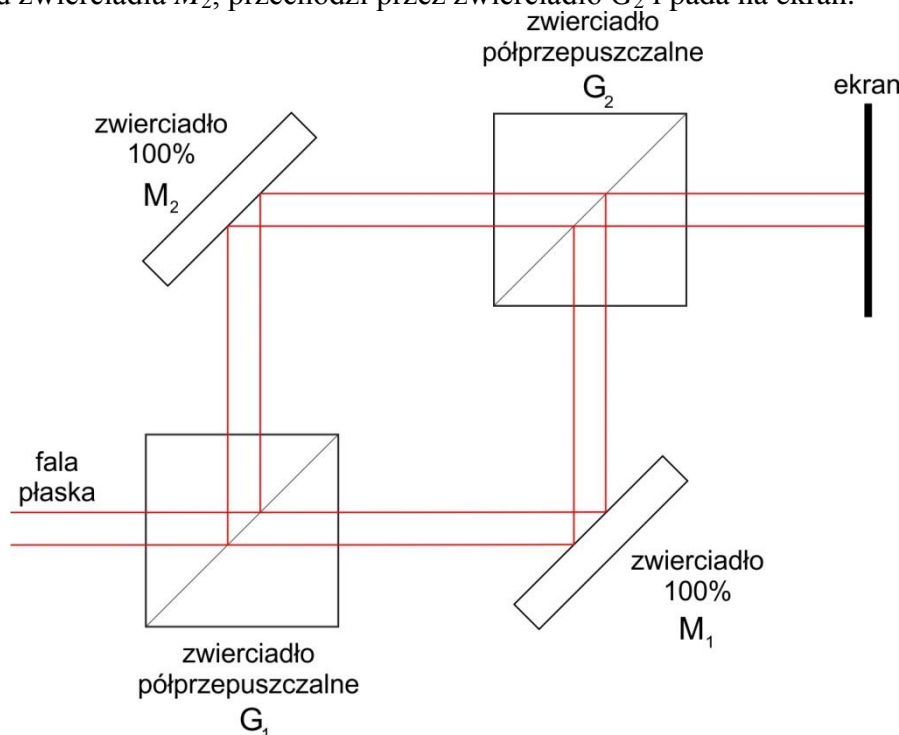


Ćwiczenie 6

Interferometr Macha-Zehndera. Zapis sinusoidalnej siatki dyfrakcyjnej i pomiar jej okresu przestrzennego.

Interferometr Macha-Zehndera

Interferometr Macha-Zehndera jest często wykorzystywany w wielu zagadnieniach technicznych, ponieważ wiązki w jego dwóch ramionach pokonują tę samą drogę optyczną, ale biegną dwoma różnymi torami. Schemat takiego interferometru ilustruje Rys. 1. Wiązka pada na zwierciadło półprzepuszczalne G_1 , jedna jej część przez nie przechodzi i odbijając się od zwierciadła całkowicie odbijającego M_1 pada na drugie zwierciadło półprzepuszczalne G_2 i odbija się od niego w kierunku ekranu. Druga część wiązki odbija się od zwierciadła G_1 , następnie od zwierciadła M_2 , przechodzi przez zwierciadło G_2 i pada na ekran.



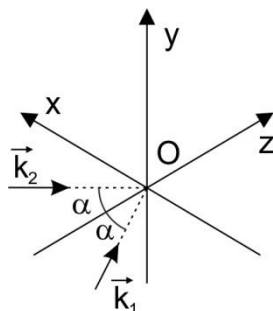
Rys. 1 – Schemat interferometru Macha-Zehndera.

Siatka dyfrakcyjna

Założmy, że dwie fale płaskie $e^{i\vec{k}_1\vec{r}}$ i $e^{i\vec{k}_2\vec{r}}$ o wektorach falowych \vec{k}_1 i \vec{k}_2 leżących w płaszczyźnie OXZ , tworzą tę samą kąt α z osią OZ . Zgodnie z geometrią pokazaną na Rys. 2 wektory falowe mają postać $\vec{k}_1 = [k_x, 0, k_z]$ oraz $\vec{k}_2 = [-k_x, 0, k_z]$, gdzie:

$$k_x = k \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \quad (2)$$



Rys. 2 – Dwie fale płaskie - geometria.

