

Ćwiczenie 1

Wykorzystanie optycznej transformaty Fouriera do pomiaru małych obiektów dwuwymiarowych.

Wprowadzenie teoretyczne

Podstawy

Materiał teoretyczny, dotyczący ćwiczenia został wyczerpująco wyłożony w książce J.Petykiewicza "Optyka falowa" (PWN, W-wa 1986) na str 111-125. Poniżej przedstawiamy w skondensowanej formie opis konieczny do przeprowadzenia ćwiczenia.

Wyobraźmy sobie, że fala płaska o długości λ , propagująca się wzdłuż osi OZ ma na płaszczyźnie OXY amplitudę A .

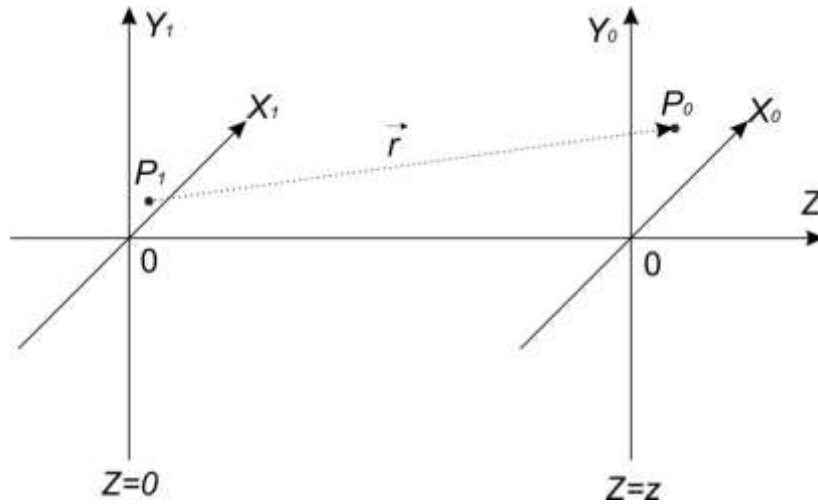
Z równania fali płaskiej wiadomo, że amplituda zespolona pola w punkcie $P_1[x = 0, y = 0, z = r_o]$ ma postać:

$$U_1(P_1) = Ae^{ikr_o} \quad (1)$$

Spróbujmy teraz policzyć tę amplitudę, posługując się zasadą Huygensa, tak jak to zrobił Fresnel przy wyprowadzeniu całki dyfrakcyjnej. Całka Fresnela w niezmienionej formie jest powszechnie używana do opisu zjawisk dyfrakcyjnych po dziś dzień. Podejście Fresnela jest o tyle ciekawe, że opiera się na prostych postulatach fizyczno-heurystycznych. Strona matematyczna wyprowadzenia jest zredukowana do minimum.

Fresnel założył, że jest spełniona zasada Huygensa. Według tej zasady, każdy punkt do którego dociera fala świetlna staje się źródłem wtórnej fali sferycznej. Wtórne fale rozchodzą się w przestrzeni z prędkością v i po czasie t ich obwiednie określają nowy kształt frontu falowego. Zasada Huygensa w takiej formie jest bardzo nieprecyzyjna, gdyż odpowiednią obwiednię można znaleźć jedynie graficznie, w przybliżeniu. Fresnel uzupełnił postulat Huygensa w ten sposób, że fale wtórne, dochodząc do dowolnego punktu w przestrzeni interferują ze sobą, tzn. suma ich amplitud określa wypadkową amplitudę w tym punkcie. Ponadto Fresnel zrobił dodatkowe założenie opisujące amplitudę fal wtórnych w punkcie obserwacji. Zgodnie z teorią Fresnela, każdy element fali płaskiej z płaszczyzny OX_1Y_1 o infinitezymalnym polu (każdy punkt tej płaszczyzny) jest źródłem fali sferycznej o amplitudzie proporcjonalnej do wielkości tego elementu i do A (gdzie A jest amplitudą padającej fali płaskiej). Ponadto Fresnel założył, że amplituda fali sferycznej, dochodzącej do punktu obserwacji P_0 zależy od czynnika kąтового $K(\theta)$, gdzie θ jest kątem ugięcia światła, tzn. kątem nachylenia wektora \vec{r} do płaszczyzny OX_1Y_1 . Na podstawie obserwacji doświadczalnych Fresnel przyjął, że czynnik $K(\theta)$ jest dodatni i zmniejsza się wraz ze wzrostem kąta ugięcia θ , przy czym $K(\theta=0) = 1$ i $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} K(\theta) = K(\theta = \pi/2) = 0$.

Odpowiednia geometria jest pokazana na Rys.1.



Rys.1.

