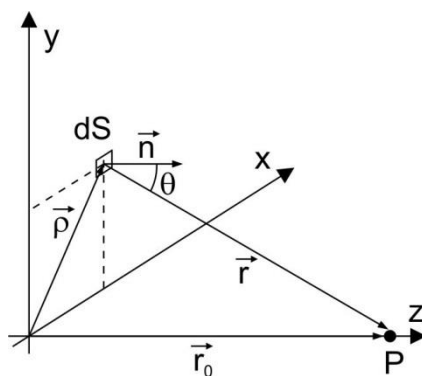


## Ćwiczenie 4

### Strefy Fresnela

#### Wprowadzenie teoretyczne

Wyobraźmy sobie, że fala płaska o długości  $\lambda$ , propagująca się wzdłuż osi  $OZ$  ma na płaszczyźnie  $OXY$  amplitudę  $A$ .



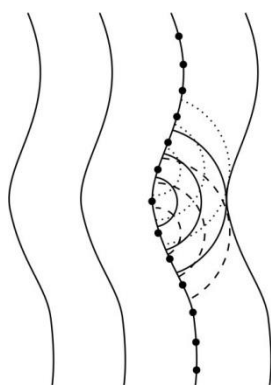
Rys. 1 – Geometria zapisu Fresnela.

Z równania fali płaskiej wiadomo, że amplituda zespolona pola w punkcie  $P[x = 0, y = 0, z = r_0]$ , gdzie  $r_0 = |\vec{r}_0|$ , ma postać:

$$U_0(P) = Ae^{ikr_0}, \quad (1)$$

Spróbujmy teraz obliczyć tę amplitudę, posługując się zasadą Huygensa, tak jak to zrobił Fresnel przy wyprowadzeniu całki dyfrakcyjnej. Całka Fresnela w niezmienniczej formie jest powszechnie używana po dziś dzień, do opisu zjawisk dyfrakcyjnych. Podejście Fresnela jest o tyle ciekawe, że opiera się na prostych postulatach, a strona matematyczna wyprowadzenia jest zredukowana do minimum.

Fresnel założył, że jest spełniona zasada Huygensa zilustrowana na Rys. 2.



Rys. 2 – Ilustracja zasady Huygensa.

Według tej zasady, każdy punkt do którego dociera fala świetlna staje się źródłem wtórnej fali sferycznej. Wtórne fale rozchodzą się w przestrzeni z prędkością  $v$  i po czasie  $t$  ich obwiednie określają nowy kształt frontu falowego. Zasada Huygensa w takiej formie jest bardzo nieprecyzyjna, gdyż odpowiednią obwiednię można znaleźć jedynie graficznie, w przybliżeniu. Fresnel uzupełnił postulat Huygensa w ten sposób, że fale wtórne, dochodząc do dowolnego punktu w przestrzeni interferują ze sobą, tzn. suma ich amplitud określa wypadkową amplitudę w tym punkcie. Ponadto Fresnel zrobił dodatkowe założenie opisujące

amplitudę fal wtórnych w punkcie obserwacji. Wyjaśnimy to dokładnie na naszym przykładzie, pokazanym na Rys. 1. Zgodnie z teorią Fresnela, każdy element fali płaskiej z płaszczyzny  $OXY$  o infinytezymalnym polu  $dS$  jest źródłem fali sferycznej o amplitudzie proporcjonalnej do  $dS$  i do  $A$  (gdzie  $A$  jest amplitudą padającej fali płaskiej). Ponadto Fresnel założył, że amplituda fali sferycznej, dochodzącej do punktu obserwacji  $P$  zależy od czynnika kąтового  $K(\theta)$ , gdzie  $\theta$  jest kątem ugięcia światła, tzn. kątem między wektorem  $\vec{r}$  łączącym element  $dS$  z punktem  $P$  a normalną  $\vec{n}$  do płaszczyzny  $OXY$ . Na podstawie obserwacji doświadczalnych Fresnel przyjął, że czynnik  $K(\theta)$  jest dodatni i zmniejsza się wraz ze wzrostem kąta ugięcia  $\theta$ , przy czym  $K(\theta=0) = 1$  i  $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} K(\theta) = K(\theta = \pi/2) = 0$ . Ostatecznie według Fresnela pole w punkcie  $P$ , związane z elementem  $dS$  pierwotnej fali płaskiej możemy opisać wzorem:

$$dU(P) = K(\theta)\alpha A \frac{e^{ikr}}{r} dS, \quad (2)$$

gdzie  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $r = |\vec{r}|$  oraz  $\alpha = \text{const.}$  jest stałą proporcjonalności, określającą amplitudę wtórnej fali sferycznej. Przyczynki falowe  $dU(P)$  interferują ze sobą, w związku z czym wypadkowe pole w punkcie  $P$  ma wartość:

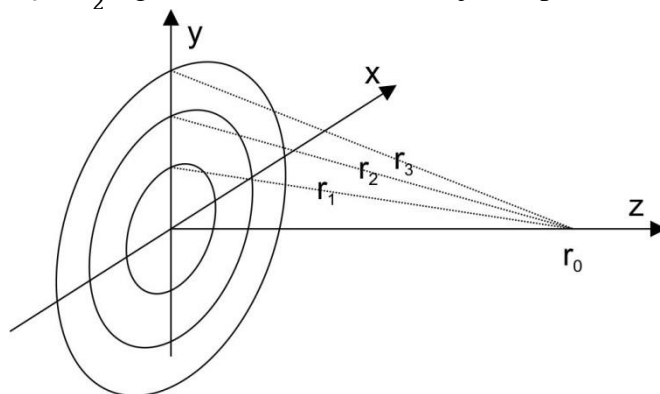
$$U(P) = \alpha \iint K(\theta) A \frac{e^{ikr}}{r} dS, \quad (3)$$

gdzie powyższa całka jest liczona po całej płaszczyźnie  $OXY$ . Jeśli  $\vec{\rho}$  jest promieniem wodzącym elementu  $dS$  (Rys. 1) i  $\rho = |\vec{\rho}|$ , wówczas  $r = \sqrt{r_0^2 + \rho^2}$  i dalej  $rdr = \rho d\rho$ . Obliczając całkę (3) we współrzędnych biegunowych otrzymujemy  $dS = 2\pi\rho d\rho = 2\pi r dr$ . Zatem wyrażenie (3) można przepisać w innej, równoważnej formie:

$$U(P) = 2\pi A \alpha \int_{r_0}^{\infty} K(\theta) e^{ikr} dr. \quad (4)$$

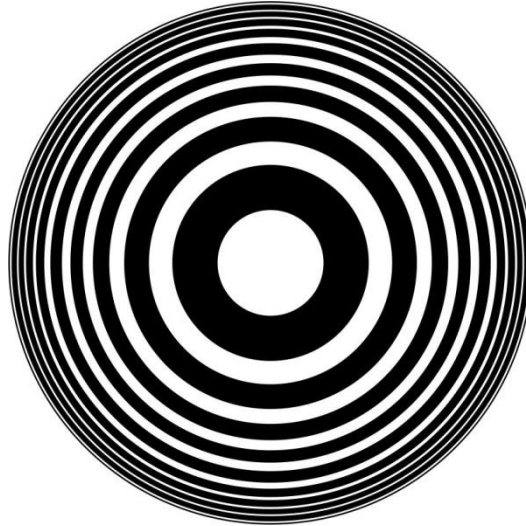
Granice całkowania wyznaczone są przez możliwe długości wektorów  $\vec{r}$ .

Genialność metody Fresnela polegała na sposobie obliczenia całki (4). Podzielił on płaszczyznę  $OXY$  okręgami o środku w punkcie  $O$  i promieniach odpowiadających wektorom  $\vec{r}$  o długościach  $r_m = r_0 + \frac{m\lambda}{2}$  (gdzie  $m = 1, 2, 3 \dots$ ), tak jak to pokazano na Rys. 3.



Rys. 3 – Metoda Fresnela - podział płaszczyzny na okręgi.

W ten sposób na płaszczyźnie  $OXY$  zostały wyznaczone strefy w kształcie pierścieni, takie jak na Rys. 4, gdzie zewnętrzny promień jasnej strefy odpowiada nieparzystej liczbie  $m$ , a zewnętrzny promień ciemnej strefy liczbie parzystej  $m$ .



Rys. 4 – Strefy Fresnela.

