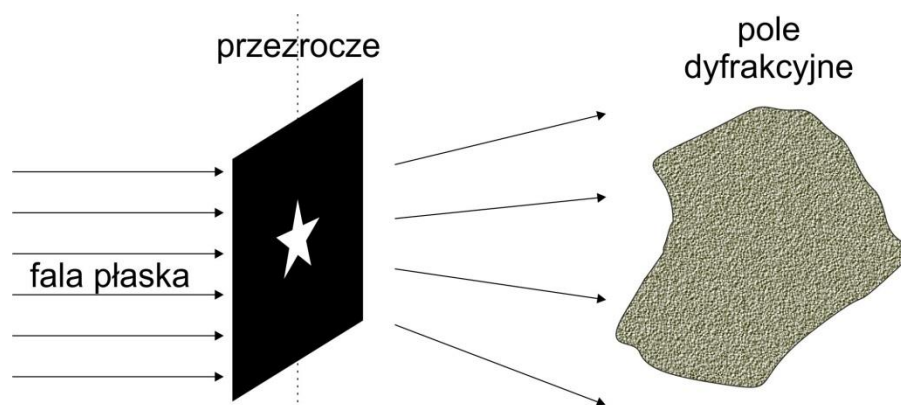


Ćwiczenie 7

Samoobrazowanie obiektów periodycznych

Wprowadzenie teoretyczne

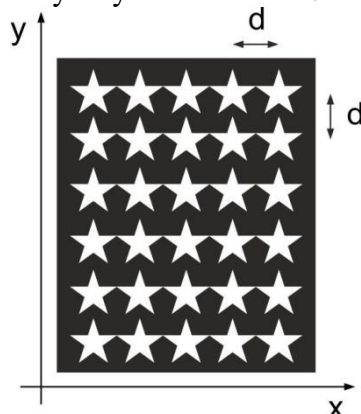
Jeśli płaski obiekt optyczny np. przezroczce z czarno-białym wzorem (dokładniej mówiąc z przezroczysto-nieprzezroczystym wzorem) oświetlimy wiązką laserową wówczas za transparentem pojawi się pole dyfrakcyjne, którego obraz widoczny na ekranie różni się w ogólności kształtem od transparentu wejściowego (Rys. 1).



Rys. 1 – Pole dyfrakcyjne obiektu wejściowego.

Okazuje się jednak, że istnieją pewne obiekty, których pole dyfrakcyjne w odpowiedniej odległości za płaszczyzną przezrocza jest wiernym obrazem obiektu. Obraz ten otrzymywany jest bez udziału żadnych obrazujących elementów optycznych, jak np. soczewek czy zwierciadeł sferycznych.

Z tego względu zjawisko to nazywa się zjawiskiem samoobrazowania, a pole dyfrakcyjne odtwarzające przezroczce nazywamy samoobrazem. Jak pokażemy niebawem, obiektami zdolnymi do samoobrazowania są obiekty periodyczne tzn. takie, które składają się z powtarzających się okresowo identycznych obrazków -.



Rys. 2 – Obiekt quasi-periodyczny.

Pojedynczy obrazek tworzy komórkę elementarną obiektu. Odległość d między sąsiednimi obrazkami nazywana jest stałą periodyczności lub stałą sieci periodycznej.

Aby wyjaśnić teoretycznie podstawy zjawiska samoobrazowania obiektu periodycznego, założmy, że w płaszczyźnie $z = 0$ mamy obiekt periodyczny przedstawiony na Rys. 2. Obiekt taki jest opisany okresową funkcją transmitancji $t(x,y)$, spełniającą warunek:

$$\bigwedge_{x,y \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n,m \in \mathbb{C}} t(x,y) = t(x + nd, y + md). \quad (1)$$

