

## Ćwiczenie 10/11

### Holografia syntetyczna - płytki strefowe.

#### Wprowadzenie teoretyczne

W klasycznej holografii optycznej, gdzie hologram powstaje w wyniku rejestracji pola interferencyjnego, rekonstruuje się jedynie takie fronty falowe, które potrafimy sformować w układzie optycznym. Poza odtworzeniem realnie istniejących obiektów, możliwości klasycznej holografii optycznej ograniczają się do generacji najprostszych pól, jak fale sferyczne, cylindryczne itp. Dużo większe możliwości oferuje w tym zakresie holografia syntetyczna. W tym przypadku hologram zostaje wytworzony przy pomocy urządzenia formującego żądany układ prążków struktury dyfrakcyjnej, który zastępuje prążki interferencyjne klasycznego hologramu. Wymienionym urządzeniem może być w najprostszym przypadku ploter, drukarka laserowa, a w bardziej zaawansowanych aranżacjach naświetlarka laserowa czy też działo elektronowe. Hologram syntetyczny jest tworzony z reguły przy pomocy komputera, który steruje procesem formowania elementu dyfrakcyjnego, a w bardziej złożonych przypadkach służy również do obliczania jego transmitancji. Z tego powodu nazwa holografia syntetyczna jest stosowana wymiennie z terminem holografia komputerowa.

Holografia syntetyczna pozwala teoretycznie zrekonstruować dowolne monochromatyczne fronty falowe. Głównym ograniczeniem jest tutaj pojemność i szybkość działania komputerów oraz rozdzielczość urządzeń generujących rozkład prążków danych elementów dyfrakcyjnych. Z drugiej strony szybki rozwój techniki komputerowej i litografii (zarówno laserowej, jak i elektronowej) sprawia, że wyżej wymienione ograniczenia stają się coraz mniej istotne. Ponadto hologramy komputerowe generują dużo mniejsze szумы koherentne niż hologramy optyczne, a ich wydajność dyfrakcyjna jest większa. Elementy syntetyczne mogą być wykorzystywane nie tylko w zakresie widzialnym widma elektromagnetycznego ale również w podczerwieni, nadfiolecie, w zakresie promieni X.

Holografia syntetyczna jest jedną z najnowocześniejszych gałęzi optyki falowej. Obecnie prowadzone są na całym świecie intensywne badania (teoretyczne i doświadczalne) dotyczące projektowania, wytwarzania i praktycznego wykorzystywania hologramów komputerowych. Dotychczas holografia syntetyczna znalazła zastosowanie w następujących dziedzinach:

1. Laserowa obróbka materiałów: cięcie, topienie, spawanie, znakowanie wyrobów.
2. Korekcja aberracji układów optycznych.
3. Transformowanie i profilowanie wiązek świetlnych.
4. Niekonwencjonalne obrazowanie:
  - obrazowanie z powiększoną głębią ostrości
  - obrazowanie w podczerwieni, nadfiolecie, w zakresie promieni X.
5. Metrologia: precyzyjne wyznaczanie linii prostych, precyzyjne pozycjonowanie.
6. Informatyka optyczna: rozpoznawanie obiektów optycznych, poprawianie jakości zdjęć fotograficznych.

#### Kodowanie fazowych frontów falowych.

Istnieją różne sposoby wykonywania hologramów komputerowych. W ogólności jest to dość skomplikowany problem, wymagający odrębnych studiów. Poświęcono mu wiele

książek i artykułów w czasopismach naukowych. Poniżej przedstawiamy metodę realizacji hologramów syntetycznych, rekonstruujących fazowe fronty falowe. Jest ona stosunkowo prosta, a zarazem efektywna i jej poznanie nie wymaga specjalnego przygotowania wstępnego z dziedziny optyki dyfrakcyjnej.