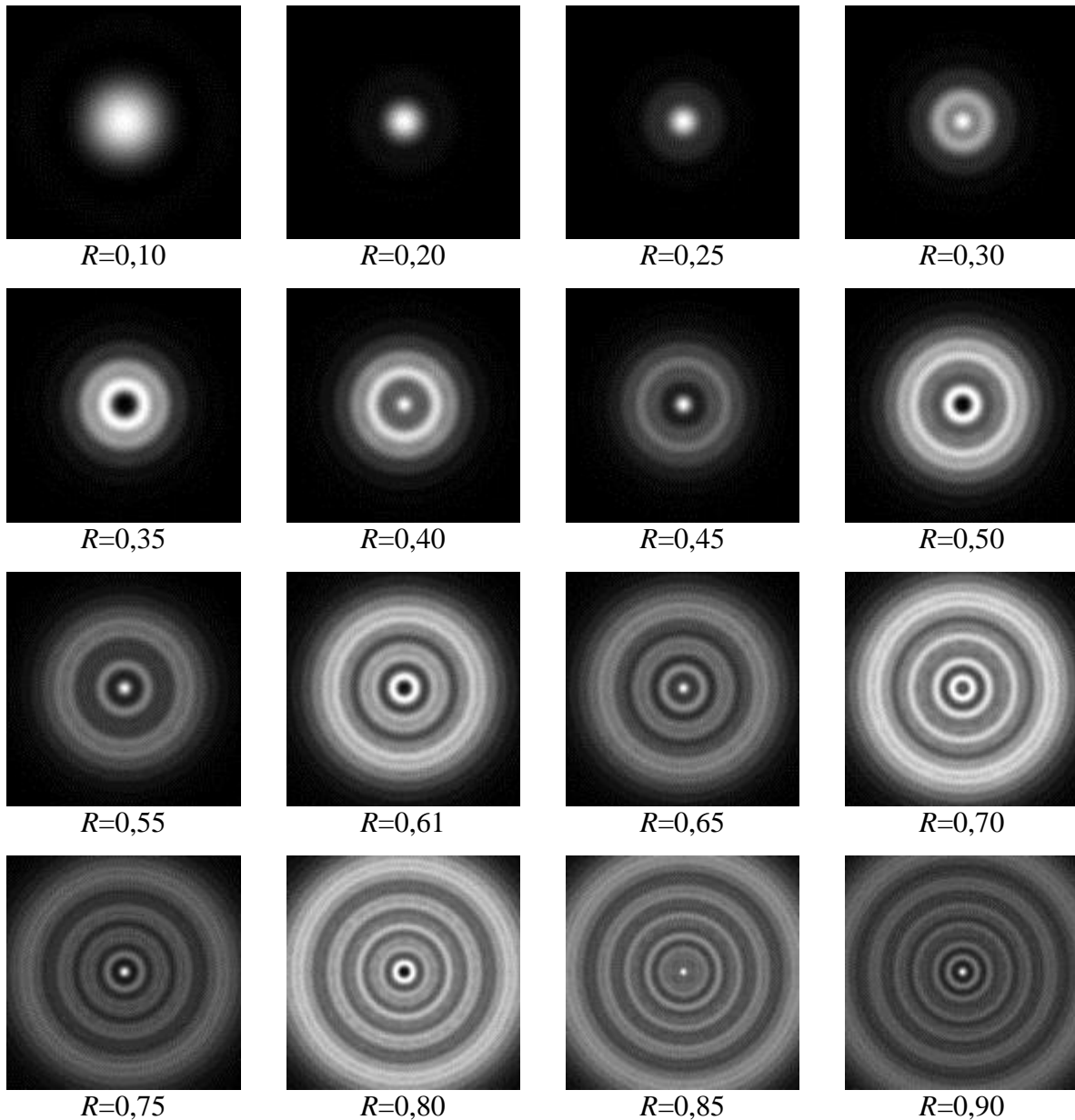
Wkład  $m$ -tej strefy do amplitudy zespolonej pola w punkcie  $P$  odpowiada całce (4) przy granicach całkowania  $r_0 + (m - 1)\frac{\lambda}{2}$  i  $r_0 + (m + 1)\frac{\lambda}{2}$ . Przy czym, ze względu na bardzo małą zmianę kąta  $\theta$  wewnątrz ustalonej strefy, można założyć, że czynnik kątowy  $K(\theta)$  jest stały i przyjmuje wartości  $K_m > 0$ . Wówczas pole w punkcie  $P$ , związane z  $m$ -tą strefą jest określone wyrażeniem:

$$U_m(P) = 2\pi A\alpha \int_{r_0+(m-1)\lambda/2}^{r_0+m\lambda/2} e^{ikr} dr = 2(-1)^{m+1}iA\alpha\lambda K_m e^{ikr_0}. \quad (5)$$