Funkcja transmitancji opisuje "nieprzeźroczystość" obiektu i przyjmuje ona wartość 0 w punktach, gdzie obiekt jest nieprzeźroczysty i wartość 1 w punktach przeźroczystych. Jeżeli fala płaska o amplitudzie $A=1$ oświetla prostopadle przezroczyste wówczas pole U w płaszczyźnie $z = 0$ tuż za przezroczystym jest określone przez jego transmitancję:

$$U(x, y, z = 0) = At(x, y) = t(x, y). \quad (2)$$

Dowolną funkcję dwóch zmiennych x i y o periodyczności d wzdłuż osi OX i OY , możemy przedstawić w postaci szeregu funkcji wykładniczych tzn. szeregu Fouriera:

$$t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A(n, m) e^{2\pi i \left(\frac{n}{d}x + \frac{m}{d}y \right)} = U(x, y, 0) \text{ dla } n, m \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Optycznie oznacza to, że za obiektem periodycznym o stałej d oświetlonym falą płaską pojawia się pole będące dyskretną sumą fal płaskich o wektorach falowych:

$$\vec{k} = [k_x, k_y, k_z], \quad (4)$$

gdzie $k_x = \frac{2\pi n}{d}$; $k_y = \frac{2\pi m}{d}$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Biorąc pod uwagę, że:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (5)$$

otrzymujemy:

$$k_z = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}}. \quad (6)$$

Z powyższego wynika, że pole dyfrakcyjne w płaszczyźnie $z = z_0$ za obiektem będzie miało postać:

$$U(x, y, z = z_0) = \sum_n \sum_m A(n, m) e^{\frac{2\pi i (nx + my)}{d}} e^{2\pi i z_0 \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}}}. \quad (7)$$

Warunkiem dostatecznym na to, aby w płaszczyźnie $z = z_0$ zachodziło samoobrazowanie jest warunek:

$$U(x, y, z = z_0) = \mu U(x, y, z = 0), \quad (8)$$

gdzie μ jest pewną stałą.

Prowadzi to do zależności:

$$\bigwedge_{n,m \in \mathbb{C}} e^{2\pi i z_0 \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}}} = \mu = e^{2\pi i \mu'} e^{2\pi i l} = const., \quad (9)$$

gdzie zgodnie ze wzorem Eulera $e^{2\pi i l} = 1$ możemy zapisać:

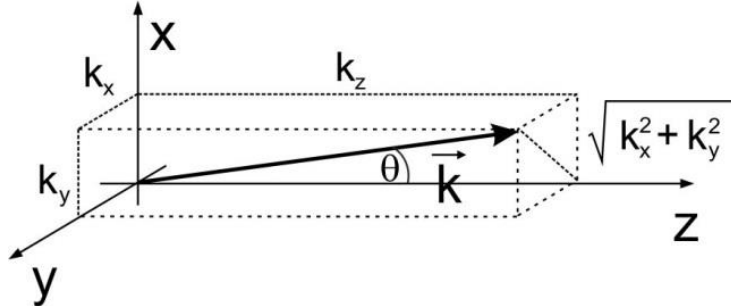
$$\bigwedge_{n,m \in \mathbb{C}} 2\pi z_0 \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}} = 2\pi \mu' + 2\pi l, \quad (10)$$

gdzie μ' jest ustalone, a $l \in \mathbb{C}$.

Ostatnie równanie (10) sprowadza się do stwierdzenia, że w płaszczyźnie samoobrazowania fale płaskie, składające się na pola świetlne za transparentem różnią się w fazie o wielokrotność 2π .

W praktyce fale płaskie za obiektem rozchodzą się pod niewielkimi kątami w stosunku do osi OZ wyznaczonej przez kierunek propagacji fali oświetlającej. Jest wówczas spełniony warunek zilustrowany na Rys. 3.

$$\sin^2 \theta = \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} = \frac{n^2 + m^2}{d^2} \lambda^2 \ll 1. \quad (11)$$



Rys. 3 – Fala płaska rozchodząca się pod małym kątem do osi z .