Pole interferencyjne w płaszczyźnie OXY jest opisane funkcją:

$$U(x) = (e^{i\vec{k}_1\vec{r}} + e^{i\vec{k}_2\vec{r}})|_{z=0} = e^{ik_x x} + e^{-ik_x x} = 2 \cos k_x x \quad (3)$$

Jeżeli w płaszczyźnie OXY umieścimy kliszę fotograficzną, wówczas zarejestrujemy na niej natężenie powyższego pola w postaci:

$$I(x) = |u|^2 = 4 \cos^2 k_x x \quad (4)$$

Maksima interferencyjne zostaną zapisane w postaci ciemnych prążków, równoległych do osi OY , a współrzędne ich środków spełniają równanie:

$$k_x x = m\pi \leftrightarrow x = \frac{m\lambda}{2 \sin \alpha}, \quad (5)$$

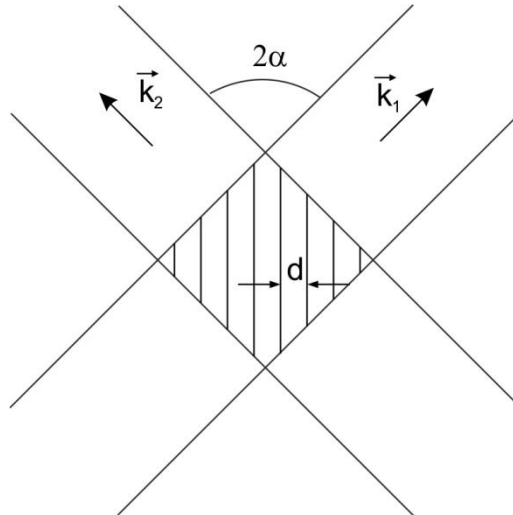
gdzie m jest liczbą całkowitą.

Ponieważ natężenie (4) jest opisane funkcją trygonometryczną, to w ten sposób otrzymamy sinusoidalną siatkę dyfrakcyjną o stałej:

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \quad (6)$$

równej odległości między sąsiednimi prążkami.

Z symetrii zagadnienia zilustrowanego na Rys. 2 wynika, że identyczny układ prążków powstanie, gdy kliszę umieścimy w dowolnej płaszczyźnie równoległej do OXY . W związku z tym możemy stwierdzić ogólnie, że w obszarze interferencji płaskich frontów falowych o wektorach \vec{k}_1 i \vec{k}_2 , tworzących ze sobą kąt α , maksima interferencyjne leżą na płaszczyznach wzajemnie do siebie równoległych. Odległość między sąsiednimi płaszczyznami to właśnie d . Płaszczyzny te są równoległe również do dwusiecznej kąta między wektorami \vec{k}_1 i \vec{k}_2 oraz prostopadłe do płaszczyzny wyznaczonej przez \vec{k}_1 i \vec{k}_2 . Odpowiednia sytuacja jest pokazana na Rys. 3.



Rys. 3 – Płaszczyzny maksimum interferencyjnych.

Jednowymiarową siatkę dyfrakcyjną o stałej d wzdłuż osi OX nazywamy optyczną strukturą periodyczną, spełniającą warunek:

$$T(x) = T(x + d), \quad (7)$$

gdzie funkcję $T(x)$ nazywa się transmitancją. W ogólności transmitancja $T(x,y)$ opisuje płaski, dwuwymiarowy obiekt optyczny, który ma tę własność, że pole $U_-(x,y)$ padające na ten obiekt, jest tuż za nim transformowane w pole $U_+(x,y) = U_-(x,y) \cdot T(x,y)$.

