

Ćwiczenie 8

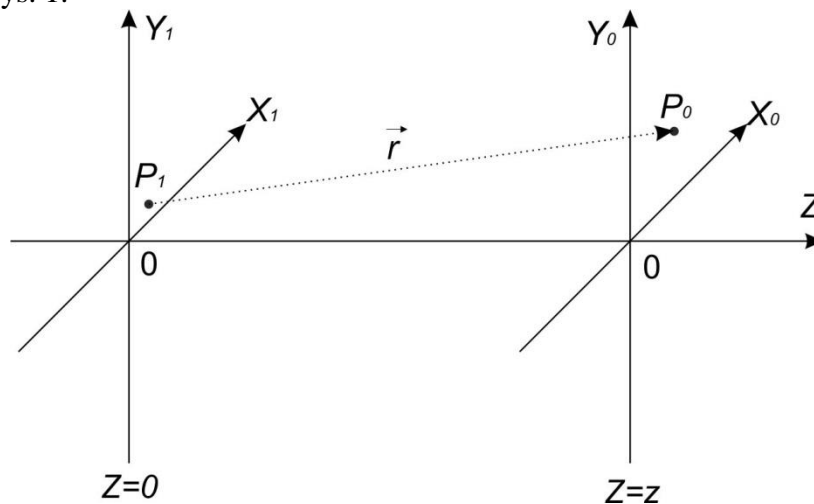
Wykorzystanie optycznej transformaty Fouriera do pomiaru małych obiektów dwuwymiarowych. Weryfikacja doświadczalna dyfrakcyjnego twierdzenia o skalowaniu.

Wprowadzenie teoretyczne

Całkę dyfrakcyjną, omówioną w ćwiczeniu dotyczącym stref Fresnela, możemy zapisać w postaci:

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint U(x_1, y_1) \frac{e^{ikr}}{r} K(\theta) dx_1 dy_1, \quad (1)$$

gdzie $k=2\pi/\lambda$, $U(x_0, y_0)$ jest amplitudą pola dyfrakcyjnego w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ płaszczyzny wyjściowej $Z = z$, $U(x_1, y_1)$ jest amplitudą pola padającego w punkcie $P_1(x_1, y_1)$ płaszczyzny $Z = 0$, r jest długością wektora $\vec{r} = \overrightarrow{P_1P_0}$, parametr $K(\theta)$ opisuje czynnik kątowy zależny od nachylenia wektora \vec{r} do płaszczyzny OX_1Y_1 . Odpowiednia geometria jest pokazana na Rys. 1.



Rys. 1 – Geometria układu.

Wektor $\overrightarrow{P_1P_0}$ ma współrzędne $\vec{r} = [x_0 - x_1, y_0 - y_1, z]$ i jego długość ma wartość:

$$r = z \sqrt{1 + \frac{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}{z^2}}. \quad (2)$$

Często przy opisie zjawisk dyfrakcyjnych stosujemy przybliżenie przyosiowe, odpowiadające małym kątom wektora \vec{r} z osią OZ , co jest równoważne warunkowi:

$$\left. \frac{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}{z^2} \right|_{MAX} \ll 1. \quad (3)$$

Wówczas przyjmujemy również, że czynnik $K(\theta)$ w całce (1) jest stały i równy 1 oraz rozwijamy pierwiastek w równaniu (2) w szereg Taylora, ograniczając się do dwóch pierwszych członów rozwinięcia. W ten sposób otrzymujemy:

$$r = z + \frac{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}{2z}. \quad (4)$$

Tak jak to miało miejsce przy dyskusji zjawisk interferencyjnych możemy zauważyć, że małe zmiany długości r wokół wartości z w mianowniku wyrażenia (1) nie mają istotnego znaczenia i można zastąpić iloraz $\frac{e^{ikr}}{r}$ pod całką dyfrakcyjną wielkością $\frac{e^{ikr}}{z}$. Ostatecznie zależność (4) prowadzi do następującej przyosiowej formy całki Fresnela:

$$U(x_0, y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint U(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2z}[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]} dx_1 dy_1. \quad (5)$$

Wzór (5) wynika bezpośrednio z warunku (3), który z kolei zachodzi wtedy, gdy obszary punktów obserwacji (x_0, y_0) i całkowania (x_1, y_1) są odpowiednio ograniczone. W przypadku punktów (x_1, y_1) z płaszczyzny wejściowej $Z = 0$ odpowiada to dyfrakcji na obiektach o ograniczonych aperturach. Jeśli nierówność (3) zachodzi mówimy również, że znajdujemy się w strefie dyfrakcji Fresnela.