Fazowy front falowy charakteryzuje się stałym natężeniem w płaszczyźnie hologramu, w związku z czym jego amplituda zespolona ma postać:

$$U(\vec{r}) = e^{i\phi(\vec{r})}, \quad (1)$$

gdzie  $\vec{r} = [x, y]$  jest promieniem wodzącym w płaszczyźnie hologramu. Pole opisane równaniem (1) jest kodowane w postaci cienkiego elementu dyfrakcyjnego o transmitancji:

$$T(\vec{r}) = g[\phi(\vec{r})], \quad (2)$$

przy czym funkcja  $g(\phi)$  jest periodyczną, zespoloną funkcją fazy  $\phi$ , mającą okres  $2\pi$ . Spełnia ona warunek  $0 \leq |g(\phi)| \leq 1$ , gdyż zgodnie ze wzorem (2) określa transmitancję elementu dyfrakcyjnego. Ze względu na okresowość funkcję  $g(\phi)$  możemy rozwinąć w szereg Fouriera:

$$g(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{in\phi}, \quad (3)$$

dla  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Wynika z tego, że transmitancja (2) hologramu syntetycznego może być przedstawiona w innej równoważnej postaci:

$$T(\vec{r}) = \sum_n A_n \cdot e^{in\phi(\vec{r})}, \quad (4)$$

gdzie zgodnie z analizą fourierowską współczynniki  $A_n$  są określone wzorem:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) \cdot e^{-in\phi} \cdot d\phi \quad (5)$$

i spełniają nierówność wynikającą z twierdzenia Parsevala:

$$\sum_n |A_n|^2 \leq 1. \quad (6)$$

Z równania (4) wynika, że hologram syntetyczny rekonstruuje fronty falowe  $e^{in\phi(\vec{r})}$ . Liczba całkowita  $n$  określa w tym przypadku rząd ugięcia elementu dyfrakcyjnego. Amplituda odpowiadająca  $n$ -temu rzędowi ma wartość  $A_n$ . Ponieważ różne detektory, a w tym oko ludzkie, są czułe na natężenie pola świetlnego, w związku z tym wydajność hologramu w  $n$ -tym rzędzie ugięcia określa się jako  $\eta_n = |A_n|^2$ . Zatem interesujący nas front falowy  $e^{i\phi(\vec{r})}$  opisany wzorem (1) jest wygenerowany z wydajnością  $\eta_1 = |A_1|^2$ . W holografii syntetycznej najbardziej interesujące są te metody kodowania, gdzie  $|A_n| \approx 1$  co zapewnia wydajność dyfrakcyjną bliską 100%. W dalszej części opisu przedstawiamy najczęściej stosowane sposoby kodowania fazy.

## Kodowanie amplitudowe binarne

W tym przypadku:

$$g(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{gdzie } \phi \in (-\pi, 0) \\ 0, & \text{gdzie } \phi \in (0, \pi) \end{cases}. \quad (7)$$

Zgodnie ze wzorami (5) i (7) wydajności dyfrakcyjne mają wartość:

$$\eta_n = |A_n|^2 = \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{2}}{(\pi n)^2}. \quad (8)$$

Jeżeli założymy, że front falowy o amplitudzie zespolonej:

$$U_0(\vec{r}) = e^{-\frac{ikr^2}{2f}}, \text{ gdzie } \phi(\vec{r}) = -\frac{kr^2}{2f} \quad (9)$$

$r^2 = x^2 + y^2$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , a  $\lambda$  jest długością fali światła, dla której hologram ma być zaprojektowany, to interpretacja wzoru (8) nieco się uprości. Ze względu na fakt, że wzór (9) przedstawia jednocześnie transmitancję cienkiej soczewki o ogniskowej  $f$  w przybliżeniu przyosiowym to równanie (4) możemy teraz zapisać w postaci:

$$T_0(\vec{r}) = \sum_n A_n \cdot e^{\frac{ikr^2}{2(\frac{f}{n})}} \quad (10)$$

gdzie współczynniki  $A_n$  występują we wzorze (8). Po oświetleniu elementu dyfrakcyjnego o transmitancji  $T_0(\vec{r})$  falą płaską zostają wygenerowane:

- fronty sferyczne zbieżne  $e^{-\frac{ikr^2}{2(\frac{f}{n})}}$  (dla  $n > 0$ ), skupiające się w odległości  $\frac{f}{n}$  za hologramem
- fronty sferyczne rozbieżne  $e^{\frac{ikr^2}{2(\frac{f}{n})}}$  ( $n < 0$ ), o ogniskach pozornych w odległości  $\frac{f}{n}$  przed hologramem.