Zatem jeżeli siatka dyfrakcyjna opisana wzorem (7) jest oświetlona falą płaską prostopadle do swojej powierzchni, wówczas można przyjąć $U_-(x,y) = a = const.$ i pole świetlne za siatką jest opisane funkcją $AT(x)$. Ponieważ jednak struktura siatki jest okresowa i jej stała ma wartość d , transmitancja $T(x)$ może być rozwinięta następująco w szereg Fouriera:

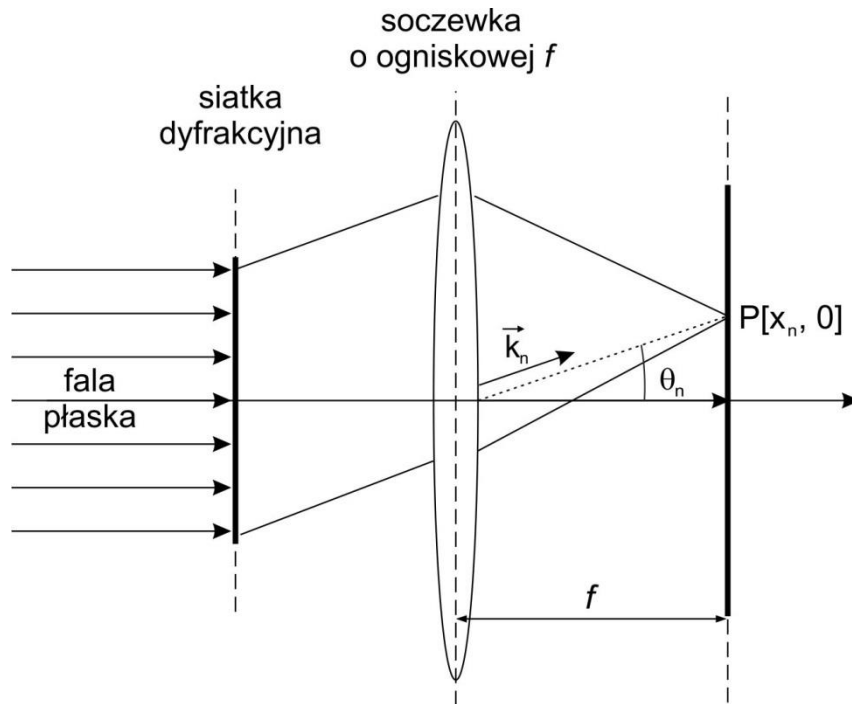
$$T(x) = \sum_n A_n e^{i\frac{2\pi}{d}nx}, \text{ gdzie } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

Z równania (8) wynika, że za powyższą siatką dyfrakcyjną oświetloną falą płaską propagującą się wzdłuż osi OZ (prostopadle do płaszczyzny siatki) rozchodzą się fale płaskie o wektorach falowych:

$$\vec{k}_n = \left[k_x = \frac{2\pi}{d}n, 0, k_z \right], \quad (9)$$

gdzie $k_x^2 + k_z^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$.

Jeżeli na płaszczyźnie siatki umieścimy, równoległe do niej, soczewkę o ogniskowej f , to wtedy wygenerowana fala płaska o wektorze \vec{k}_n zostanie skupiona w punkcie $P[x_n, 0]$ płaszczyzny ogniskowej, jak na Rys. 4.



Rys. 4 – Geometria powstawania widma siatki dyfrakcyjnej.

Zgodnie z zależnością (9):

