

ĆWICZENIE 1

Optyczna filtracja sygnałów informatycznych

1. Wprowadzenie

Przyjmijmy, że znamy pole świetlne w płaszczyźnie (x_0, y_0) , czyli że znamy rozkład jego amplitudy i fazy we wszystkich punktach, gdzie określony jest sygnał optyczny. Pytamy jakie będzie pole świetlne w płaszczyźnie (x, y) , odległej od płaszczyzny (x_0, y_0) o z ?

Postępując za J. W. Struttem (lordem Rayleighem), rozkładamy wejściowe pole świetlne sygnału na nieskończony zbiór fal płaskich biegnących w różnych kierunkach (co odpowiada transformacie Fouriera). Takie podejście jest wyjątkowo wygodne, ponieważ wiadomo, jak propaguje się w swobodnej przestrzeni idealna monochromatyczna fala płaska. Wraz z propagacją jej amplituda nie zmienia się, a faza zmienia się okresowo. Pozwala nam to na proste i szybkie obliczenie rozkładu wyjściowego pola świetlnego sygnału.

Dwuwymiarowa transformacja Fouriera sygnału optycznego wyrażona jest wzorem:

$$\hat{A}(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(x, y, 0) \cdot e^{-2\pi i(f_x x + f_y y)} dx dy. \quad (1a)$$

Jest to równoważne związkowi opisującemu odwrotną transformację Fouriera:

$$\hat{U}(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}(f_x, f_y) \cdot e^{2\pi i(f_x x + f_y y)} df_x df_y, \quad (1b)$$

gdzie $\hat{U}(x, y, 0)$ - amplituda zespolona sygnału optycznego wejściowego o rozkładzie natężenia $I(x, y, 0) = |\hat{U}(x, y, 0)|^2$. Zwykle obserwujemy jedynie rozkład natężenia I , bowiem detektory odbiorników sygnału są czułe na energię. Doświadczalne stwierdzenie występowania fazy w sygnale optycznym wymaga specjalnych technik celem jej wizualizacji. Wielkości $f_x = \frac{2\pi \cos \theta}{\lambda}$ i $f_y = \frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda}$ zwiemy częstotliwościami przestrzennymi, a wielkość $\hat{A}(f_x, f_y)$ jest widmem kątowym fourierowskim danego sygnału optycznego (θ, φ - kąty rozbiegania się elementarnych fal płaskich).

Zamiast posługiwania się sygnałem optycznym $\hat{U}(x, y, 0)$, podczas jego propagowania się w danym torze (układzie) optycznym, można równorzędnie używać jego widma kąowego $\hat{A}(f_x, f_y)$. Trzeba znać oczywiście prawa propagowania się sygnału lub jego widma kąowego. Biorąc pod uwagę ten punkt widzenia układ optyczny składa się z filtrów częstotliwości przestrzennych i z modulatorów widma kąowego sygnału optycznego,

którymi są np.: warstwa przestrzeni swobodnej, soczewki sferyczne i inne, siatki dyfrakcyjne różnych typów, najrozmaitsze przesłony umieszczone w różnych płaszczyznach toru oraz urządzenia elektrooptyczne, magneto-optyczne itd.

W układzie optycznym można zawsze wyróżnić wejście i wyjście tzn. miejsca, gdzie się wprowadza i wyprowadza sygnały optyczne. W przypadku płaskich sygnałów optycznych mówi się o płaszczyźnie wejściowej i wyjściowej. Działanie większości elementów i układów optycznych, traktowanych jako elementy liniowe i izoplanarne opisuje się, podobnie jak układy elektroniczne, za pomocą:

- a) odpowiedzi impulsowej $\hat{h}(x, y)$ stanowiącej amplitudowo - fazowy obraz w płaszczyźnie wyjściowej punkowego źródła światła (funkcji delta Diraca) umieszczonego w płaszczyźnie wejściowej układu,
- b) funkcji przenoszenia $\hat{H}(f_x, f_y)$, czyli transformaty Fouriera funkcji $\hat{h}(x, y)$.