Całka (5) zostanie dalej uproszczona, jeśli zaniedbamy pod nią dodatkowo czynnik $e^{\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)}$. Można to uzyskać na dwa sposoby:

- umieszczając za obiektem o amplitudzie zespolonej $U(x_1, y_1)$ optyczny element dwuwymiarowy o transmitancji $e^{-\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)}$. Jest to równoważne pojawieniu się pod całką dodatkowego czynnika $e^{-\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)}$.
- zwiększając odległość obserwacji z , żeby był spełniony warunek:

$$\left. \frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2z} \right|_{MAX} \ll 2\pi \leftrightarrow z \gg \left. \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\lambda} \right|_{MAX}. \quad (6)$$

W takim przypadku wyrażenie (5) przyjmuje postać całki dyfrakcyjnej Fraunhofera:

$$U(x_0, y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)} \iint U(x_1, y_1) e^{-\frac{ik}{z}[x_0 x_1 + y_0 y_1]} dx_1 dy_1. \quad (7)$$

Definicja dwuwymiarowej transformaty Fouriera funkcji $U(x_1, y_1)$, zapisana w postaci:

$$\mathcal{F}_u(f_x, f_y) = \iint U(x_1, y_1) e^{-i2\pi(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1, \quad (8)$$

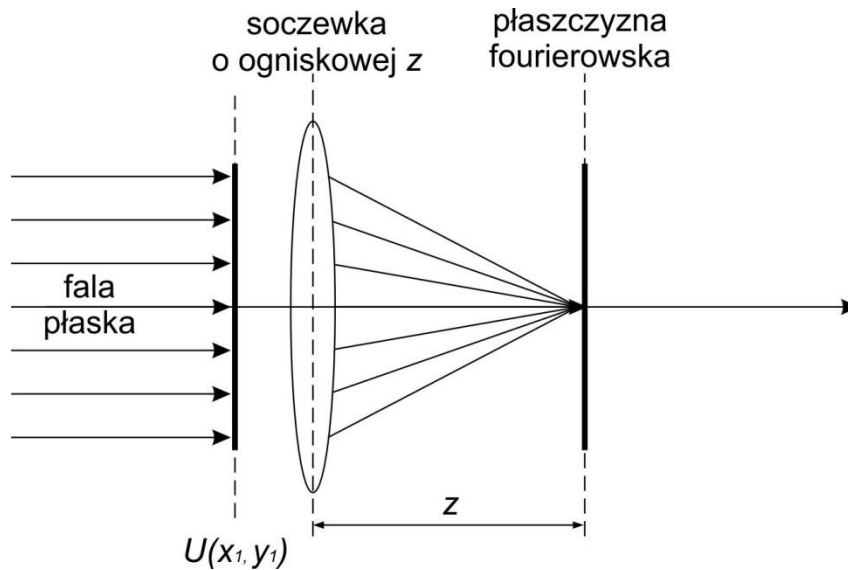
wraz ze wzorem (7) prowadzi do wniosku, że natężenie $I(x_0, y_0) = |U(x_0, y_0)|^2$ pola dyfrakcyjnego Fraunhofera jest z dokładnością do stałej natężeniową transformacją Fouriera funkcji $U(x_1, y_1)$, tzn:

$$I(x_0, y_0) = \alpha \left| \mathcal{F}_u \left(f_x = \frac{x_0}{\lambda z}, f_y = \frac{y_0}{\lambda z} \right) \right|^2, \quad (9)$$

gdzie $\alpha = \frac{1}{\lambda^2 z^2} = const.$

Zgodnie z naszą dyskusją z punktów a) i b) obraz dyfrakcyjny Fraunhofera, będący jednocześnie optyczną transformacją Fouriera transmitancji $U(x_1, y_1)$ powstaje:

Ad a) w płaszczyźnie ogniskowej soczewki, umieszczonej za obiektem o transmitancji $U(x_1, y_1)$, który oświetlony jest falą płaską - Rys. 2.



Rys. 2 – Płaszczyzna fourierowska powstająca w odległości ogniskowej za soczewką.

Wynika to z tego, że funkcja $e^{-\frac{ik}{2z}(x_1^2+y_1^2)}$ opisuje w przybliżeniu przyosiowym Fresnela transmitancję soczewki cienkiej o ogniskowej z . Inaczej mówiąc, gdyby oświetlić falą płaską obiekt z płaszczyzny $Z = 0$ mający transmitancję $e^{-\frac{ik}{2z}(x_1^2+y_1^2)}$, wówczas zgodnie z przyosiową całką Fresnela (5) światło zostanie skupione za obiektem w punkcie $[x_0 = 0, y_0 = 0, Z = z]$.