$$\sin \theta_n = \frac{k_x}{k} = \frac{n\lambda}{d}. \quad (10)$$

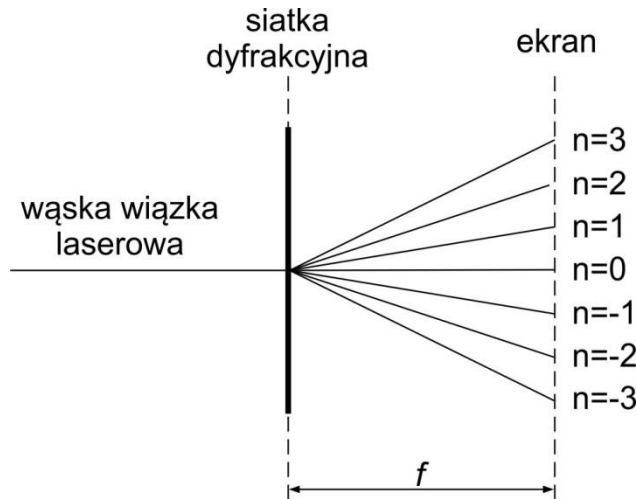
Jeżeli ograniczamy się do małych kątów ugięcia, wówczas $\sin \theta_n \cong \text{tg } \theta_n \cong \frac{x_n}{f}$ i zgodnie z równaniem (10) otrzymujemy:

$$d = \frac{n\lambda}{x_n} f. \quad (11)$$

oraz

$$\lambda = \frac{dx_n}{f} \cdot \frac{1}{n}. \quad (12)$$

Liczbę całkowitą n we wzorach (10) oraz (11) i (12) nazywamy rzędem ugięcia siatki dyfrakcyjnej. W układzie pokazanym na Rys. 3 możemy wyznaczyć stałą siatki d posługując się wzorem (11). Jeżeli duża dokładność nie jest konieczna, możemy usunąć z układu soczewkę i oświetlić siatkę dyfrakcyjną wiązką laserową, reprezentującą w ten sposób bardzo przybliżony fragment fali płaskiej. Za siatką wiązka zostanie podzielona na części odpowiadające różnym rzędem ugięcia n (Rys. 5).



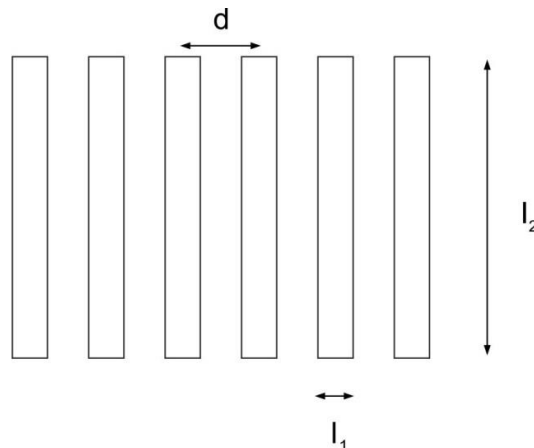
Rys. 5 – Siatka dyfrakcyjna – rzędy ugięcia.

Do obliczenia stałej d można zastosować wzór (11) przyjmując, że x_n jest współrzędną środka wiązki o rzędzie ugięcia n w płaszczyźnie odległej o f od siatki dyfrakcyjnej.

Siatki dyfrakcyjne znalazły największe zastosowanie w spektroskopii do pomiarów długości fali nieznanego promieniowania. W tym celu znając stałą siatki i przeprowadzając pomiar w układzie z Rys. 3 można do obliczeń zastosować wzór (12). Jednakże przedstawiona teoria opisywała obiekt dyfrakcyjny o nieskończenie dużych rozmiarach. W praktyce każda siatka zawiera dużą, ale skończoną liczbę N przestrzennych okresów. Binarna amplitudowa siatka dyfrakcyjna ma transmitancję opisaną wzorem:

$$t(x_1, y_1) = \sum_{n=0}^N \text{rect}\left(\frac{x_1 + nd}{l_1}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1}{l_2}\right). \quad (13)$$

Jej schemat przedstawia Rys. 6.



Rys. 6 – Schemat siatki dyfrakcyjnej.