Z powyższego wzoru widać, że pola  $U_m$  mają przeciwne znaki dla parzystych i nieparzystych wskaźników  $m$ . A zatem całkowite pole w punkcie  $P$  może być zapisane w następujący sposób:

$$U(P) = \sum_m U_m(P) = 2iA\alpha\lambda e^{ikr_0}(K_1 - K_2 + K_3 - K_4 + \dots). \quad (6)$$

Ponieważ jednak strefy są wąskie i współczynnik  $K_m$  jest w przybliżeniu równy dla sąsiednich stref, zatem lewa strona wyrażenia (6) równa się w przybliżeniu zero, gdy sumowanie urywa się na parzystym wskaźniku  $m$ . Oznacza to, że kiedy umieścimy w płaszczyźnie  $OXY$  kołową przysłonę o środku w punkcie  $O$  i będziemy zwiększać jej średnicę od wartości zerowej, wówczas zaobserwujemy fluktuacje natężenia światła w punkcie  $P[0, 0, r_0]$ . Początkowo natężenie będzie wzrastać do momentu, gdy przysłona obejmie całą pierwszą strefę ( $I_1=|U_1|^2$ ), następnie będzie maleć do wartości bliskiej zera, kiedy przysłona obejmie pełne 2 strefy ( $I_2=|U_1+U_2|^2 \cong 0$ ). Dalej następuje ponowny wzrost, aż do chwili, gdy w przesłonie pojawią się 3 pełne strefy itd. Ogólnie można stwierdzić, że natężenie jest bliskie zera, kiedy wkład do punktu  $P$  pochodzi od parzystej ilości stref o małych wskaźnikach  $m$ . Rys. 5. przedstawia rozkład pola wokół punktu  $P$  przy przysłonie kołowej o wzrastającej średnicy.



Rys. 5 – Rozkład pola dyfrakcyjnego wokół punktu P, gdy średnica przysłony  $R$  zwiększa się.

Plamki dyfrakcyjne dla  $R=0,35$ ;  $0,50$ ;  $0,61$ ;  $0,70$  i  $0,80$  odpowiadają sytuacji, gdy w przesłonie zawiera się parzysta ilość stref. Ogólnie w przypadku, kiedy ostatnią jest  $m$ -ta strefa, możemy przepisać równanie (6) w formie:

$$U(P) = 2iA\alpha\lambda e^{ikr_0} \left[ \frac{K_1}{2} + \left( \frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2} \right) + \left( \frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2} \right) + \dots + R_m \right], \quad (7)$$

gdzie:

$$R_m = \begin{cases} \frac{K_m}{2}, & \text{gdzie } m - \text{liczba nieparzysta,} \\ \frac{K_{m-1}}{2} - K_m, & \text{gdzie } m - \text{liczba parzysta.} \end{cases} \quad (8)$$

Fresnel przyjął, że współczynnik kątowy  $K_m$  jest średnią arytmetyczną współczynników odpowiadających sąsiednim strefom tzn.  $K_m = (K_{m-1} + K_{m+1})/2$ , co automatycznie powoduje zerowanie się wyrażen w nawiasach okrągłych równania (7). Jeżeli fala płaska

w płaszczyźnie  $OXY$  pozostaje niezaburzona (czyli w przypadku, gdy usuwamy przysłonę), wówczas otrzymujemy w zależnościach (7) i (8):