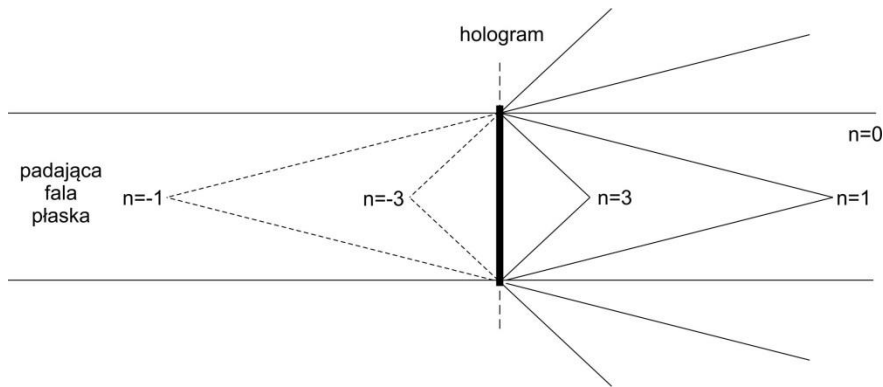
Dla  $n = 0$  otrzymujemy nieugiętą falę płaską.

Zgodnie z równaniem (8),  $A_n = 0$  kiedy  $n$  jest liczbą parzystą i  $n \neq 0$ . Procentowe wydajności dyfrakcyjne struktur amplitudowych binarnych dla małych wartości  $|n|$  są zamieszczone w Tab. 1.

Tab. 1 – Wydajność dyfrakcyjna struktur amplitudowych binarnych.

$n$	$\eta_n$
0	25,0%
$\pm 1$	10,1%
$\pm 3$	1,1%
$\pm 5$	0,4%

Odpowiednia geometria odtworzenia hologramu falą płaską dla rzędów ugięcia o wartości  $n = 0, \pm 1, \pm 3$  jest pokazana na Rys. 1.



Rys. 1 – Geometria odtworzenia hologramu dla różnych rzędów ugięcia ( $n = 0, \pm 1, \pm 3$ ).

Interesujący nas front falowy (9) zostaje zrekonstruowany ze stosunkowo małą wydajnością  $|A_1|^2 \cdot 100\% \cong 10\%$  (tym niemniej jest ona i tak większa od wydajności cienkich hologramów zapisywanych w układach optycznych, która stanowi jedynie około 6% padającego frontu falowego). Z punktu widzenia holografii syntetycznej pole w pozostałych rzędach ugięcia  $n \neq 1$  tworzy zbędny szum.

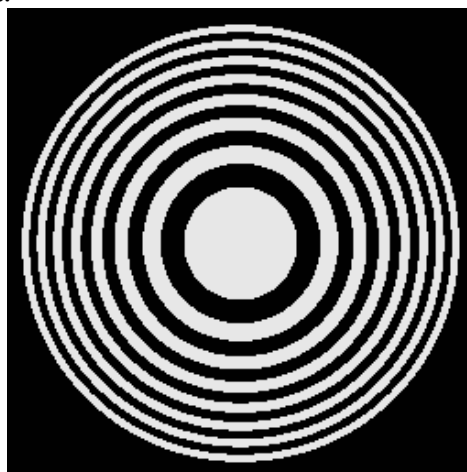
Z drugiej strony transmitancja hologramu zakodowanego binarnie jest bardzo prosta. Ze wzorów (8), (7) i (9) wynika, że:

$$T_0(\vec{r}) = \begin{cases} 1, r \in (\sqrt{m\lambda f}, \sqrt{(m+1)\lambda f}), m = 2n \text{ lub } m = 0 \text{ dla } n \in N \\ 0, r \in (\sqrt{m\lambda f}, \sqrt{(m+1)\lambda f}), m = 2n + 1 \text{ dla } n \in N \end{cases} \quad (11)$$

W miejscach, gdzie  $T_0(\vec{r}) = 0$  element jest nieprzeźroczysty, zaś kiedy  $T_0(\vec{r}) = 1$  element jest całkowicie przeźroczysty.