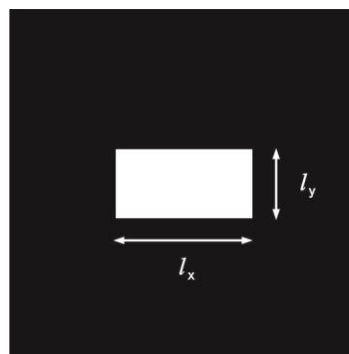
Ad b) w płaszczyźnie $Z = const.$ dostatecznie odległej od obiektu, dla której spełniony jest warunek (6).

Natężeniowe transformaty Fouriera wybranych apertur.

Obiekt o aperturze prostokątnej

Obiekt o aperturze prostokąta o bokach l_x i l_y (przezroczysty prostokąt na czarnym nieprzezroczystym tle) - Rys. 3 ma transmitancję opisaną funkcją *rectus*:

$$U(x_1, y_1) = \text{rect}\left(\frac{x_1}{l_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1}{l_y}\right). \quad (10)$$



Rys. 3 – Apertura prostokątna opisana funkcją *rectus*.

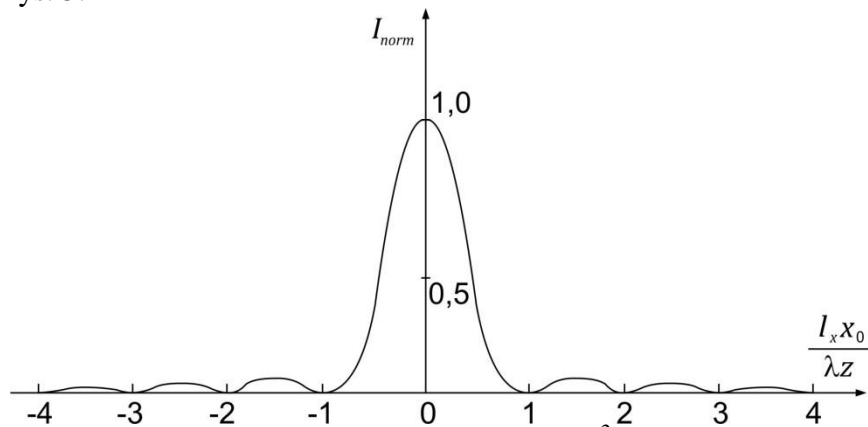
Zgodnie z analizą fourierowską funkcja natężeniowa $I(x_0, y_0)$ ze wzoru (9) ma w tym przypadku, z dokładnością do stałej, postać:

$$I(x_0, y_0) = \text{sinc}^2\left(\frac{l_x x_0}{\lambda z}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{l_y y_0}{\lambda z}\right), \quad (11)$$

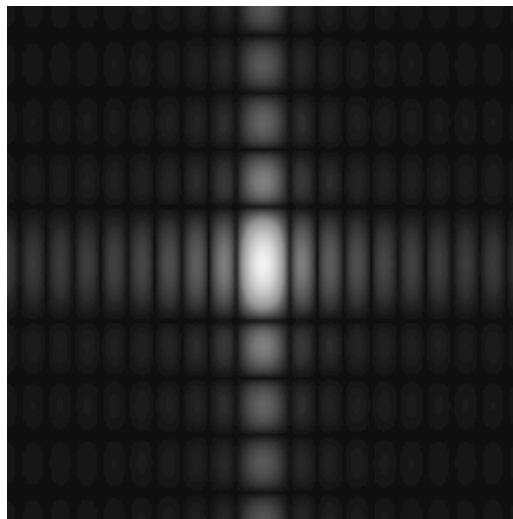
gdzie:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}. \quad (12)$$

Wykres funkcji (11) wzdłuż linii $y_0=0$ jest pokazany na Rys. 4, a zdjęcie obrazu dyfrakcyjnego Fraunhofera apertury prostokątnej w postaci charakterystycznego krzyża przedstawia Rys. 5.



Rys. 4 – Wykres funkcji $\text{sinc}^2(x)$.



Rys. 5 – Dwuwymiarowy rozkład funkcji $\text{sinc}(x,y)$, co odpowiada polu dyfrakcyjnemu w strefie Fraunhofera pochodzącemu od funkcji $\text{rectus}(x,y)$.

