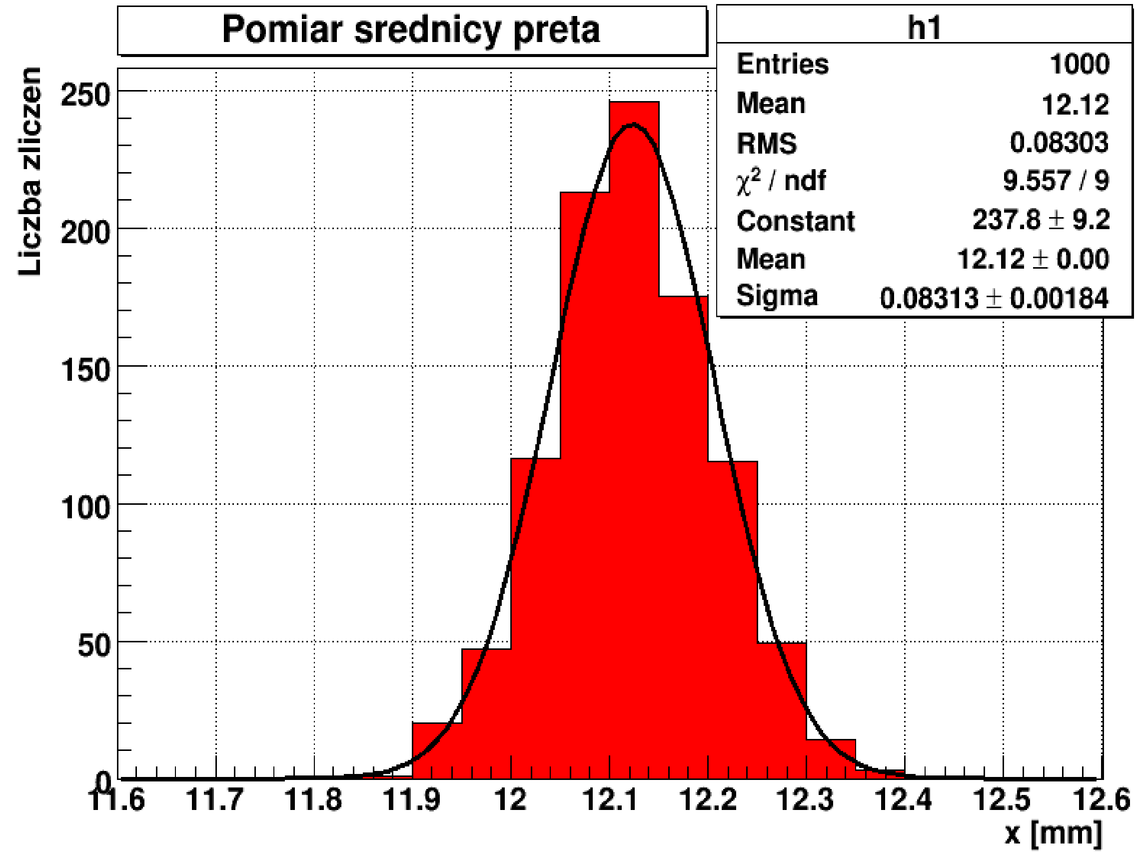
$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right| = \left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{-\Delta I}{I}\right| = 0{,}0167 + 0{,}0348 = 0{,}515$$

$$R = (15{,}4 \pm 0{,}8)\, \Omega$$

Niepewności przypadkowe (duże w porównaniu z systematycznymi)

1) Pomiar bezpośredni

Przykład: została zmierzona n=1000 razy grubość ołowianego pręta za pomocą śruby mikrometrycznej (niepewność systematyczna od śruby to Δx = 0,01 mm).



Wyniki zestawiono na histogramie, gdzie szerokość jednego przedziału wynosi Δx = ·0,05 mm. Rysujemy rozkład częstości, a następnie dopasowujemy rozkład Gaussa, charakteryzujący się parametrami: wartością średnią a oraz odchyleniem standardowym σ.

Niepewności przypadkowe (duże w porównaniu z systematycznymi)

Średnia arytmetyczna: $$m = \overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru: $$S_x = \sqrt{\frac{\sum (\overline{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

Średni błąd kwadratowy średniej: $$S_{\overline{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (\overline{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

Wartości $\overline{x} \pm S_{\overline{x}}$ określają przedział, w jakim z prawdopodobieństwem 68% należy oczekiwać wartości rzeczywistej. Wzięcie przedziału równego $\overline{x} \pm 2\mathrm{S}_{\overline{x}}$ lub $\overline{x} \pm 3\mathrm{S}_{\overline{x}}$ spowoduje wzrost tego prawdopodobieństwa do 95,4% oraz 99,7%.

W praktyce podajemy wynik na poziomie 1 odchylenia standardowego.

Niepewności przypadkowe (duże w porównaniu z systematycznymi)

2) Pomiar pośredni

Załóżmy, że przedmiotem pomiary jest wielkość $Z=f(X_1, X_2,...X_n)$.

Mierzone bezpośrednio są wielkości $X_1, X_2, ... X_n$

wraz z ich niepewnościami: $S_{\overline{X}_1}, S_{\overline{X}_1}, ..., S_{\overline{X}_n}$

Można wykazać, że $\overline{Z} = f(\overline{X}_1, \overline{X}_1, ..., \overline{X}_n)$

A także: $S_{\overline{Z}} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\right)^2 s^2_{\overline{x}_i}}$

Przykład: Zmierzona została długość ołowianego pręta: $\overline{l} \pm S_{\overline{l}} = (1{,}05 \pm 0{,}11)\, cm$

Celem jest wyznaczenie objętości tego pręta. Zmierzono także średnice,

otrzymano wynik: $\overline{d} \pm S_{\overline{d}} = (5{,}02 \pm 0{,}12)\, cm$

Objętość: $V = \pi (\overline{d}/2)^2 \overline{l} = 20{,}78\, cm^3$

Błąd: $S_{\overline{V}} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f(\overline{l}, \overline{d})}{\partial \overline{l}}\right)^2 s^2_{\overline{l}} + \left(\frac{\partial f(\overline{l}, \overline{d})}{\partial \overline{d}}\right)^2 s^2_{\overline{d}}} = 2.39\, cm^3$ $\quad V = (20{,}8 \pm 2{,}4)\, cm^3$