Obie te wielkości wiążą zależność:

$$\hat{H}(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{\hat{h}(x, y)\}, \quad (2)$$

gdzie $\mathcal{F}\{\dots\}$ - transformacja Fouriera.

Znając odpowiedź impulsową (funkcję przenoszenia) danego układu i znając sygnał wejściowy możemy określić rozkład pola w płaszczyźnie wyjściowej (oczywiście, gdy układ jest liniowy).

2. Niektóre elementy optyczne

2.1. Warstwa przestrzeni swobodnej

Warstwa przestrzeni swobodnej (próżnia) o grubości d ma funkcję przenoszenia określoną wzorem:

$$\hat{H}(f_x, f_y) = \exp\left[2\pi \frac{id}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda^2 f_x^2 + \lambda^2 f_y^2)}\right]. \quad (3)$$

Przeźren działa jak osobliwy filtr częstotliwości przestrzennych, nie przepuszczający częstości przestrzennych określonych warunkiem $f_x^2 + f_y^2 > \frac{1}{\lambda^2}$, czyli usuwa tzw. fale niejednorodne, występujące w widmie kątowym sygnału optycznego. Gdy grubość d takiej warstwy jest dostatecznie duża (możemy zastosować przybliżenie przyosiowe) to funkcję przenoszenia możemy przedstawić jako:

$$\hat{H}(f_x, f_y) \approx \exp\left[-i \frac{d}{2k} (f_x^2 + f_y^2)\right], \quad (4)$$

gdzie $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ jest liczbą falową, a λ długością fali światła.

W analogiczny sposób możemy przedstawić odpowiedź impulsową jako:

$$\hat{h}(x, y) = a \cdot \exp \left[\frac{ik}{2d} (x^2 + y^2) \right]. \quad (5)$$

W praktyce swobodna przestrzeń dla propagującego się w niej sygnału (na odległość d) jest filtrem dolnoprzepustowym.

2.2. Soczewka idealna (bez aberracji)

Soczewka idealna ma funkcję przenoszenia określoną w przestrzeni częstotści przestrzennych wzorem:

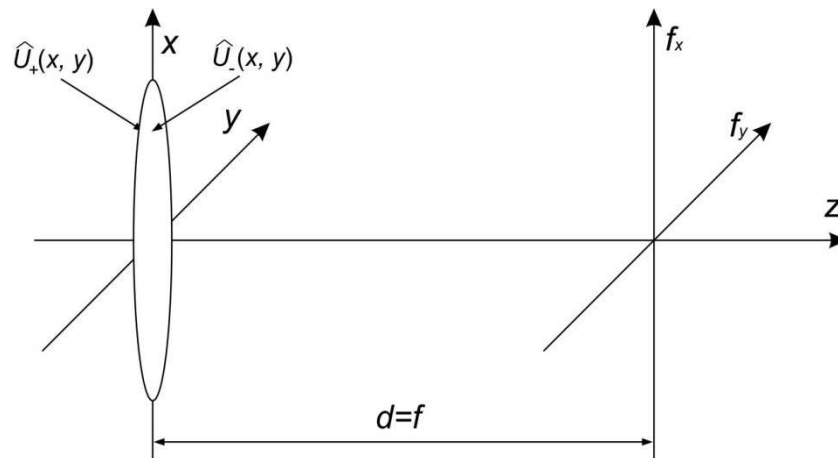
$$\hat{H}(f_x, f_y) = a \cdot \exp \left[i \frac{f}{2k} (f_x^2 + f_y^2) \right], \quad (6)$$

gdzie a jest stałą niezależną od częstotści przestrzennych, a f to ogniskowa soczewki.

W przestrzeni położeń (x, y) soczewkę o ogniskowej f opisuje transmitancja wyrażona wzorem:

$$T(x, y) = \exp \left[-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right]. \quad (7)$$

Niech $\hat{U}_+(x, y)$ oznacza sygnał wejściowy w płaszczyźnie (x, y) po lewej stronie płaszczyzny soczewkowej (rys. 1). Natomiast $\hat{U}_-(x, y)$ opisuje sygnał optyczny w płaszczyźnie (x, y) po przejściu przez soczewkę.



Rysunek 1. Soczewka idealna – geometria układu.