Ze wzorów (11) i (12) wynika, że zera w obrazie dyfrakcyjnym (czyli ciemne obszary, gdzie natężenie światła spada do zera) mają współrzędne:

$$x_0 = \frac{\lambda z}{l_x} m \quad \text{dla } m \in \mathbb{C} \quad (13)$$

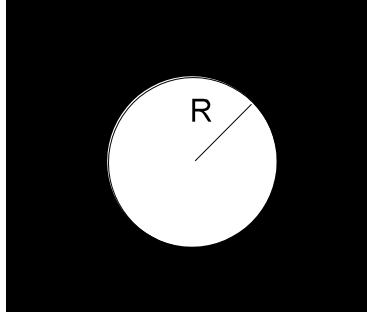
wzdłuż prostej $y_0 = 0$ i:

$$y_0 = \frac{\lambda z}{l_y} m \quad \text{dla } m \in \mathbb{C} \quad (14)$$

wzdłuż prostej $x_0 = 0$.

Obiekt o aperturze kołowej

Obiekt o aperturze kołowej o promieniu R opisany jest funkcją $\text{circ}\left(\frac{r_1}{R}\right)$, gdzie $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ - Rys. 6.

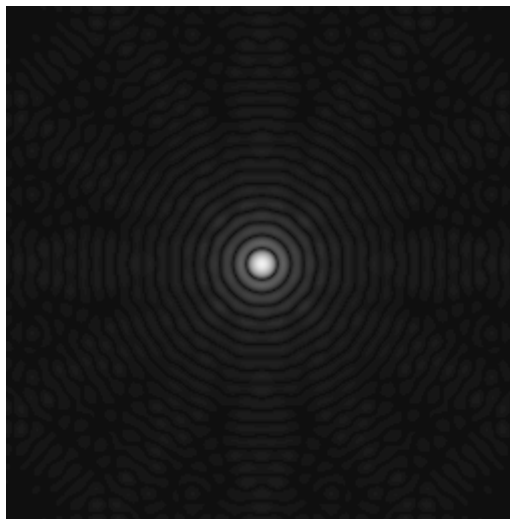


Rys. 6 – Apertura kołowa opisana funkcją *circus*.

Zgodnie ze wzorem (9) jego natężeniowa transformata Fouriera jest opisana wzorem:

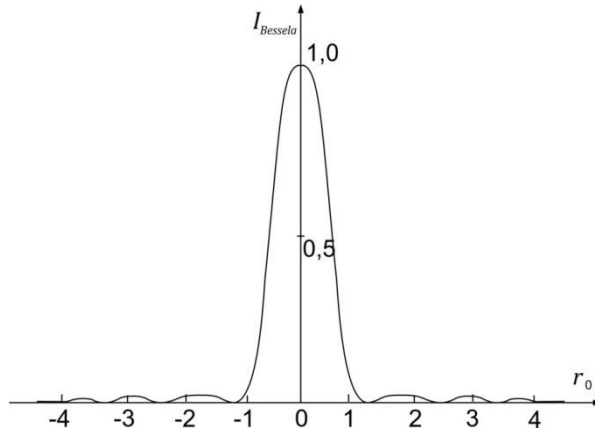
$$I_{Bessela}(x_0, y_0) = I_{Bessela}(r_0) = \left[2 \frac{J_1\left(\frac{kRr_0}{z}\right)}{\frac{kRr_0}{z}} \right]^2, \quad (15)$$

gdzie $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ oraz J_1 oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju i pierwszego rzędu. Obraz dyfrakcyjny Fraunhofera apertury kołowej posiada strukturę pierścieniową i jest pokazany na Rys. 7.



Rys. 7 – Dwuwymiarowy rozkład funkcji Bessela pierwszego rodzaju i pierwszego rzędu, co odpowiada polu dyfrakcyjnemu w strefie Fraunhofera pochodzącemu od funkcji *circus*.

Z wykresu kwadratu funkcji Bessela zamieszczonego na Rys. 8 oraz Tab. 1. można znaleźć warunek odpowiadający ciemnym pierścieniom w obrazie dyfrakcyjnym, gdzie $I(r_0) = 0$.



Rys. 8 – Wykres funkcji Bessela pierwszego rodzaju i pierwszego rzędu.

Tab. 1

x	$\left[2 \frac{J_1(\pi x)}{\pi x}\right]^2$	
0	1	max
1,22	0	min
1,64	0,0175	max
2,23	0	min
2,68	0,0042	max
3,24	0	min

Z równania (15) wynika, że promienie kolejnych ciemnych pierścieni opisuje równanie:

$$r_0 = \beta \frac{\lambda z}{2R}, \quad (16)$$

gdzie $\beta = 1,22; 2,23; 3,24$.