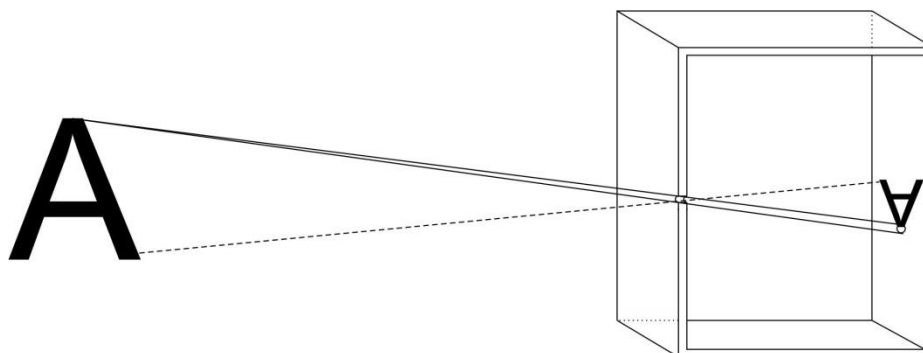
$$m \rightarrow \infty, \theta_m \rightarrow \pi/2, K_m \rightarrow 0, R_m \rightarrow 0.$$

W takich przypadkach wzór (7) musi być zgodny z równaniem (1), tzn.:

$$U(P) = \frac{U_1}{2} = iK_1 A \alpha \lambda e^{ikr_0} = A e^{ikr_0}, \quad (9)$$

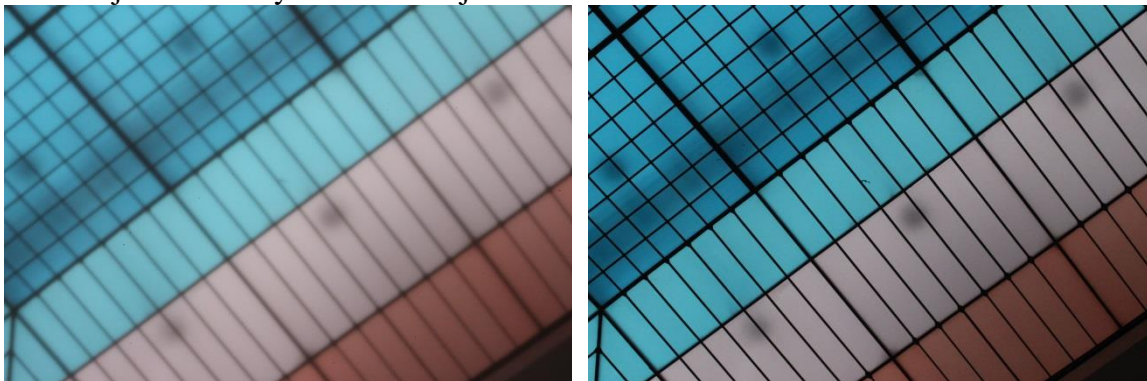
czyli amplituda fali niezaburzonej w punkcie  $P$  jest równa połowie amplitudy pola utworzonego jedynie przez pierwszą strefę Fresnela. Inaczej mówiąc dla odpowiednio małej przysłony kołowej obserwujemy w punkcie  $P$  natężenie światła 4-krotnie większe niż w przypadku niezaburzonej fali płaskiej. Doświadczenie potwierdza powyższy wniosek, a co za tym idzie założenia Fresnela. Ponadto przeprowadzona analiza pozwala wyznaczyć współczynnik  $\alpha$  w całce dyfrakcyjnej (3). Przyjmując w wyrażeniu (9)  $K_1(\theta \neq 0) = 1$  dostajemy  $\alpha = 1/i\lambda$ . Analityczna postać współczynnika kąowego  $K(\theta)$  w równaniu (3) została podana dopiero później przez Kirchhoffa, tym niemniej całka dyfrakcyjna Fresnela ze znalezionym przez niego parametrem  $\alpha$  prowadzi do prawidłowych wniosków. Ze względu na swoją prostotę jest najczęściej stosowana w opisie zjawisk dyfrakcyjnych.