Pole świetlne w płaszczyźnie (x, y) , które powstaje po przejściu przez soczewkę możemy zatem opisać wzorem:

$$\hat{U}_-(x, y) = \hat{U}_+(x, y) \cdot T(x, y) = \hat{U}_+(x, y) \exp \left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2f} \right). \quad (8)$$

Soczewkę traktujemy jako nieskończenie cienką. Sygnał $\hat{U}_-(x, y)$ jest sygnałem wejściowym dla filtru częstotści przestrzennych, którym jest warstwa przestrzeni swobodnej o grubości $d = f$. Warstwa ta ma funkcję przenoszenia opisaną wzorem:

$$\begin{aligned}\hat{H}(f_x, f_y) &= a \cdot \exp \left[i \frac{d}{2k} (f_x^2 + f_y^2) \right] \\ &\Downarrow \\ \hat{H}(f_x, f_y) &= a \cdot \exp \left[i \frac{f}{2k} (f_x^2 + f_y^2) \right].\end{aligned}\tag{9}$$

Proste obliczenia dowodzą, że sygnał optyczny wyjściowy w płaszczyźnie (f_x, f_y) będzie równy:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{wyj}(f_x, f_y) &\approx \exp \left[-ik \frac{(f_x^2 + f_y^2)}{d} \right] \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} U_+(x, y) \cdot \exp \left[-\frac{ik}{f} (xf_x + yf_y) \right] dx dy \\ &\Downarrow \\ \hat{U}_{wyj}(f_x, f_y) &\approx \exp \left[-ik \frac{(f_x^2 + f_y^2)}{f} \right] \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} U_+(x, y) \cdot \exp \left[-\frac{ik}{f} (xf_x + yf_y) \right] dx dy.\end{aligned}\tag{10}$$

Wyrażenie podcałkowe przedstawia widmo $\hat{A}(f'_x, f'_y)$ sygnału optycznego, które wyrażone jest w zmiennych $f'_x = \frac{f_x}{f\lambda}$, $f'_y = \frac{f_y}{f\lambda}$. Oznacza to, że soczewka idealna działa w swej płaszczyźnie ogniskowej jak operator Fouriera. Przekształca ona sygnał optyczny U w jego widmo kątowe A w przeskalowanych zmiennych f'_x, f'_y . Czynnikiem przeskalowania jest wielkość f , czyli ogniskowa soczewki. Warto zauważyć, że im dłuższa ogniskowa soczewki tym większe widmo analizowanego sygnału.

Obserwowany w płaszczyźnie częstości przestrzennych rozkład transformaty Fouriera obiektu $\hat{A}(f'_x, f'_y)$ jest funkcją zespoloną, a więc posiada zarówno amplitudę, jak i fazę:

$$\hat{A} = A(f'_x, f'_y) \cdot \exp[i\varphi(f'_x, f'_y)].\tag{11}$$

Ze względu na fakt, że detektor rejestruje wielkości zależne od energii, zapisywany jest rozkład natężenia w funkcji f'_x, f'_y zwany widmem Wienera. Jest on równy: $|\hat{U}_{wyj}|^2 = |A(f'_x, f'_y)|^2$ i nie zawiera informacji o fazie. Dokładniejsza analiza zjawiska wykazuje, że natężeniowy rozkład widma w płaszczyźnie ogniskowej soczewki nie ulegnie zmianie przy poprzecznym (w kierunku x lub y) lub podłużnym (wzdłuż osi optycznej przed soczewką) przesunięciu obiektu wejściowego położonego przed soczewką.

W tym miejscu warto zauważyć, że powyższa analiza dotyczy soczewek idealnych. Soczewka taka jest pozbawiona aberracji, nieskończenie cienka i posiada nieskończenie wielką średnicę. W praktyce dwa pierwsze założenia mogą być dość dobrze spełnione kosztem trzeciego (soczewka o długiej ogniskowej i małej średnicy jest "cienka" i posiada małe aberracje). Średnica wejściowa soczewki może zostać jednak łatwo uwzględniona poprzez nałożenie dodatkowej apertury kołowej na analizowany obiekt. Ta operacja wpłynie nieco na natężeniowy rozkład widma Fouriera. Na przykład transformata doskonałej (nieograniczonej) fali płaskiej dokonana przez idealną soczewkę będzie idealnym punktem (funkcją delta Diraca). Po uwzględnieniu skończonej średnicy soczewki idealny punkt stanie się natężeniowym obrazem transformaty Fouriera apertury soczewki (czyli dwuwymiarową funkcją Bessela pierwszego rodzaju i pierwszego rzędu, która jest transformatą Fouriera funkcji *circus*). Wraz ze zmniejszaniem apertury soczewki rośnie wielkość plamki stanowiącej jej ognisko.