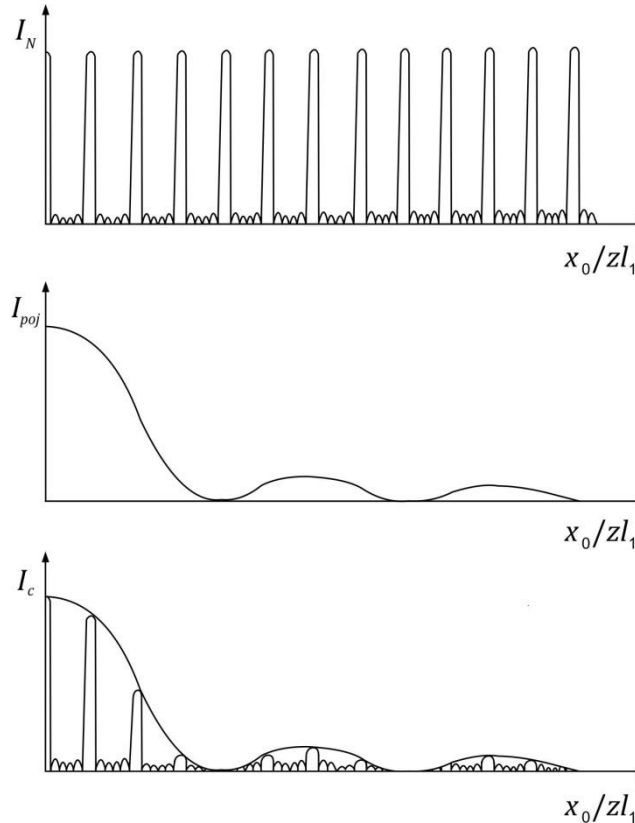
Składa się ona z przezroczystych prostokątów o bokach l_1 i l_2 , odległych od siebie o stałą d . W płaszczyźnie ogniskowej (x_0, y_0) przedstawionej na Rys. 4, scharakteryzowanej przez odległość f , otrzymujemy dla takiej siatki natężenie pola świetlnego:

$$I_c(x_0, y_0) = I_{poj}(x_0, y_0) \cdot I_N = I_{poj}(x_0, y_0) \frac{\sin^2\left(N \frac{x_0 kd}{2f}\right)}{\sin^2\left(\frac{x_0 kd}{2f}\right)}. \quad (14)$$

$I_{poj}(x_0, y_0)$ jest natężeniem pola dyfrakcyjnego od pojedynczej szczeliny prostokątnej z Rys. 6, które z dokładnością do stałej możemy zapisać w postaci:

$$I_{poj}(x_0, y_0) = \text{sinc}^2\left(\frac{x_0 k l_1}{2f}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{y_0 k l_2}{2f}\right), \quad (15)$$

gdzie $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. Wykresy pokazane na Rys. 7 przedstawiają natężenie pola świetlnego pochodzące od czynnika I_N , $I_{poj}(x_0)$ oraz $I_c(x_0)$.



Rys. 7 – Natężenie pola dyfrakcyjnego.

Ze wzoru (14) wynika, że maksimum interferencyjne siatki w n -tym rzędzie ugięcia odpowiada warunkowi:

$$\frac{x_{0n} k d}{2f} = n\pi, \quad (16)$$

co jest równoważne równaniu:

$$x_{0n} = \frac{n\lambda f}{d}. \quad (17)$$

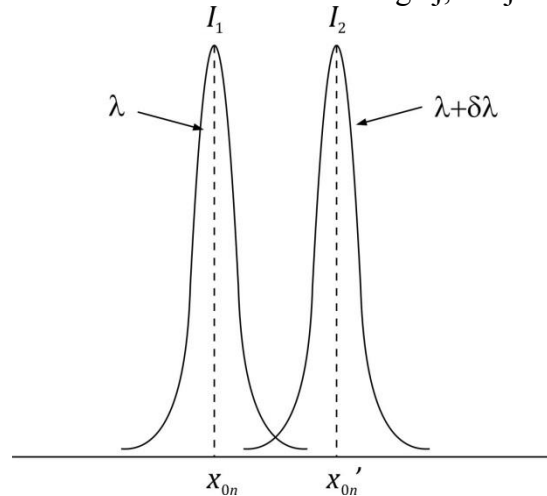
Pierwsze zero wokół powyższego maksimum pojawia się dla współrzędnych x_{0n}' , gdzie zgodnie z zależnościami (14) i (16):

$$\frac{N x_{0n}' k d}{2f} = (Nn + 1)\pi, \quad (18)$$

zatem:

$$x_{0n}' = \frac{n\lambda f}{d} + \frac{\lambda f}{d} \frac{1}{N}. \quad (19)$$

Przyjmuje się w spektroskopii, że dwie sąsiednie linie widmowe o długościach λ i $\lambda + \delta\lambda$ są rozróżnialne przez siatkę dyfrakcyjną w n -tym rzędzie ugięcia, jeśli maximum jednej z nich pokrywa się z najbliższym zerem drugiej, tak jak to pokazano na Rys. 8.