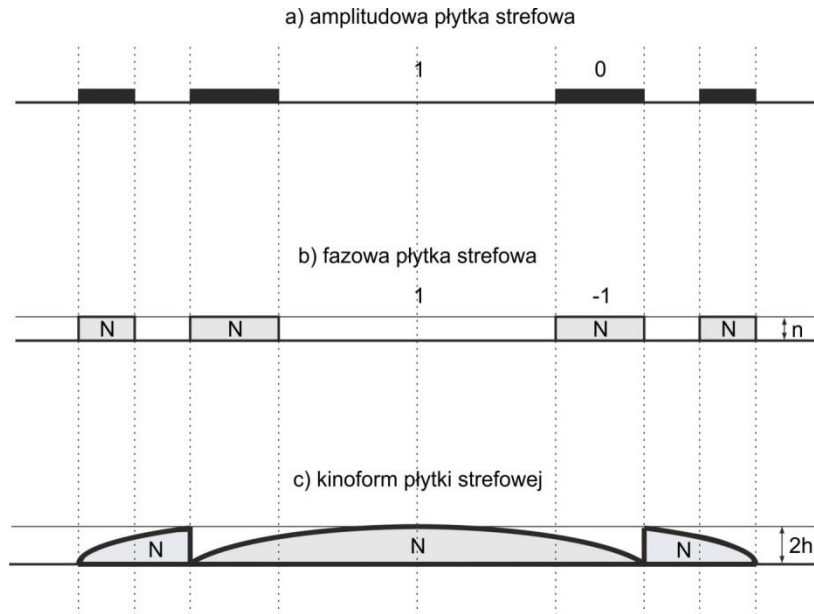
Graficznie taki hologram można przedstawić jako zbiór jasnych i ciemnych pierścieni o promieniach wyznaczonych w wyrażeniu (11).

Odpowiednia struktura dyfrakcyjna jest pokazana na Rys. 2 i ma geometrię identyczną z wcześniej poznanymi strefami Fresnela. Z tego powodu nosi nazwę amplitudowej płytki strefowej lub płytki Fresnela.



Rys. 2 – Amplitudowa płytka strefowa.

W przypadku kodowania amplitudowego binarnego przekrój hologramu przez jego środek ilustruje schematycznie Rys. 3a.



Rys. 3 – Przekrój hologramu zakodowanego: a) amplitudowo binarnie, b) fazowo binarnie oraz c) w postaci kinoformu.

### Kodowanie fazowe binarne.

W tym przypadku:

$$g(\phi) = \begin{cases} e^{i\pi} = -1, & \text{gd}y \phi \in (-\pi, 0) \\ 1, & \text{gd}y \phi \in (0, \pi) \end{cases} \quad (12)$$

Wydajności dyfrakcyjne są na podstawie wzorów (5) i (12) określone następująco:

$$\eta_n = \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{2}}{(\pi n)^2} \cdot [1 - (-1)^n]^2 \quad (13)$$

Dla parzystych liczb  $n$  ( w tym  $n = 0$  ) mamy  $\eta_n = 0$ . Procentowe wydajności dyfrakcyjne dla pierwszych nieparzystych rzędów ugięcia przedstawia Tab. 2.

Tab. 2 - Wydajność dyfrakcyjna struktur fazowych binarnych.

$n$	$\eta_n$
$\pm 1$	40.4%
$\pm 3$	4.4%
$\pm 5$	1.6%

Interesujący nas front falowy opisany równaniem (1) zostaje wygenerowany z wydajnością  $|A_1|^2 \cdot 100\% \cong 40\%$ , czyli cztery razy większą niż przy kodowaniu amplitudowym. Fazowa płytka strefowa dla pola wyrażonego wzorem (9) ma identyczny rozkład stref jak poprzednio. Przekrój płytki jest pokazany na Rys. 3b.