Ostatecznie podał on wzór opisujący pole w punkcie P_1 , związane z wszystkimi elementami pierwotnej fali płaskiej. Wszystkie przyczynki pochodzące od wszystkich elementów fali płaskiej interferują ze sobą.

Następnie możemy zastosować przybliżenie przyosiowe odpowiadające małym kątom wektora \vec{r} z osią OZ , co jest równoważne warunkowi:

$$\frac{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}{z^2} \Big|_{MAX} \ll 1 \quad (6)$$

Wówczas przyjmujemy również, że czynnik $K(\theta)$ jest stały i równy 1.

Ostatecznie otrzymujemy przyosiową całkę Fresnela:

$$U(x_o, y_o) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint U(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2z}[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]} dx_1 dy_1 \quad (8)$$

Gdy zwiększymy odległość obserwacji z , tak żeby był spełniony warunek:

$$\frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2z} \Big|_{MAX} \ll 2\pi \Leftrightarrow z \gg \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\lambda} \Big|_{MAX} \quad (9)$$

To w takim przypadku wyrażenie (8) przyjmuje postać całki dyfrakcyjnej Fraunhofera:

$$U(x_o, y_o) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_o^2 + y_o^2]} \iint U(x_1, y_1) e^{-\frac{ik}{z}[x_o x_1 + y_o y_1]} dx_1 dy_1 \quad (10)$$

Ponieważ definicja dwuwymiarowej transformaty Fouriera funkcji $U(x_1, y_1)$:

$$\mathcal{F}_u(f_x, f_y) = \iint U(x_1, y_1) e^{-i2\pi[f_x x_1 + f_y y_1]} dx_1 dy_1 \quad (11)$$

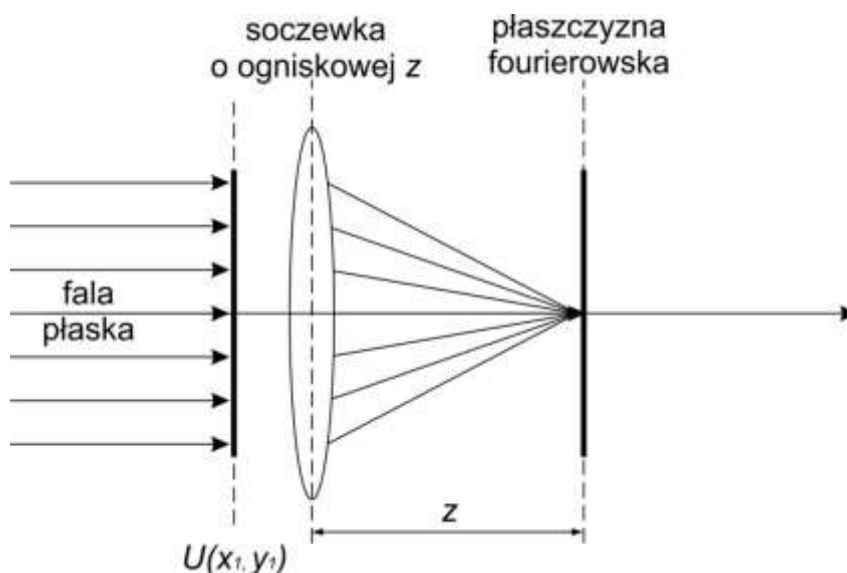
To wraz ze wzorem (10) prowadzi nas do wniosku, że natężenie $I(x_0, y_0) = |U(x_0, y_0)|^2$ pola dyfrakcyjnego Fraunhofera jest z dokładnością do stałej natężeniowej transformatą Fouriera funkcji $U(x_1, y_1)$, tzn:

$$I(x_0, y_0) = \alpha \left| \mathcal{F} \left(f_x = \frac{x_0}{\lambda z}, f_y = \frac{y_0}{\lambda z} \right) \right|^2 \quad (12)$$

gdzie $\alpha = 1/\lambda^2 z^2 = \text{const}$.

Obraz dyfrakcyjny Fraunhofera, będący jednocześnie optyczną transformatą Fouriera transmitancji $U(x_1, y_1)$ powstaje:

- w płaszczyźnie ogniskowej soczewki, umieszczonej za obiektem o transmitancji $U(x_1, y_1)$, oświetlonym falą płaską - Rys.2.



Rys.2.

Wynika to z tego, że funkcja $e^{-\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)}$ opisuje w przybliżeniu przyosiowym Fresnela transmitancję soczewki cienkiej o ogniskowej z . Inaczej mówiąc, gdyby oświetlić falą płaską obiekt z płaszczyzny $Z=0$ mający transmitancję $e^{-\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)}$, wówczas zgodnie z przyosiową całką Fresnela (8) światło zostanie skupione za obiektem w punkcie $[x_0=0, y_0=0, Z=z]$.