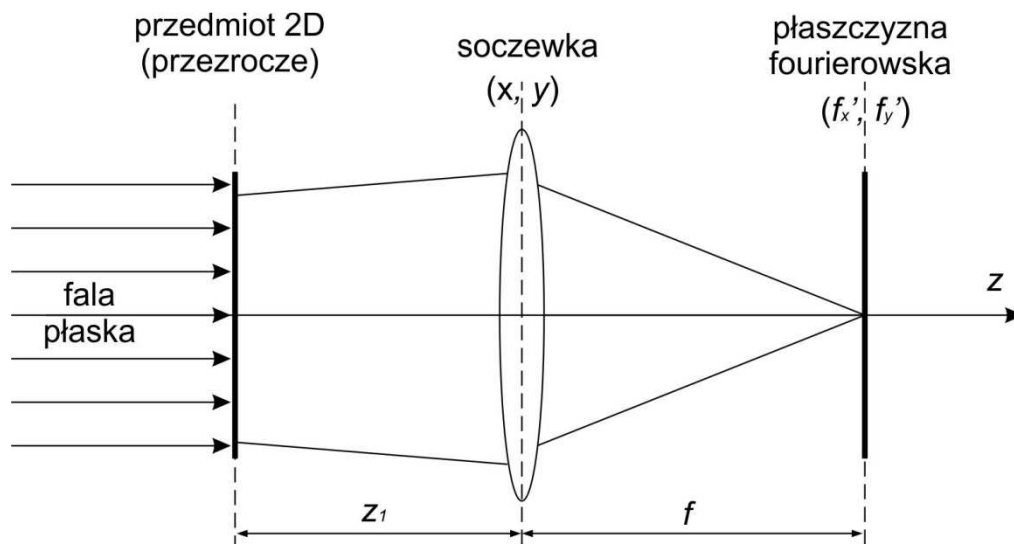
3. Użyteczne układy optyczne

Z powyższego widzimy, że dla dwuwymiarowych sygnałów optycznych (i w przybliżeniu dla trójwymiarowych) soczewki sferyczne dokonują analizy fourierowskiej sygnału optycznego w swej płaszczyźnie ogniskowej. Oczywiście soczewka cylindryczna dokonuje takiej analizy tylko w jednym kierunku, bowiem działa ona jednowymiarowo.

W tym miejscu warto zwrócić uwagę, że zastosowanie układu z soczewką do transformaty Fouriera umożliwia ponowne odtworzenie obiektu wejściowego. We wspomnianym układzie możliwe jest umieszczenie w płaszczyźnie Fouriera filtrów częstości przestrzennych i zbadanie ich wpływu na odtworzony z odfiltrowanego widma obraz.