Dyfrakcyjne twierdzenie o skalowaniu

Dyfrakcyjne twierdzenie o skalowaniu dotyczy dyfrakcji Fresnela przy oświetleniu falą sferyczną. Jeżeli na obiekt o transmitancji $U(x_1, y_1)$ pada fala sferyczna o promieniu krzywizny p wówczas za obiektem w odległości q otrzymujemy zgodnie ze wzorem (5) pole o następującej amplitudzie:

$$U_1(x_0, y_0) = \frac{e^{ikq}}{i\lambda q} \iint e^{\frac{ik}{2p}(x_0^2+y_0^2)} U(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2q}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]} dx_1 dy_1. \quad (17)$$

Powyższy wzór po zastosowaniu zależności $\frac{1}{z} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ można zapisać w równoważnej formie:

$$U_1(x_0, y_0) = \frac{e^{ikq}}{i\lambda q} e^{\frac{ik}{2q}(x_0^2+y_0^2)(1-\frac{z}{q})} \iint U(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2z}[(\frac{z}{q}x_0-x_1)^2+(\frac{z}{q}y_0-y_1)^2]} dx_1 dy_1. \quad (18)$$

Natężenia pól wyrażonych równaniami (5) oraz (18) opisują odpowiednio następujące wzory:

$$I(x_0, y_0) = |U(x_0, y_0)|^2 = \frac{1}{\lambda^2 z^2} \left| \iint U(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]} dx_1 dy_1 \right|^2 \quad (19)$$

oraz:

$$I_1(x_0, y_0) = |U_1(x_0, y_0)|^2 = \quad (20)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 q^2} \left| \iint U(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2z} \left[\left(\frac{x_0}{M} - x_1 \right)^2 + \left(\frac{y_0}{M} - y_1 \right)^2 \right]} dx_1 dy_1 \right|^2,$$

gdzie $M = \frac{q}{z}$. Prowadzi to do zależności:

$$I_1(x_0, y_0) = \frac{1}{M^2} I\left(\frac{x_0}{M}, \frac{y_0}{M}\right). \quad (21)$$

Równanie (21) stanowi treść dyfrakcyjnego twierdzenia o skalowaniu, które można podać w następującej formie:

Rozkład natężenia w obrazie dyfrakcyjnym Fresnela przy oświetleniu falą sferyczną o promieniu krzywizny p obserwowany w odległości q ma strukturę taką samą, jak rozkład natężenia przy oświetleniu falą płaską w odległości z , gdzie:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (22)$$

Ponadto przy oświetleniu falą sferyczną rozkład natężeniowy jest M -krotnie powiększony w stosunku do rozkładu przy oświetleniu falą płaską, gdzie:

$$M = \frac{q}{z}. \quad (23)$$

Stosunkowo łatwo jest przeprowadzić doświadczalne sprawdzenie powyższego twierdzenia wykorzystując zjawisko samoobrazowania dla obiektu periodycznego o sieci kwadratowej. Wystarczy zlokalizować przy oświetleniu falą sferyczną płaszczyznę odpowiadającą pierwszemu samoobrazowi z przesunięciem. Jak wiadomo z poprzedniego ćwiczenia, w przypadku oświetlenia falą płaską pojawia się on w odległości $\frac{d^2}{\lambda}$, gdzie d jest okresem przestrzennym obiektu periodycznego.

Przebieg ćwiczenia

- 1) Pomiar apertur prostokątnych i kołowych.
Ze względu na małe rozmiary apertur obserwujemy obrazy dyfrakcyjne Fraunhofera bez pomocy soczewki. Oświetlamy apertury falą płaską i wykonujemy odpowiednie pomiary obrazów dyfrakcyjnych w dalekiej płaszczyźnie wyjściowej, leżącej w strefie Fraunhofera (w naszym przypadku $z > 1m$). Znając długość fali światła λ , obliczamy długość boków apertur prostokątnych i promienie apertur kołowych ze wzorów (13), (14) i (16).
- 2) Sprawdzenie wyników z punktu 1) poprzez bezpośredni pomiar rozmiarów apertur pod mikroskopem.
- 3) Doświadczalna weryfikacja dyfrakcyjnego twierdzenia o skalowaniu:
 - a. mierzymy pod mikroskopem okres przestrzenny d struktury periodycznej o sieci kwadratowej,
 - b. oświetlamy obiekt periodyczny falą sferyczną o promieniu krzywizny p około $\frac{10d^2}{9\lambda}$ (promień krzywizny musi być większy od $\frac{d^2}{\lambda}$),
 - c. lokalizujemy płaszczyznę pierwszego samoobrazu z przesunięciem i mierzymy jego okres przestrzenny,
 - d. przeprowadzamy weryfikację dyfrakcyjnego twierdzenia o skalowaniu w oparciu o dokonane pomiary i wzory (22) i (23).