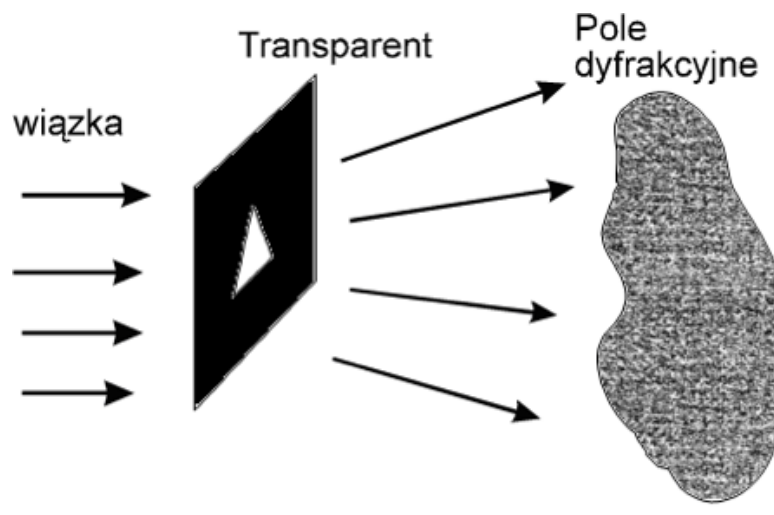


## Ćwiczenie 7

### Samoobrazowanie obiektów periodycznych

#### Wprowadzenie teoretyczne

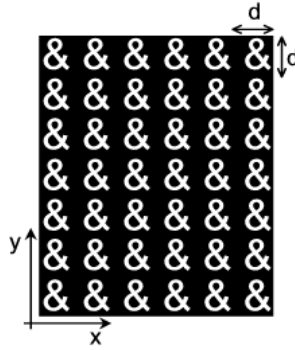
Jeśli płaski obiekt optyczny np. transparent z czarno-białym wzorem (dokładniej mówiąc z przezroczysto-nieprzezroczystym wzorem) oświetlimy wiązką laserową wówczas za transparentem pojawi się pole dyfrakcyjne, którego obraz widoczny na ekranie różni się w ogólności kształtem od transparentu wejściowego - Rys. 1.



Rys. 1.

Okazuje się jednak, że istnieją pewne obiekty, których pole dyfrakcyjne w odpowiedniej odległości za płaszczyzną transparentu jest wiernym obrazem obiektu. Obraz ten otrzymujemy bez udziału żadnych obrazujących elementów optycznych, jak np. soczewek czy zwierciadeł sferycznych.

Z tego względu zjawisko to nazywa się zjawiskiem samoobrazowania, a pole dyfrakcyjne odtwarzające transparent nazywamy samoobrazami. Jak pokażemy niebawem, obiektami zdolnymi do samoobrazowania są obiekty periodyczne tzn. takie, które składają się z powtarzających się okresowo identycznych obrazków - Rys. 2.



Rys. 2.

Pojedynczy obrazek tworzy komórkę elementarną obiektu. Odległość  $d$  między sąsiednimi obrazkami nazywamy stałą periodyczności lub stałą sieci periodycznej.

Spróbujmy teraz wyjaśnić teoretycznie podstawy zjawiska samoobrazowania obiektu periodycznego. Załóżmy, że w płaszczyźnie  $z = 0$  mamy obiekt periodyczny przedstawiony na Rys. 2. Obiekt taki jest opisany okresową funkcją transmitancji  $t(x,y)$ , spełniającą warunek:

$$\forall_{x,y \in R} \forall_{n,m \in C} t(x, y) = t(x + nd, y + md) \quad (1)$$

Funkcja transmitancji opisuje "nieprzeźroczystość" obiektu i przyjmuje ona wartość 0 w punktach gdzie obiekt jest nieprzeźroczysty i wartość 1 w punktach przeźroczystych. Jeśli transparent jest oświetlony falą płaską, której pole w płaszczyźnie  $z = 0$  jest stałą  $A(x,y) = 1$  musi to być fala płaska rozchodząca się wzdłuż osi OZ, wówczas pole  $U$  w płaszczyźnie  $z = 0$  tuż za transparentem jest określone przez jego transmitancję:

$$U(x, y, z = 0) = At(x, y) = t(x, y) \quad (2)$$

Dowolną funkcję dwóch zmiennych  $x$  i  $y$  o periodyczności  $d$  wzdłuż osi OX i OY, możemy przedstawić w postaci szeregu funkcji wykładniczych tzn. szeregu Fouriera:

$$t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A(n, m) \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{n}{d} x + \frac{m}{d} y \right) \right] = U(x, y, 0); \quad n, m \in C \quad (3)$$