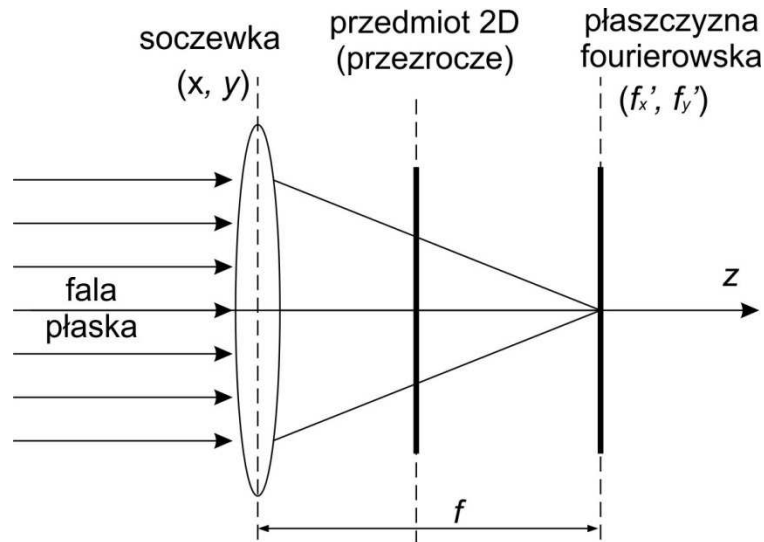
Na rysunkach 2 i 3 przedstawione są elementarne układy optyczne służące do otrzymywania widma obiektów. Układy z rys. 2 i 3 są układami nieobrazującymi, lecz jedynie dokonującymi analizy widmowej Fouriera sygnału optycznego.

Rys. 2 przedstawia układ tworzący w płaszczyźnie fourierowskiej widmo natężeniowe obiektu. Dla dowolnej odległości z_1 , faza widma występująca w płaszczyźnie fourierowskiej nie odpowiada funkcji fazowej jej transformaty Fouriera. Natomiast dla odległości $z_1 = f$ faza ściśle odpowiada matematycznemu widmu Fouriera. W celu przeskalowania widma należy w tym przypadku użyć soczewki o innej ogniskowej.



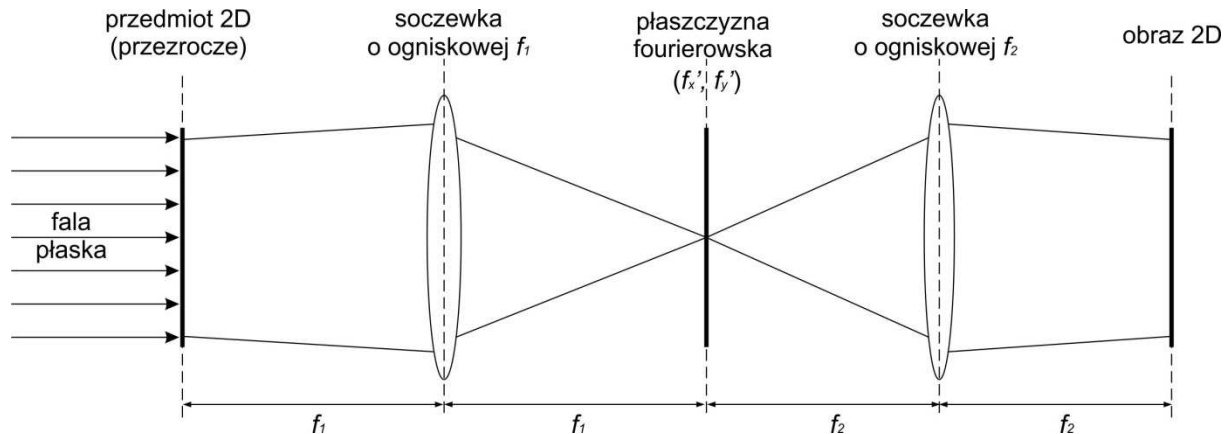
Rysunek 2. Układ tworzący w płaszczyźnie fourierowskiej widmo natężeniowe obiektu – konfiguracja z obiektem umieszczonym przed soczewką.

Z kolei rys. 3 przedstawia układ optyczny tworzący w płaszczyźnie fourierowskiej natężeniowe widmo obiektu. W tym przypadku faza nie odpowiada rozkładowi teoretycznemu widma Fouriera. W celu przeskalowania widma należy jedynie przesunąć obiekt wzdłuż osi optycznej (z).



Rysunek 3. Układ tworzący w płaszczyźnie fourierowskiej widmo natężeniowe obiektu – konfiguracja z obiektem umieszczonym za soczewką.

Rys. 4 przedstawia układ obrazujący. W płaszczyźnie ogniskowej tworzy on natężeniowe widmo obiektu, a następnie w płaszczyźnie wyjściowej tworzy obraz obiektu wejściowego. Soczewka o ogniskowej f_1 tworzy widmo Fouriera, natomiast soczewka o ogniskowej f_2 odtwarza obraz obiektu. W celu przeskalowania obiektu należy użyć soczewek o innych ogniskowych.