Przy założeniu (11) pierwiastek $\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}}$ występujący w równaniu (10) można zapisać w postaci:

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - s}, \quad (12)$$

gdzie:

$$s = \frac{n^2 + m^2}{d^2} \lambda^2 \ll 1. \quad (13)$$

W rozwinięciu pierwiastka w potęgowy szereg Taylora:

$$\sqrt{1 - s} = 1 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 - \frac{1}{16}s^4 - \dots \quad (14)$$

można pominąć człony wyższych rzędów począwszy od członu kwadratowego $-\frac{1}{8}s^2$ i zapisać w postaci:

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{n^2 + m^2}{2d^2} \lambda, \quad (15)$$

Powyższe przybliżenie jest przybliżeniem przyosiowym Fresnela i prowadzi ono do zastąpienia wyrażenia (10) warunkiem:

$$\bigwedge_{n,m \in \mathbb{C}} \frac{z_0}{\lambda} - \frac{n^2 + m^2}{2d^2} \lambda z_0 = \mu' + l, \quad \text{gdzie } l \in \mathbb{C}. \quad (16)$$

Jest on spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\frac{\lambda z_0}{2d^2}$ jest liczbą naturalną, co automatycznie określa odległość samoobrazowania od obiektu periodycznego.

$$z_0 = \frac{2d^2}{\lambda} N \text{ dla } N = 1, 2, 3 \dots \quad (17)$$

Jeśli uważnie przeprowadzi się doświadczenie, wówczas można zauważyć, że samoobrazy pojawiają się w odległościach mniejszych niż wynikałoby to ze wzoru (17). W rzeczywistości szukane odległości z_0 spełniają warunek:

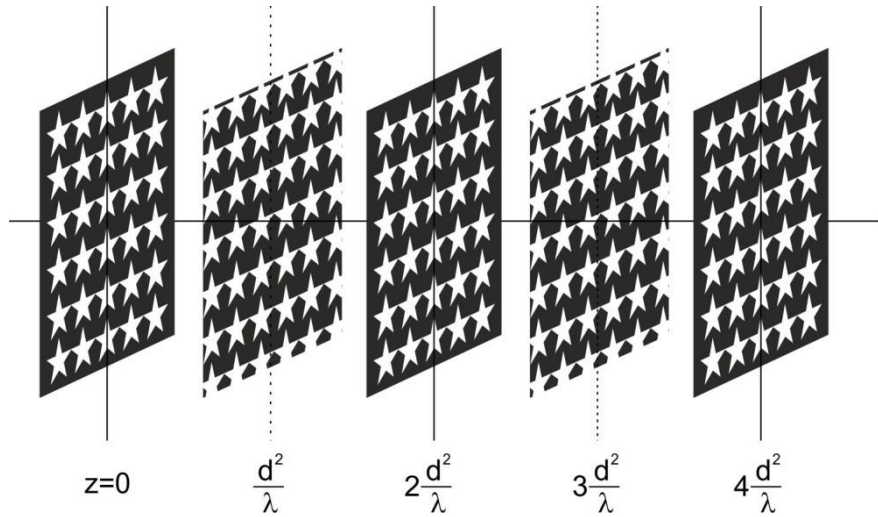
$$z_0 = \frac{d^2}{\lambda} N \text{ dla } N = 1, 2, 3 \dots \quad (18)$$

Otóż dokładna analiza zjawiska prowadzi do wniosku, że tak naprawdę słuszny jest wzór (17), jednakże w odległościach:

$$z_0 = \frac{2d^2}{\lambda} \left(N - \frac{1}{2} \right) \quad (19)$$

pojawiają się pola dyfrakcyjne, które są wiernymi odwzorowaniami obiektu periodycznego, ale przesuniętego względem oryginału o wektor $\vec{u} = \left[\frac{d}{2}, \frac{d}{2} \right]$. Tzn. obraz dyfrakcyjny jest obrazem obiektu periodycznego przesuniętego o $\frac{d}{2}$ wzdłuż osi OX i $\frac{d}{2}$ wzdłuż osi OY . Zatem nie jest to wierna kopia spełniająca warunek (8), dlatego też odległości ze wzoru (19) nie można było otrzymać w naszej analizie. Zagadnienie to zresztą ma istotne znaczenie historyczne, gdyż przez ponad 100 lat od odkrycia zjawiska samoobrazowania przez angiлика Talbota w 1836 roku optycy nie potrafili znaleźć teoretycznego uzasadnienia dla samoobrazowania w odległościach określonych wzorem (19), co prowadziło niekiedy do nieporozumień.

Podsumowując naszą analizę można stwierdzić, że samoobrazy pojawiają się w odległościach $z_0 = \frac{d^2}{\lambda} N$, co ilustruje Rys. 4.