Rys. 8 – Kryterium rozróżnialności prążków.

Inaczej mówiąc linia $\lambda + \delta\lambda$ zostanie jeszcze rozpoznana, jeśli jej maximum wyznaczone zależnością (17) dla $\lambda + \delta\lambda$:

$$x_{0n} |_{\lambda + \delta\lambda} = \frac{nf(\lambda + \delta\lambda)}{d} \quad (20)$$

jest jednocześnie minimum dla λ i określone wzorem (19). Odpowiada to warunkowi $x_{0n} |_{\lambda + \delta\lambda} = x_{0n}' |_{\lambda}$, który można przepisać w formie:

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nn. \quad (21)$$

Iloraz $\lambda/\delta\lambda$ nazywa się rozdzielczością spektroskopową siatki dyfrakcyjnej. Zgodnie ze wzorem (21) przydatność siatki do celów spektroskopii nie zależy od gęstości jej linii, ale od ich całkowitej ilości (N) i rzędu ugięcia (n), dla którego prowadzimy obserwację. Powyższy wynik, chociaż otrzymany dla siatki prostokątnej obowiązuje ogólnie. Na przykład jeśli $N=1000$, $n=3$ wówczas $\lambda/\delta\lambda = 3000$. Oznacza to, że wokół ustalonej przez nas linii λ umiemy w trzecim rzędzie rozróżnić linie o długościach $\lambda \pm \lambda/3000$.

Ze wzorów (17) i (19) wynika, że szerokość pojedynczego maksimum dyfrakcyjnego (czyli odległość między najbliższymi zerami) funkcji I_1 zilustrowanej na Rys. 8, wokół punktu x_{0n} możemy opisać wzorem:

$$2(x_{0n}' - x_{0n}) = \frac{2f\lambda}{d} \frac{1}{N}. \quad (22)$$

Wynika z tego, że szerokość pojedynczego maksimum dyfrakcyjnego maleje wraz ze wzrostem ilości szczelin siatki.

Przebieg ćwiczenia

1) Ustawienie interferometru Macha-Zehndera.

Interferometr Macha-Zehndera oświetlamy falą płaską. Zwierciadła G_1 , M_1 i M_2 ustawiamy w ten sposób, aby wiązki po przejściu przez zwierciadło G_2 możliwie najlepiej na siebie nachodziły. Mierzac odległości wiązek biegnących oboma torami justujemy interferometr, aby różnica dróg optycznych była możliwie jak najmniejsza. Jeżeli obie tworzą wzajemnie niewielki kąt, to na ekranie ustawionym na wyjściu interferometru obserwujemy układ równoległych prążków interferencyjnych o wysokim kontraście.

2) Zapis sinusoidalnej siatki dyfrakcyjnej w interferometrze Macha-Zehndera.

W interferometrze Macha-Zehndera skręcamy jedno ze zwierciadeł, aby otrzymać na ekranie na wyjściu interferometru układ prostoliniowych prążków interferencyjnych o gęstości kilku linii na 1 mm.

W płaszczyźnie obrazu umieszczamy płytę holograficzną i zapisujemy siatkę dyfrakcyjną.

3) Pomiar stałej zapisanej siatki dyfrakcyjnej

Mierzmy doświadczalnie stałą siatki dyfrakcyjnej w układzie z Rys. 4 lub Rys. 5, posługując się wzorem (11). Pomiar weryfikujemy mierząc stałą zapisanej siatki pod mikroskopem.