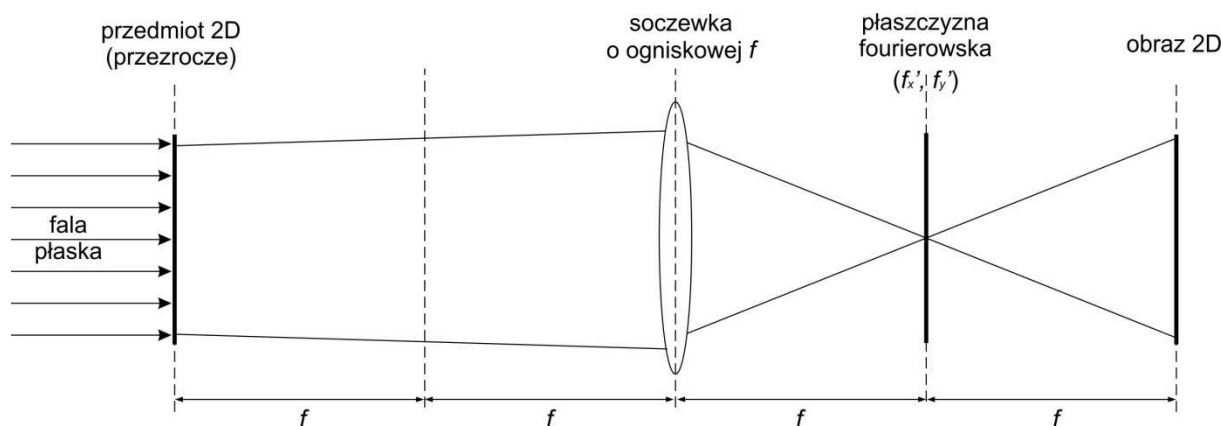
Rysunek 4. Układ filtrujący, gdy $f_1=f_2=f$ jest to tak zwany układ $4f$.

W płaszczyźnie fourierowskiej można umieszczać filtry częstości przestrzennych, które pozwalają na różne modyfikacje otrzymywanych obrazów obiektu wejściowego.

Układ obrazujący $4f$ pozwala uzyskać obraz obiektu z powiększeniem 1:1. Pierwsza soczewka o ogniskowej f_1 wykonuje transformatę Fouriera obiektu. Druga soczewka o ogniskowej f_2 ponownie wykonuje transformatę Fouriera – tym razem pola, które znajduje się w płaszczyźnie ogniskowej soczewki o ogniskowej f_1 . W rezultacie powstaje odwrócony obraz obiektu. Dzieje się tak dlatego, że soczewka wykonuje zawsze prostą transformatę Fouriera, a nie pierwsza soczewka transformatę prostą, a druga odwrotną – wtedy obraz powstałby prosty, a nie odwrócony.

Pod względem dydaktycznym układ ten w dobry sposób ilustruje zamianę sygnału na widmo, a następnie zamianę widma na sygnał. Gdy wstawimy w płaszczyźnie fourierowskiej filtr częstości przestrzennych to wtedy zmienione widmo zostanie przetransformowane przez drugą soczewkę w zmieniony obraz obiektu wejściowego. Należy zwrócić uwagę, że obiekt się nie zmienia – zmieniając jego widmo – zmieniamy powstający obraz!

Dużo prostszym układem obrazującym z powiększeniem 1:1 jest układ $2f-2f$ przedstawiony na rys. 5. Posiada on jedną soczewkę. W odległości f za soczewką znajduje się płaszczyzna fourierowska, natomiast w odległości $2f$ za soczewką powstaje obraz przezrocza znajdującego się $2f$ przed soczewką. Aby zachować obrazowanie w skali 1:1 konieczne jest dokładne ustawienie odległości $2f-2f$. Układ ten jest łatwiejszy do wyjustowania, jednak trzeba zauważyć, że w płaszczyźnie fourierowskiej nie powstaje dokładny matematyczny rozkład transformaty Fouriera obiektu. Jak już wiemy, jeżeli obiekt oświetlamy falą płaską to musi się on znajdować w odległości f przed soczewką, aby w płaszczyźnie fourierowskiej powstał dokładny rozkład amplitudy i fazy widma. W ogólnym przypadku nie stanowi to problemu, ponieważ różne detektory (w tym ludzkie oko) są czułe na natężenie światła. Zatem obserwowany natężeniowy obraz widma umożliwia odpowiednie filtracje przestrzenne i utworzenie odpowiedniego obrazu wyjściowego.