Rys. 4 – Kolejne powstające samoobrazy.

Linia ciągłą oznaczono wiernie samoobrazy opisane wzorem (17), a linią przerywaną samoobrazy opisane wzorem (19).

Dyfrakcyjne twierdzenie o skalowaniu

Dyfrakcyjne twierdzenie o skalowaniu dotyczy dyfrakcji Fresnela przy oświetleniu falą sferyczną. Jeżeli na obiekt o transmitancji $U(x_1, y_1)$ pada fala sferyczna o promieniu krzywizny p wówczas za obiektem w odległości q otrzymujemy zgodnie z przyosiową formą całki Fresnela pole o następującej amplitudzie:

$$U_1(x_0, y_0) = \frac{e^{ikq}}{i\lambda q} \iint e^{\frac{ik}{2p}(x_0^2 + y_0^2)} U(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2q}[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]} dx_1 dy_1. \quad (20)$$

Powyższy wzór po zastosowaniu zależności $\frac{1}{z} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ można zapisać w równoważnej formie:

$$U_1(x_0, y_0) = \frac{e^{ikq}}{i\lambda q} e^{\frac{ik}{2q}(x_0^2 + y_0^2)(1 - \frac{z}{q})} \iint U(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2z} \left[\left(\frac{z}{q} x_0 - x_1 \right)^2 + \left(\frac{z}{q} y_0 - y_1 \right)^2 \right]} dx_1 dy_1. \quad (21)$$

Natężenia pól wyrażonych za pomocą przyosiowej formy całki Fresnela i równaniem (21) opisują odpowiednio następujące wzory:

$$I(x_0, y_0) = |U(x_0, y_0)|^2 = \frac{1}{\lambda^2 z^2} \left| \iint U(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2z}[(x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2]} dx_1 dy_1 \right|^2 \quad (22)$$

oraz:

$$I_1(x_0, y_0) = |U_1(x_0, y_0)|^2 = \frac{1}{\lambda^2 q^2} \left| \iint U(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2z} \left[\left(\frac{x_0}{M} - x_1 \right)^2 + \left(\frac{y_0}{M} - y_1 \right)^2 \right]} dx_1 dy_1 \right|^2, \quad (23)$$

gdzie $M = \frac{q}{z}$. Prowadzi to do zależności:

$$I_1(x_0, y_0) = \frac{1}{M^2} I\left(\frac{x_0}{M}, \frac{y_0}{M}\right). \quad (24)$$

Równanie (24) stanowi treść dyfrakcyjnego twierdzenia o skalowaniu, które można podać w następującej formie:

Rozkład natężenia w obrazie dyfrakcyjnym Fresnela przy oświetleniu falą sferyczną o promieniu krzywizny p obserwowany w odległości q ma strukturę taką samą, jak rozkład natężenia przy oświetleniu falą płaską w odległości z , gdzie:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (25)$$

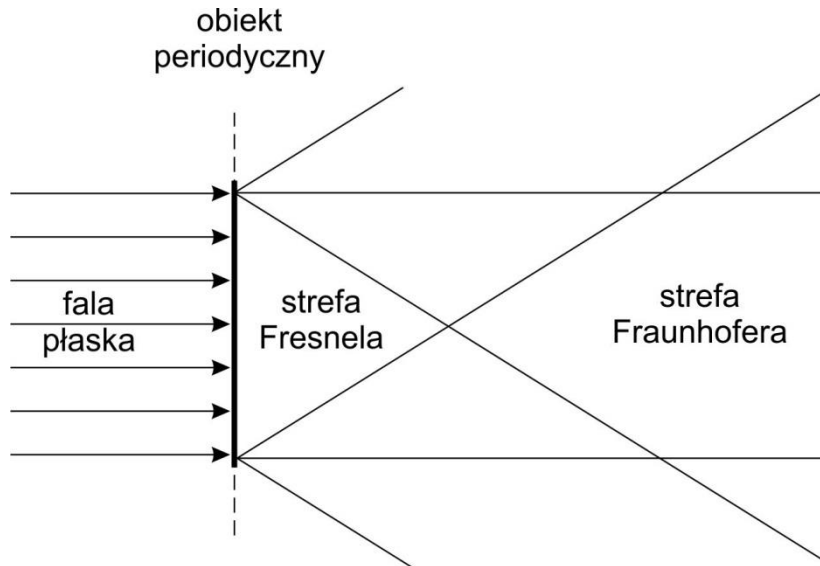
Ponadto przy oświetleniu falą sferyczną rozkład natężeniowy jest M -krotnie powiększony w stosunku do rozkładu przy oświetleniu falą płaską, gdzie:

$$M = \frac{q}{z}. \quad (26)$$

Stosunkowo łatwo jest przeprowadzić doświadczalne sprawdzenie powyższego twierdzenia wykorzystując zjawisko samoobrazowania dla obiektu periodycznego o sieci kwadratowej. Wystarczy zlokalizować przy oświetleniu falą sferyczną płaszczyznę odpowiadającą pierwszemu samoobrazowi z przesunięciem. Jak wiadomo z poprzedniego ćwiczenia, w przypadku oświetlenia falą płaską pojawia się on w odległości $\frac{d^2}{\lambda}$, gdzie d jest okresem przestrzennym obiektu periodycznego.

Przebieg ćwiczenia

- 1) Oświetlić obiekt periodyczny falą płaską. Wyznaczyć odległość z_0 dla kolejnych trzech samoobrazów. Znając długość fali oświetlenia λ obliczyć stałą sieci d ze wzoru (18) ($N=1, 2, 3$).
- 2) Określić doświadczalnie parametr d , traktując obiekt periodyczny jako dwuwymiarową siatkę dyfrakcyjną. W tym celu należy oświetlić obiekt "cienką" wiązką laserową.



Rys. 5 – Strefy dyfrakcyjne – bliska (Fresnela) i daleka (Fraunhofera).

Ustawić układ w taki sposób, aby obraz dyfrakcyjny można było obserwować w możliwie maksymalnej odległości (ponad 5m). W takiej konfiguracji obraz na ekranie składa się z rozsuniętych względem siebie kół. Zjawisko to wyjaśnia Rys. 5. Wiązka oświetlająca ma skończone rozmiary i dlatego fale płaskie powstające za obiektem są po prostu zbiorem wiązek światła laserowego o rozmiarach poprzecznych wiązki oświetlającej. W dostatecznie małej odległości za obiektem wiązki propagujące się w różnych kierunkach nachodzą na siebie. Jest to tzw. strefa Fresnela, w której można zaobserwować samoobrazy obiektu wejściowego. Z Rys. 5 widać wyraźnie, że długość tej strefy zwiększa się wraz ze średnicą wiązki oświetlającej, powiększa się wówczas również ilość możliwych do zaobserwowania samoobrazów. Za strefą Fresnela, wiązki propagujące się za obiektem są rozseparowane, oznacza to tzw. strefę Fraunhofera. Jeżeli w tej strefie umieści się ekran, wówczas zobaczyć można na nim obrazy rozseparowanych wiązek w postaci świetlnych plam. Każda plamka odpowiada określonej fali płaskiej o indeksach (n,m) wyznaczających składowe wektora falowego:

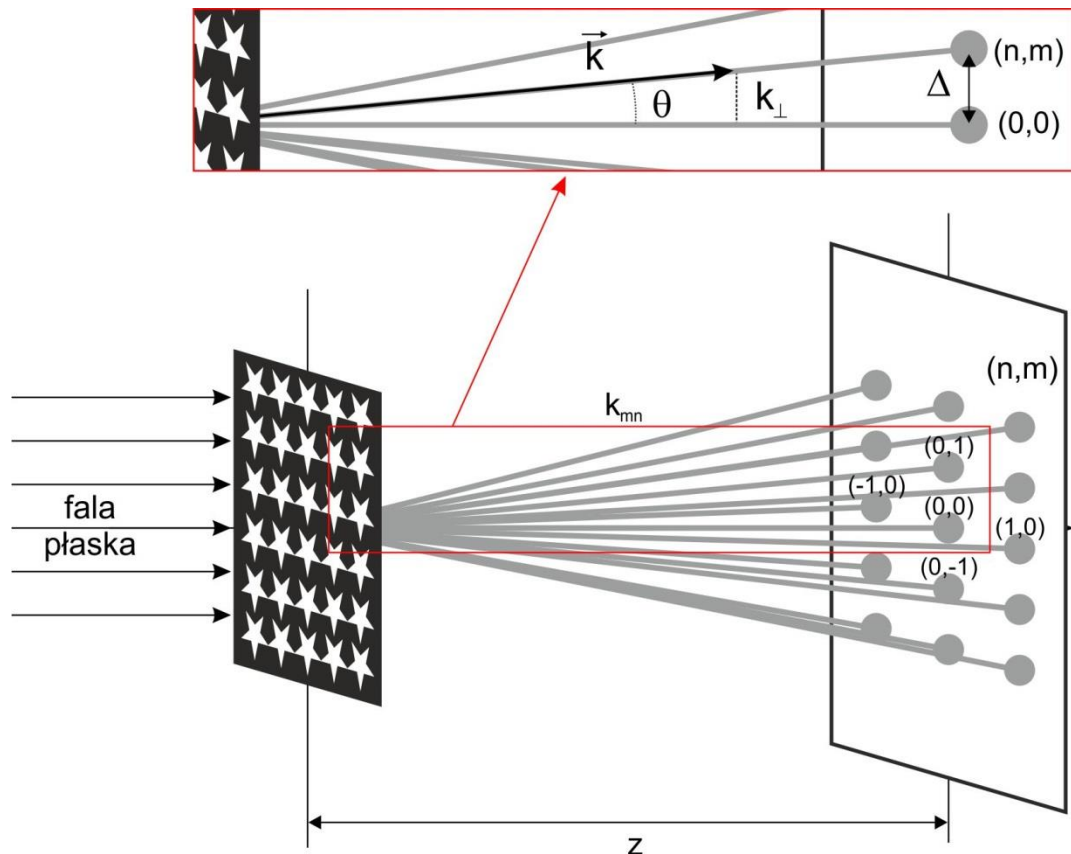
$$k_x = \frac{n2\pi}{d}; \quad k_y = \frac{m2\pi}{d}. \quad (27)$$

Sposób pomiaru stałej d z obserwacji pola dyfrakcyjnego w strefie Fraunhofera przedstawiony jest na Rys. 6.

$$k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (28)$$

oraz dla małych kątów θ , gdzie tangens można przybliżyć przez sinus:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta = \left(\frac{k_{\perp}}{k}\right)^2 = \left(\frac{\Delta}{z}\right)^2 &\rightarrow \frac{n^2+m^2}{d^2} \lambda^2 = \left(\frac{\Delta}{z}\right)^2 \rightarrow \\ \rightarrow d = \left(\frac{\Delta}{\lambda z}\right)^{-1} \sqrt{n^2+m^2} \end{aligned} \quad (29)$$



Rys. 6 – Plamy świetlne na ekranie odpowiadają różnym indeksom (n, m) .

Wyznaczyć doświadczalnie odległości z i Δ . Stałą d wyliczyć teraz ze wzoru (29), wybierając obraz wiązki ugiętej możliwie daleko od osi układu. Parametr Δ jest odległością obrazu wiązki o indeksach (n, m) od osi układu wyznaczonej przez wiązkę $(0,0)$.

- 3) Sprawdzenie wyników z punktów 1) i 2) poprzez pomiar stałej d przy pomocy obserwacji obiektu periodycznego pod mikroskopem.

Pomiary przeprowadzamy dla 3 różnych obiektów, które charakteryzują się różnymi stałymi.

- 4) Doświadczalna weryfikacja dyfrakcyjnego twierdzenia o skalowaniu:
 - a. zmierzyć pod mikroskopem okres przestrzenny d struktury periodycznej o sieci kwadratowej,
 - b. oświetlić obiekt periodyczny falą sferyczną o promieniu krzywizny p około $\frac{10d^2}{9\lambda}$ (promień krzywizny musi być większy od $\frac{d^2}{\lambda}$),
 - c. zlokalizować płaszczyznę pierwszego samoobrazu z przesunięciem i zmierzyć jego okres przestrzenny,
 - d. przeprowadzić weryfikację dyfrakcyjnego twierdzenia o skalowaniu w oparciu o dokonane pomiary i wzory (25) i (26).