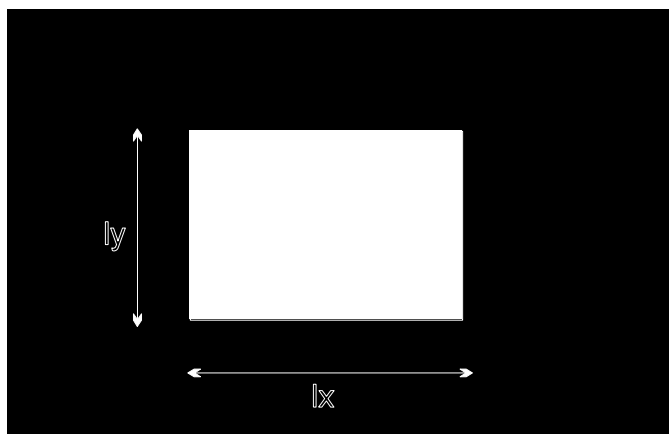
- w płaszczyźnie $Z=\text{const}$ dostatecznie odległej od obiektu, dla której spełniony jest warunek (9).

Przykład natężeniowych transformat Fouriera wybranych apertur.

1) Obiekt o aperturze prostokątnej

Obiekt o aperturze prostokąta o bokach l_x i l_y (przezroczysty prostokąt na czarnym nieprzezroczystym tle) - Rys.3 ma transmitancję opisaną funkcją rectus:

$$U(x_1, y_1) = \text{rect}\left(\frac{x_1}{l_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1}{l_y}\right) \quad (13)$$



Rys.3

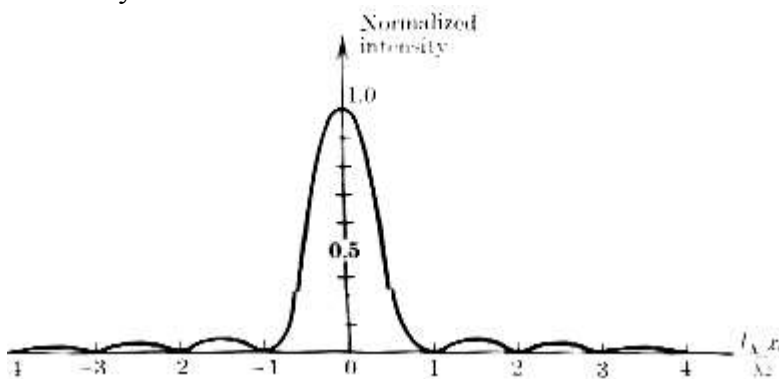
Zgodnie z analizą fourierowską funkcja natężeniowa $I_0(x_0, y_0)$ ze wzoru (12) ma w tym przypadku z dokładnością do stałej postać:

$$I(x_0, y_0) = \text{sinc}^2\left(\frac{l_x x_0}{\lambda z}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{l_y y_0}{\lambda z}\right) \quad (14)$$

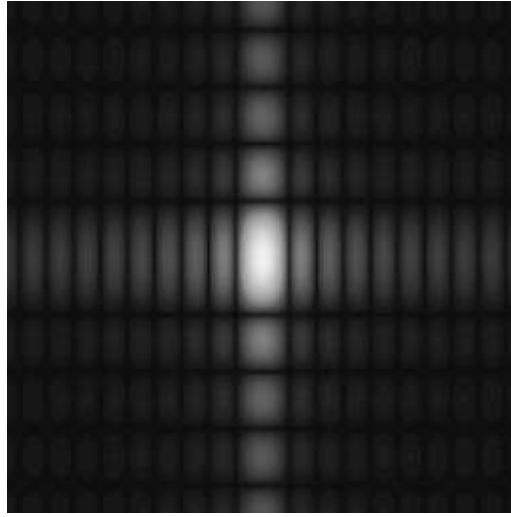
gdzie

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (15)$$

Wykres funkcji (14) wzdłuż linii $y_0=0$ jest pokazany na Rys. 4, a zdjęcie obrazu dyfrakcyjnego Fraunhofera apertury prostokątnej w postaci charakterystycznego krzyża przedstawia Rys. 5.



Rys. 4.



Rys. 5.

Ze wzorów (14) i (15) wynika, że zera w obrazie dyfrakcyjnym (ciemne obszary, gdzie natężenie światła spada do zera) mają współrzędne

$$x_o = \frac{\lambda z}{l_x} m \quad m \in C \quad (16)$$

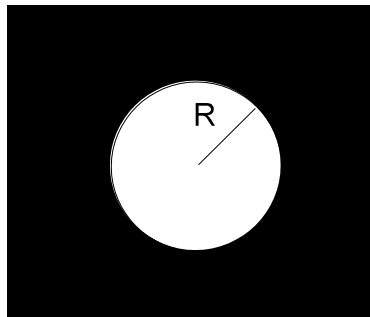
wzdłuż prostej $y_0=0$ i

$$y_o = \frac{\lambda z}{l_y} m \quad m \in C \quad (17)$$

wzdłuż prostej $x_0=0$

2) Obiekt o aperturze kołowej

Obiekt o aperturze kołowej o promieniu R opisany jest funkcją $circ(r_1/R)$ gdzie $(r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2})$ - Rys. 6.