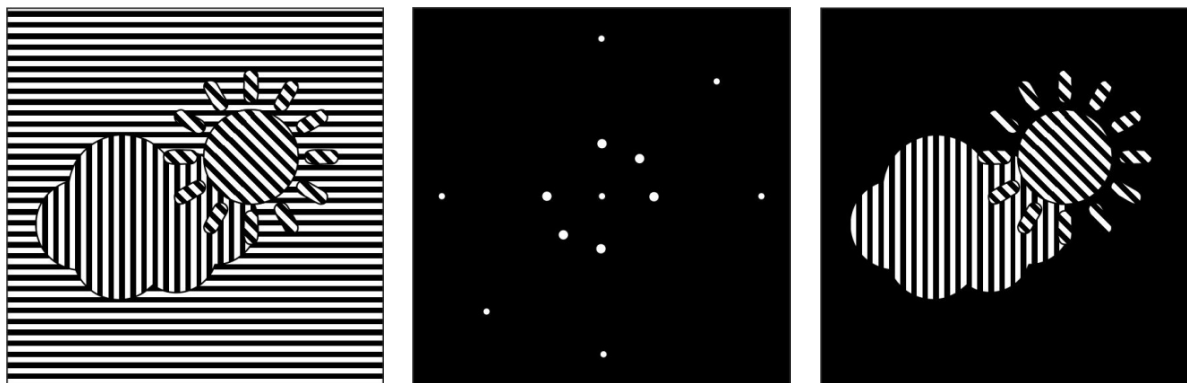
Rysunek 5. Układ obrazujący $2f-2f$.

4. Filtracja częstości przestrzennych – przykład

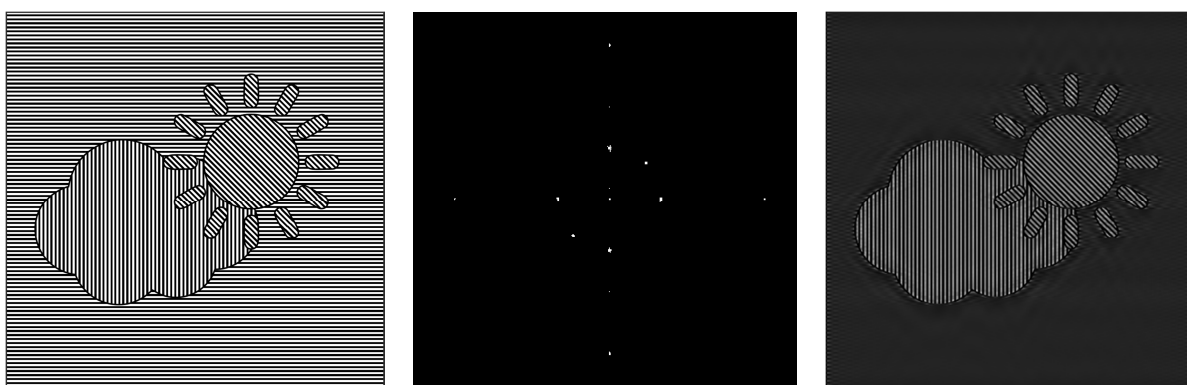
Przedmiot w postaci dwuwymiarowej siatki kwadratowej oświetla się światłem spójnym. W płaszczyźnie Fouriera wstawia się maskę filtrującą w postaci poziomej lub pionowej szczeliny. Dzięki temu otrzymuje się obraz składający się z pionowych lub poziomych pasków (w zależności od tego w jaki sposób wstawiona była maska).