W roku 1818 Fresnel zgłosił swoją pracę potwierdzającą falową naturę światła na konkurs Francuskiej Akademii Nauk, którego tematem była dyfrakcja światła. W jury komitetu zasiadali Pierre Laplace, Jean B. Biot, Simon D. Poisson, Dominique F. Arago oraz Joseph L. Gay – Lussac. Poisson, który był zagorzałym zwolennikiem teorii korpuskularnej, wysnuł na podstawie teorii Fresnela, że pośrodku cienia nieprzeźroczystej, kulistej przeszkody powinna się pojawić jasna plamka. Istnienie plamki zostało potwierdzone doświadczalnie przez F. Arago. Istnienie plamki Arago można wyjaśnić w oparciu o zasadę Huygensa – każdy punkt znajdujący się na obwodzie kołowej przeszkody staje się źródłem wtórnej fali sferycznej rozbieżnej. Fale te ulegają interferencji po przebyciu identycznej odległości do punktu znajdującego się na osi optycznej. Powstaniu plamki Arago odpowiada sytuacja, w której odsłonięte są wszystkie strefy Fresnela, przy czym liczymy je od brzegu przeszkody kołowej. W związku z tym w środku obszaru cienia otrzymujemy w przybliżeniu natężenie równe natężeniu fali padającej. W przeciwnej sytuacji, po zastosowaniu przysłony kołowej uzyskamy tzw. Kamerę Obscurę. Obrazowanie tą metodą wykorzystywane jest w kamerach otworkowych. Kamera otworkowa to światłoszczelna skrzynka z małym otworkiem w jednej ścianie umożliwiającą uzyskanie na przeciwległej ścianie obrazu przedmiotu. Otworek spełnia rolę obiektywu. Promienie światła wpadające przez otwór tworzą na ścianie rzeczywisty, odwrócony i pomniejszony obraz obiektu (Rys. 6) . Poprzez umieszczenie naprzeciw otworka kliszy fotograficznej możliwe jest uzyskanie zdjęcia.



Rys. 6 – Kamera otworkowa (Camera Obscura).

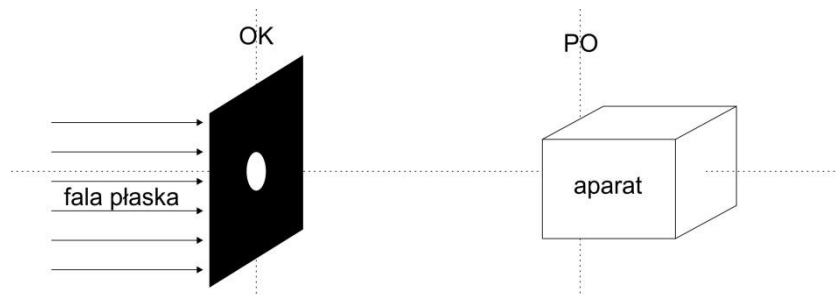
Do pewnego stopnia, im mniejszy otworek zastosujemy, tym większą ostrość będzie miał obraz. Wraz ze zmniejszaniem otworka, zmniejsza się również ilość światła wpadająca do wnętrza przyrządu, tym samym czas ekspozycji musi ulec wydłużeniu bądź należy użyć bardziej czułego materiału światłoczułego. Nie możliwe jest jednak zmniejszanie w nieskończoność wielkości otworka. Przy otworkach o wielkościach rzędu długości fali, dyfrakcja ma ogromny wpływ na pogorszenie ostrości uzyskanych obrazów. Dokładniejsza analiza prowadzi do wniosku, że optymalną jakość obrazu otrzymuje się, gdy rozmiar przysłony odpowiada pierwszej strefie Fresnela (licząc dla odległości między otworkiem a ekranem). Obrazy uzyskane tą techniką charakteryzuje miękkość, rozmycie, bardzo duża głębia ostrości oraz w przypadku obrazów barwnych, pastelowa kolorystyka. Dla porównania zamieszczone zostało poniżej zdjęcie przedstawiające obrazowanie przy użyciu kamery otworekowej oraz kamery soczewkowej.



Rys. 7 – Zdjęcie wykonane kamerą otworekową (po lewej) i kamerą soczewkową (po prawej).

### Przebieg ćwiczenia

- 1) Pomiar średnicy otworków kołowych na podstawie obserwacji ich obrazów dyfrakcyjnych. Ćwiczenie przeprowadzamy według schematu pokazanego na Rys. 8.