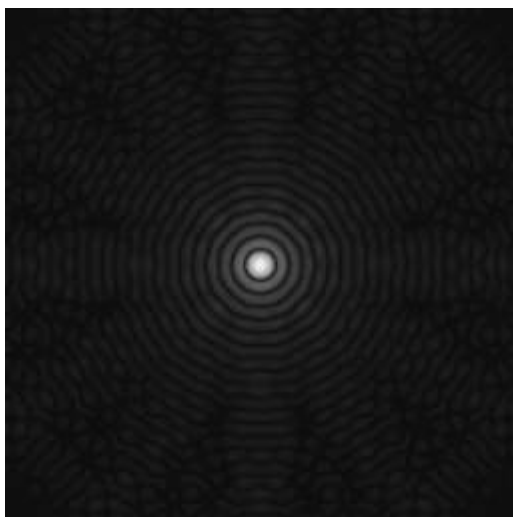


Rys. 6.

ma zgodnie ze wzorem (12) następującą natężeniową transformatę Fouriera

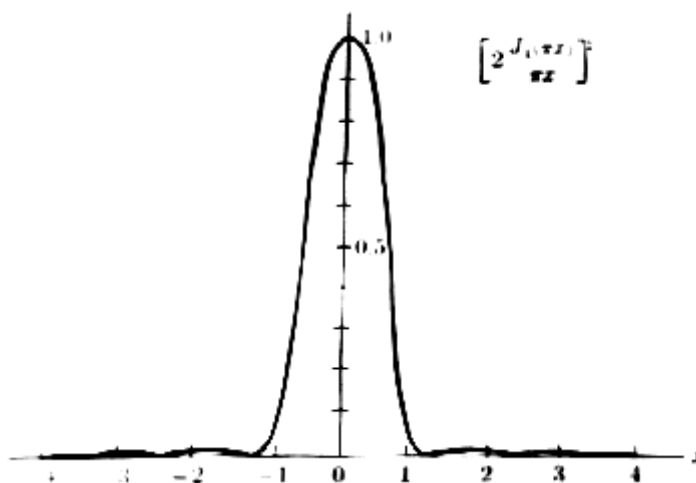
$$I(x_o, y_o) = I(r_o) = \left[2 \frac{J_1\left(\frac{kRr_o}{z}\right)}{\frac{kRr_o}{z}} \right]^2 \quad (18)$$

gdzie $r_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$ oraz J_1 oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju i pierwszego rzędu. Obraz dyfrakcyjny Fraunhofera apertury kołowej posiada strukturę pierścieniową i jest pokazany na Rys. 7.



Rys. 7

Z wykresu kwadratu funkcji Bessela zamieszczonego na Rys. 8. oraz Tab. 1. można znaleźć warunek odpowiadający ciemnym pierścieniom w obrazie dyfrakcyjnym, gdzie $I(r_0) = 0$



Rys. 8

Tab. 1

x	$\left[\frac{2 J_1(\pi x)}{\pi x} \right]^2$	
0	1	max
1,22	0	min
1,64	0,0175	max
2,23	0	min
2,68	0,0042	max
3,24	0	min

Z równania (18) wynika, że promienie kolejnych ciemnych pierścieni opisuje równanie:

$$r_0 = \beta \frac{\lambda z}{2R} \quad (19)$$

gdzie:

$\beta=1,22; 2,23; 3,24.$

Przebieg ćwiczenia

1) Badanie rozdzielczości matrycy.

2) Pomiar apertur prostokątnych i kołowych

Ze względu na małe rozmiary apertur obserwujemy obrazy dyfrakcyjne Fraunhofera bez pomocy soczewki. Oświetlamy apertury falą płaską i wykonujemy odpowiednie pomiary obrazów dyfrakcyjnych w dalekiej płaszczyźnie wyjściowej, leżącej w strefie Fraunhofera (w naszym przypadku $z > 1\text{m}$). Znając długość fali światła λ , obliczamy długość boków apertur prostokątnych i promienie apertur kołowych ze wzorów (16), (17) i (19).

3) Sprawdzenie wyników z p-tu 1 poprzez bezpośredni pomiar rozmiarów apertur pod mikroskopem.

Politechnika Warszawska
Wydział Fizyki
Pracownia Informatyki Optycznej
Październik 2013