5. Modulacja „Teta” – przykład

Jedną z metod filtracji częstości przestrzennych jest tzw. metoda modulacji "Teta". Zasadę działania tej metody wyjaśnimy na prostym przykładzie (rys. 6 i rys. 7). Weźmy pod uwagę, że przezroczce (stanowiące przedmiot wejściowy) składa się z różnych elementów, np. niebo, słońce, chmura (na fotografii czarno-białej elementy te będą widoczne jako szare). W zależności od stałej tych siatek odcienie szarości będą nieco inne.



Rysunek 6. Przykład modulacji „Teta” – schematyczne ilustracje. Obiekt wejściowy (po lewej), jego widmo fourierowskie (po środku) i obraz (po prawej), który powstał na skutek odfiltrowania w widmie częstości przestrzennych informacji odpowiadających poziomej siatce dyfrakcyjnej.



Rysunek 7. Przykład modulacji „Teta” – symulacje komputerowe. Obiekt wejściowy (po lewej), jego widmo fourierowskie (po środku) i obraz (po prawej), który powstał na skutek odfiltrowania w widmie częstości przestrzennych informacji odpowiadających poziomej siatce dyfrakcyjnej.

Każdy element przezroczysty wykonuje się z kawałka siatki dyfrakcyjnej o prążkach zorientowanych pod różnymi kątami (stąd nazwa metody). Przez odpowiednie przesłanianie różnych fragmentów obrazu Fouriera tak wymodelowanego obiektu odfiltrowuje się informacje odpowiadające konkretnym siatkom dyfrakcyjnym tworzącym dany element. W ten sposób element ten w obrazie wyjściowym będzie czarny. Jeśli np. w końcowym obrazie niebo (pozioma siatka) ma być czarne to trzeba przesłonić odpowiednie maksimum widma częstości przestrzennych nieba (pionowe widmo), jeśli zaś słońce ma być jasne - trzeba przepuścić całe jego widmo Fouriera. Ponieważ maksimum jasności obrazu Fouriera, odpowiadające częstościom przestrzennym bliskim 0, nie zależy od kąta, trzeba je w tej metodzie filtrowania całkowicie zasłaniać.

6. Wykonanie ćwiczenia

Część I:

- a) przeprowadzenie analizy widmowej dwuwymiarowej różnych sygnałów optycznych – siatki dyfrakcyjnej 2 wymiarowej;

- otworów kołowych o różnych średnicach;
- maski quasi-periodycznej;
- b) obserwacja wpływu przesunięcia poprzecznego w kierunku poprzecznym i podłużnym na natężeniowy rozkład widma Fouriera (układ wg rys. 2);
- c) przeskalowanie widma Fouriera sygnału optycznego (układ wg rys. 3);

UWAGA!!! Do filtracji należy użyć soczewek o ogniskowych 250, 500 lub 1000 mm.

Część II:

Filtracja częstotliwości przestrzennych różnych sygnałów optycznych i obserwacja jej wpływu na odtworzony obraz (układ wg rys. 5).

- a) filtracja w celu otrzymania z siatki dyfrakcyjnej 2 wymiarowej siatkę 1 wymiarową poziomą oraz pionową;
- b) filtracja dolnoprzepustowa;
- c) filtracja górnoprzepustowa.

Część III:

Na dwuwymiarowej siatce dyfrakcyjnej uzyskać efekt odwrócenia kontrastu. Dobrać siatkę o optymalnym wypełnieniu. Dostępne są siatki o różnych wypełnieniach. Wyjaśnić otrzymane wyniki.

Na masce quasi-periodycznej uzyskać efekt odwrócenia kontrastu.

Część IV:

Na przygotowanej masce do modulacji "teta" dokonać filtracji kątowych. Uzyskać rozjaśnienie lub ściemnienie wybranych obszarów.

7. Literatura

1. J. Goodman, "Introduction to Fourier Optics", Mc Graw-Hill Co, Nowy Jork (1996)
2. W. T. Cathey, "Optyczne przetwarzanie informacji i holografia", PWN, Warszawa (1978)
3. K. Gniadek, "Optyczne przetwarzanie Informacji", PWN, Warszawa (1992)
4. P. Decowski, "Encyklopedia fizyki współczesnej", PWN, Warszawa (1983)