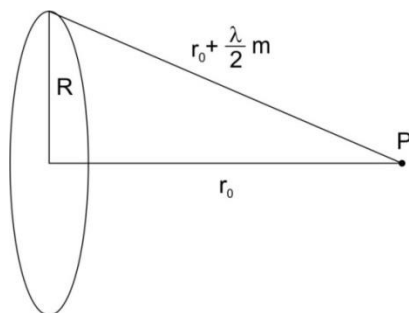


Rys. 8 – Schemat układu do obserwacji obrazów dyfrakcyjnych – stref Fresnela.

Otworek kołowy  $OK$  oświetlamy prostopadle falą płaską, środek obrazu dyfrakcyjnego obserwujemy bezpośrednio na matrycy aparatu. W takim układzie płaszczyzną obserwacji jest płaszczyzna matrycy światłoczułej na rysunku oznaczona jako  $PO$ . Przesuwając aparat w kierunku propagacji fali płaskiej zmieniamy odległość  $r_0$  i wewnątrz otworka pojawia się zmienna ilość stref Fresnela. Dla otworka o promieniu  $R$ , odległość  $r_0$  odpowiadająca  $m$  pełnym strefom spełnia warunek:

$$r_0 = \frac{R^2}{m\lambda} - \frac{\lambda}{4} m, \quad (10)$$

zilustrowany na Rys. 9.



Rys. 9 – geometria powstawania  $m$  pełnych stref Fresnela.

Ze względu na nierówność  $r_0 \gg \lambda$  otrzymujemy:

$$r_0 \cong \frac{R^2}{m\lambda}, \quad (11)$$

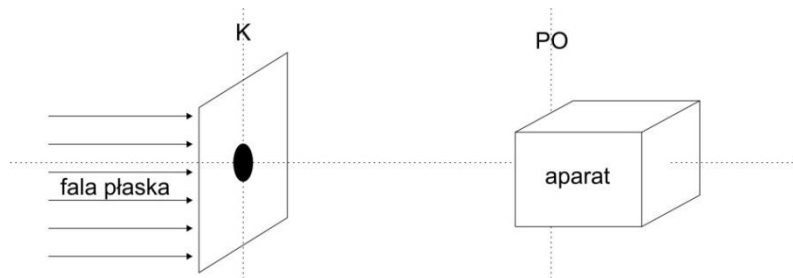
czyli:

$$R = \sqrt{m\lambda r_0}. \quad (12)$$

Ustawiając aparat dostatecznie daleko od otworu  $OK$  (w odległości 2 - 3 m) i przesuując go w kierunku otworu, obserwujemy obrazy dyfrakcyjne odpowiadające coraz większej liczbie stref Fresnela zawartych wewnątrz otworu. Wyznaczamy doświadczalnie odległości  $r_0$  dla małej ilości pełnych parzystych stref ( $m = 2, 4, 6$ ). Przypadki te odpowiadają intensywnej ciemnej plamce w środku obrazu dyfrakcyjnego (natężenie światła spada do zera). Następnie obliczamy promień  $R$  ze wzoru (12) przy znanej długości fali.

- 2) Porównanie wyników z punktu 1 z pomiarami średnic otworków pod mikroskopem.
- 3) Zaobserwowanie plamki Arago.

W celu zaobserwowania plamki Arago (Poissona) należy zestawić układ według Rys. 10.



Rys. 10 – Układ do obserwacji plamki Poissona.

Do szkiełka należy przymocować przeszkodę kołową  $K$  o równych brzegach (może to być mała kulka bądź moneta 2gr). Następnie należy oświetlić ją prostopadle falą płaską i powstałą plamkę Arago zarejestrować na matrycy światłoczułej aparatu cyfrowego.

- 4) Zarejestrowanie obrazowania Camera Obscura.

W celu wykonania tej części ćwiczenia należy wykonać mały otworek kołowy w nieprzezroczystym materiale (papier, folia aluminiowa itp.). Następnie należy umieścić ten otworek zamiast obiektywu aparatu tak, aby na matrycę padało światło przechodzące tylko przez ten otworek. Uzyskany obraz rejestrujemy na matrycy aparatu cyfrowego, ustawionej w płaszczyźnie powstawania ostrego obrazu. Przykładowo dla otworu o promieniu 1mm i długości fali 632,8nm korzystając ze wzoru (12) uzyskujemy odległość ostrego obrazowania około 1,5m. Natomiast dla otworu o średnicy 0,5mm odległość ta ma wartość około 40cm.