Optycznie oznacza to, że za obiektem periodycznym o stałej  $d$  oświetlonym falą płaską pojawia się pole będące dyskretną sumą fal płaskich o wektorach falowych:

$$\vec{k} = k_x, k_y, k_z \quad \text{gdzie} \quad k_x = \frac{2\pi n}{d}; \quad k_y = \frac{2\pi m}{d}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4)$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \Leftrightarrow k_z = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}}$$

Z powyższego wynika, że pole dyfrakcyjne w płaszczyźnie  $z = z_0$  za obiektem będzie miało postać:

$$U(x, y, z = z_0) = \sum_n \sum_m A(n, m) \exp\left[\frac{2\pi i(nx + my)}{d}\right] \exp\left[2\pi i z_0 \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}}\right] \quad (5)$$

Warunkiem dostatecznym na to, aby w płaszczyźnie  $z = z_0$  zachodziło samoobrazowanie jest warunek:

$$U(x, y, z = z_0) = \mu U(x, y, z = 0), \quad (6)$$

gdzie  $\mu$  - pewna stała.

Prowadzi to do zależności:

$$\forall_{n, m \in C} \exp\left[2\pi i \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}} z_0\right] = \mu = e^{2i\pi\mu'} e^{2i\pi l} = const \quad (7)$$

gdzie (gdyż zgodnie ze wzorem Eulera  $\exp(2i\pi l) = 1$ ), czyli:

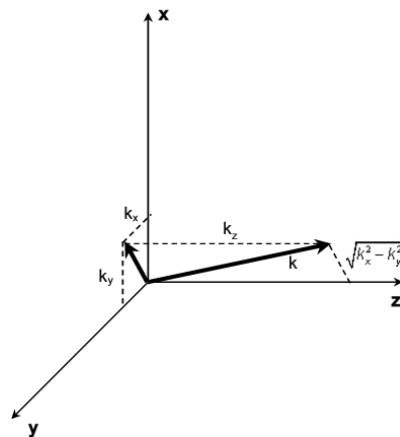
$$\forall_{n, m \in C} 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}} z_0 = 2\pi\mu' + 2\pi l, \quad (8)$$

gdzie  $\mu'$  - ustalone, a  $l \in C$ .

Ostatnie równanie (8) sprowadza się do stwierdzenia, że w płaszczyźnie samoobrazowania fale płaskie, składające się na pola świetlne za transparentem różnią się w fazie o wielokrotność  $2\pi$ .

W praktyce fale płaskie za obiektem rozchodzą się pod niewielkimi kątami w stosunku do osi OZ wyznaczonej przez kierunek propagacji fali oświetlającej. Jest wówczas spełniony warunek - Rys.3.

$$\sin^2 \theta = \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} = \frac{n^2 + m^2}{d^2} \lambda^2 \ll 1 \quad (9)$$



Rys. 3

Przy założeniu (9) pierwiastek  $\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}}$  występujący w równaniu (8) można zapisać w postaci:

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1-s}$$

gdzie

$$s = \frac{n^2 + m^2}{d^2} \lambda^2 \ll 1$$

W rozwinięciu pierwiastka w potęgowy szereg Taylora:

$$\sqrt{1-s} = 1 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 - \frac{1}{16}s^4 - \dots$$

możemy pominąć człony wyższych rzędów począwszy od członu kwadratowego -  $1/8 s^2$  i zapisać:

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2 + m^2}{d^2}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{n^2 + m^2}{2d^2} \lambda \quad (10)$$

Powyższe przybliżenie jest przybliżeniem przyosiowym Fresnela, prowadzi ono do zastąpienia wyrażenia (8) warunkiem:

$$\forall_{n,m \in \mathbb{C}} \frac{z_0}{\lambda} - \frac{n^2 + m^2}{2d^2} \lambda z_0 = \mu' + l; \quad l \in \mathbb{C} \quad (11)$$