Zgodnie z równaniem (12) transmitancja binarnego hologramu fazowego przyjmuje wartości -1 i 1. W miejscach o transmitancji 1 element jest całkowicie płaski i przezroczysty, fragmenty hologramu o transmitancji -1 zmieniają dodatkowo fazę padającego pola świetlnego o  $\pi$ . W praktyce przesunięcie fazowe realizuje się przez naniesienie na płaszczyznę hologramu przezroczystego materiału o współczynniku załamania światła równego  $N$  dla wybranej długości fali  $\lambda$ . Sytuację tę ilustruje Rys. 3b. Fala odtwarzająca

hologram pada prostopadle do płaszczyzny  $P$ . W płaszczyźnie wyjściowej  $P'$  za strukturą dyfrakcyjną, materiał fazowy o grubości  $h$  dodatkowo wydłuża drogę optyczną promieni świetlnych o  $\lambda/2$ , co odpowiada przesunięciu fazowemu  $\pi$ . Wartość  $h$  jest wyznaczona ze wzoru:

$$(N - 1) \cdot h = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow h = \frac{\lambda}{2(N - 1)}. \quad (14)$$

Z powyższego wynika, że  $h \approx \lambda$ . Ze względu na małą długość fali  $\lambda$ , można hologram fazowy traktować jako bardzo cienki i praktycznie płaski element.

## Kinoform

Kinoform jest elementem dyfrakcyjnym rekonstruującym żądany fazowy front falowy z wydajnością 100%. Odpowiada on funkcji  $g(\phi)$  zapisanej w następujący sposób:

$$g(\phi) = e^{i\phi}, \quad \text{gd}y \phi \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (15)$$

Zgodnie ze wzorem (15) i zależnością (5) otrzymujemy  $\eta_1 = 1$  i  $\eta_{n \neq 1} = 0$ . Kinoform jest elementem fazowym o bardziej skomplikowanym kształcie prążków niż w przypadku hologramu binarnego fazowego. Przekrój kinoformowej płytki strefowej dla sferycznej fali (9) ilustruje Rys. 3c. Naniesiony na płytkę materiał charakteryzuje się grubością zmieniającą się w sposób ciągły w zakresie odpowiednich stref Fresnela. Fala płaska odtwarzająca hologram, padająca prostopadle do płaszczyzny  $P$  zostaje przetransformowana w płaszczyźnie  $P'$  w pole fazowe opisane dokładnie wyrażeniem (9). Stąd teoretyczna wydajność elementu to aż 100%. Ponieważ kinoform zmienia fazę w zakresie od 0 do  $2\pi$ , zatem największa grubość materiału fazowego ma teraz wartość  $2h$  i jest 2 razy większa niż dla binarnej płytki fazowej (Rys. 3b, c). Złożona struktura pojedynczego prążka fazowego sprawia, że wytworzenie kinoformu wymaga zaawansowanej technologii. Z drugiej strony najnowsze techniki litograficzne pozwalają już obecnie na wytwarzanie kinoformów z wydajnością dyfrakcyjną powyżej 90%.

## Przebieg ćwiczenia

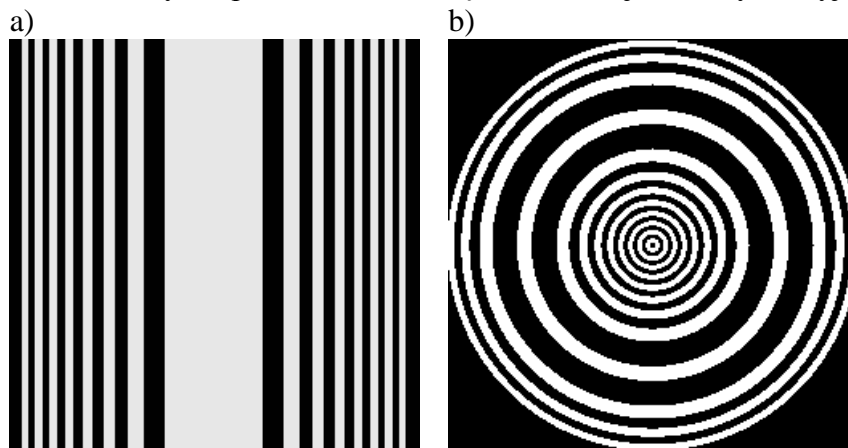
Niniejsze ćwiczenie dotyczy wykonania amplitudowych płytek strefowych rekonstruujących fazowe fronty falowe o następujących amplitudach:

- 1)  $U_1(\vec{r}) = e^{-\frac{ikr^2}{2f}}$  - płytka strefowa Fresnela  
(lub sferyczna płytka strefowa) opisana wcześniej wzorem (8). Generuje ona falę sferyczną zbiegającą się w odległości  $f$  za hologramem. Element jest dyfrakcyjnym odpowiednikiem soczewki sferycznej.
- 2)  $U_2(\vec{r}) = e^{-\frac{ikx^2}{2f}}$  - cylindryczna płytka strefowa  
Rekonstruuje zbieżną falę cylindryczną i jest dyfrakcyjnym odpowiednikiem soczewki cylindrycznej o ogniskowej  $f$ .
- 3)  $U_3(\vec{r}) = e^{-\frac{ik(r-r_0)^2}{2f}}$  - toroidalna płytka strefowa  
(lub kołowa płytka strefowa). Element taki oświetlony falą płaską ogniskuje światło w okrąg o promieniu  $r_0$ . Płaszczyzna ogniskowa leży w odległości  $f$  za płytką. Toroidalna płytka strefowa ma swój odpowiednik refrakcyjny w postaci cienkiego plasterka wyciętego ze szklanego walca zwiniętego w "obwarzanek". Taka refrakcyjna struktura jest bardzo trudna do wykonania i wymaga zaawansowanej technologii

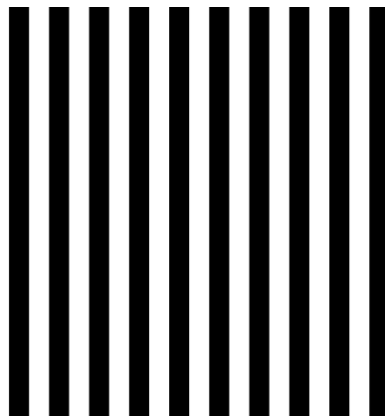
obróbki szkła. Przykład ten ilustruje użyteczność elementu dyfrakcyjnego, którego realizacja nie następuje specjalnych trudności.

Wykonanie ćwiczenie przebiega w następujących etapach.

- 1) Wydrukowanie na drukarce laserowej binarnych amplitudowych masek do realizacji płytek strefowych. Ta część jest wykonywana przy pomocy asystenta prowadzącego zajęcia. Rys. 2 przedstawia wydruk komputerowy dla płytki strefowej Fresnela. Odpowiednie maski dla płytki cylindrycznej i płytki toroidalnej są pokazane na Rys. 4a, b. Natomiast Rys. 5 przedstawia maskę dla binarnej siatki dyfrakcyjnej.



Rys. 4 – Binarne amplitudowe rozkłady płytek strefowych: a) cylindrycznej i b) toroidalnej.



Rys. 5 – Siatka amplitudowa binarna.

- 2) Modelowanie odpowiedzi impulsowych i obrazowania za pomocą zaprojektowanych struktur.
- 3) Wykonanie płytek strefowych przez pomniejszenie wydrukowanych masek na kliszach fotograficznych.
- 4) Odbielenie masek w celu uzyskania modulacji fazowej binarnej.
- 5) Sprawdzenie działania otrzymanych płytek strefowych w układzie optycznym:
  - a. zmierzenie ogniskowych elementów dyfrakcyjnych dla różnych rzędów ugięcia,
  - b. wyznaczenie wydajności dyfrakcyjnej binarnej amplitudowej oraz fazowej siatki dyfrakcyjnej w +1, 0, -1 rzędzie ugięcia,
  - c. wykorzystanie płytki strefowej do obrazowania (jako dyfrakcyjnego odpowiednika soczewki sferycznej).