Jest on spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy liczba  $\lambda z_0 / 2d^2$  jest liczbą naturalną, co automatycznie określa odległość samoobrazowania od obiektu periodycznego.

$$z_0 = \frac{2d^2}{\lambda} N; \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Jeśli uważnie przeprowadzicie doświadczenie, wówczas zauważycie, że samoobrazy pojawiają się w odległościach mniejszych niż wynikałoby to ze wzoru (12). W rzeczywistości szukane odległości  $z_0$  spełniają warunek:

$$z_0 = \frac{d^2}{\lambda} N; \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

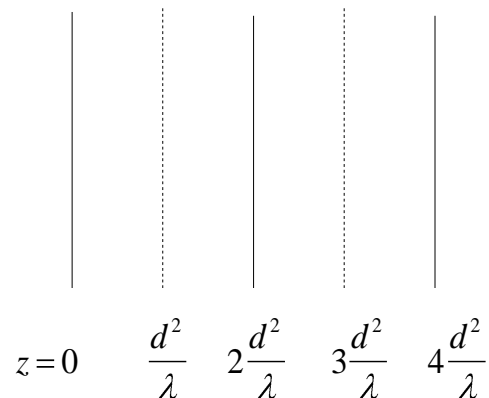
Otóż dokładna analiza zjawiska prowadzi do wniosku, że tak naprawdę słuszny jest wzór (12), jednakże w odległościach:

$$z_0 = \frac{2d^2}{\lambda} \left(N - \frac{1}{2}\right) \quad (14)$$

pojawiają się pola dyfrakcyjne, które są wiernymi odwzorowaniami obiektu periodycznego, ale przesuniętego względem oryginału o wektor  $\vec{u} = \left[ \frac{d}{2}, \frac{d}{2} \right]$ . Tzn.

obraz dyfrakcyjny jest obrazem obiektu periodycznego przesuniętego o  $d/2$  wzdłuż osi OX i  $d/2$  wzdłuż osi OY. Zatem nie jest to wierna kopia spełniająca warunek (6), dlatego też odległości ze wzoru (14) nie mogliśmy otrzymać w naszej analizie. Zagadnienie to zresztą ma istotne znaczenie historyczne, gdyż przez ponad 100 lat od odkrycia zjawiska samoobrazowania przez angiłika Talbota w 1836 roku optycy nie potrafili znaleźć teoretycznego uzasadnienia dla samoobrazowania w odległościach określonych wzorem (14), co prowadziło niekiedy do nieporozumień.

Podsumowując naszą analizę możemy stwierdzić, że samoobrazy pojawiają się w odległościach  $z_0 = Nd^2/\lambda$ , tak jak podano to na Rys. 4.

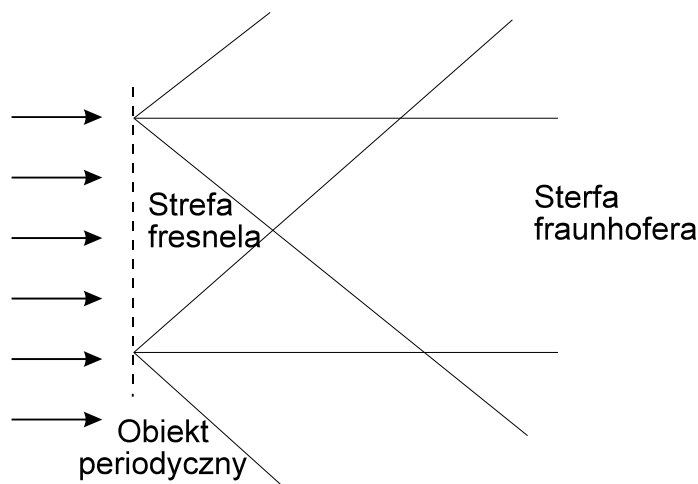


Rys.4

Linia ciągłą oznaczono wierne samoobrazy opisane wzorem (12), a linią przerywaną samoobrazy opisane wzorem (14).

### Przebieg ćwiczenia

- 1) Oświetlamy obiekt periodyczny falą płaską. Wyznaczamy odległość  $z_0$  dla kolejnych trzech samoobrazów. Znając długość fali oświetlenia  $\lambda$  obliczamy stałą sieci  $d$  ze wzoru (13) ( $N=1,2,3$ ).
- 2) Określamy doświadczalnie parametr  $d$ , traktując obiekt periodyczny jako dwuwymiarową siatkę dyfrakcyjną. W tym celu oświetlcie obiekt "cienką" wiązką laserową.



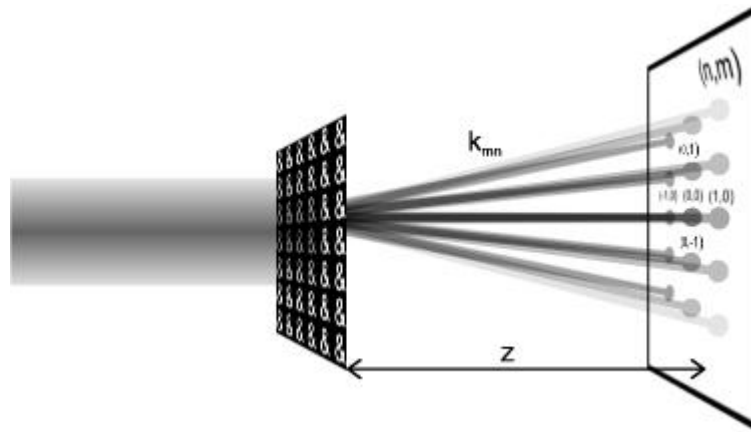
Rys.5

Ustawcie tak układ, aby obraz dyfrakcyjny można było obserwować w możliwie maksymalnej odległości (ponad 5m). Zauważcie, że obraz na ekranie składa się teraz z rozseparowanych kół. Zjawisko to wyjaśnia Rys. 5.

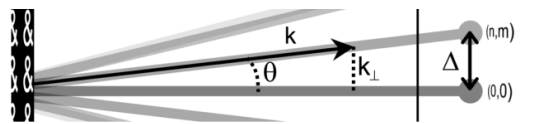
Ze względu na skończone rozmiary wiązki oświetlającej fali płaskiej za obiektem są po prostu zbiorem wiązek światła laserowego o rozmiarach poprzecznych wiązki oświetlającej. W dostatecznie małej odległości za obiektem wiązki propagujące się w różnych kierunkach nachodzą na siebie. Jest to tzw. strefa Fresnela, w której można zaobserwować samoobrazy obiektu wejściowego. Z Rys. 5 widać wyraźnie, że długość tej strefy zwiększa się wraz ze średnicą wiązki oświetlającej, powiększa się wówczas również ilość możliwych do zaobserwowania samoobrazów. Za strefą Fresnela, wiązki za obiektem są rozseparowane, wchodzimy teraz do tzw. strefy Fraunhofera. Jeżeli w tej strefie umieścimy ekran, wówczas zobaczymy na nim obrazy rozseparowanych wiązek w postaci świetlnych plam. Każda plamka odpowiada określonej fali płaskiej o indeksach  $(n,m)$  wyznaczających składowe wektora falowego

$$k_x = \frac{n2\pi}{d} \quad ; \quad k_y = \frac{m2\pi}{d}$$

Sposób pomiaru stałej  $d$  z obserwacji pola dyfrakcyjnego w strefie Fraunhofera wyjaśnia Rys. 6.



Rys. 6. Plamy świetlne na ekranie odpowiadają różnym indeksom  $(n,m)$



$$k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$\sin^2 \theta = \left(\frac{k_{\perp}}{k}\right)^2 = \left(\frac{\Delta}{z}\right)^2 \Rightarrow \frac{n^2 + m^2}{d^2} \lambda^2 = \left(\frac{\Delta}{z}\right)^2 \Rightarrow d = \left(\frac{\Delta}{\lambda z}\right)^{-1} \sqrt{n^2 + m^2} \quad (15)$$

Wyznaczamy doświadczalnie odległość  $z$  i  $\Delta$ . Stałą  $d$  wyliczamy teraz ze wzoru (15), wybierając obraz wiązki ugiętej możliwie daleko od osi układu. Parametr  $\Delta$  jest odległością obrazu wiązki o indeksach  $(n,m)$  od osi układu wyznaczonej przez wiązkę  $(0,0)$ .

- 3) Sprawdzenie wyników z punktów 1) i 2) poprzez pomiar stałej  $d$  przy pomocy obserwacji obiektu periodycznego pod mikroskopem.
- 4) Pomiary przeprowadzamy dla 3 różnych obiektów, które charakteryzują się różnymi stałymi.