

Prawo Coulomba

1. Cztery identyczne ładunki dodatnie q umieszczono w wierzchołkach kwadratu o boku a . W środku symetrii kwadratu umieszczono ładunek ujemny Q taki, że cały układ pozostaje w równowadze. Znaleźć wartość ładunku Q .

$$\text{Odp.: } Q = \frac{2\sqrt{2} + 1}{4} q$$

2. Dipol elektryczny składa się dwóch ładunków $+Q$ i $-Q$ oddalonych od siebie o l . Obliczyć siłę działającą na ładunek q umieszczony w punkcie odległym od $+Q$ i $-Q$ o r i leżącym na prostej prostopadłej do osi dipola.

$$\text{Odp.: } F = \frac{qQl}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

3. Całkowity ładunek naładowanego pierścienia o promieniu R jest równy Q . Obliczyć zależność siły działającej na ładunek q umieszczony na osi pierścienia w funkcji odległości od jego środka.

$$\text{Odp.: } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

4. Między dwiema dużymi, równoległymi płytami ukształtowało się jednorodne pole E . W polu tym na sznurku o długości l zawieszono małą, przewodzącą kulke o masie m . Znaleźć okres wahadła gdy kulka posiada ładunek $+q$ jeśli dolna płyta jest naładowana a) dodatnio, b) ujemnie.

$$\text{O.p.: a) } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - qE/m}}, \text{ b) } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + qE/m}}$$

5. Dwie jednakowe przewodzące kulki zawieszono na jedwabnych niciach o długości l . Każda z kulek posiada ładunek q i masę m . Obliczyć odległość x w jakiej znajdują się kulki w stanie równowagi. Przyjąć że $l \gg x$ (przy takim założeniu $\text{tg}\alpha \approx \sin\alpha$).

$$\text{Odp.: } x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 m g} \right)^{1/3}$$

6. Dwie identyczne przewodzące kule, mające ładunki o znakach przeciwnych przyciągają się siłą 0.108 N z odległości 0.5 m . Kule zostają połączone przewodzącym drutem, który następnie zostaje usunięty i wtedy kule odpychają się wzajemnie siłą 0.0360 N . Ile wynosiły początkowe ładunki obu kul ?

$$\text{Odp.: } \pm 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ C}, \pm 3.0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

7. Dwie jednakowo naładowane cząstki elementarne oddalone od siebie $3.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ wyprowadzono ze stanu równowagi. Obserwowane przyspieszenie pierwszej cząstki wynosi 7.0 m/s^2 , a przyspieszenie drugiej cząstki wynosi 9.0 m/s^2 . Jeśli masa pierwszej cząstki wynosi $6.3 \cdot 10^{-7} \text{ kg}$, to jaka jest masa drugiej cząstki i jaki jest wspólny ładunek obu cząstek ?

$$\text{Odp.: } 4.9 \cdot 10^{-7} \text{ kg}, 7.1 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

8. Znaleźć wartość siły, z jaką przyciągają się dwa różnoimiennie jednorodnie naładowane odcinki o długości l_1 i l_2 , leżące na jednej prostej, jeżeli ładunek całkowity pierwszego wynosi q , ładunek drugiego Q , a odległość pomiędzy środkami odcinków wynosi r .

$$\text{Odp.: } F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l_1 l_2} \ln \frac{1 - \frac{(l_1 - l_2)^2}{4r^2}}{1 - \frac{(l_1 + l_2)^2}{4r^2}}$$

9. Wyznaczyć potencjał V i wartość natężenia pola elektrycznego E elektrycznego punkcie P leżącym na osi pierścienia, którego powierzchniowa gęstość ładunku σ jest stała. Wewnętrzny promień pierścienia wynosi R_1 , zewnętrzny promień wynosi R_2 , punkt P znajduje się w odległości d od płaszczyzny pierścienia.

$$\text{Odp.: } V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R_2^2 + d^2} - \sqrt{R_1^2 + d^2} \right), \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{d}{\sqrt{R_1^2 + d^2}} - \frac{d}{\sqrt{R_2^2 + d^2}} \right)$$

10. Znaleźć potencjał V o raz natężenie pola elektrycznego E nieskończenie długiego, prostoliniowego, równomiernie naładowanego przewodnika. Liniowa gęstość ładunku wynosi λ . Przy rozwiązaniu nie korzystać z twierdzenia Gaussa.

$$\text{Odp.: } V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{const}, \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

11. Jednorodnie naładowane koło o promieniu R powierzchniowej gęstości ładunku $\sigma > 0$ jest umieszczone pionowo. Do najwyższego punktu koła przymocowano na cienkiej nici o długości $l > R$ kulkę, na której znajduje się ładunek $q > 0$. Wyznaczyć masę kulki wiedząc, że na skutek działających sił kulki znajduje się ona na osi koła. Wartość przyspieszenia ziemskiego wynosi g .

$$\text{Odp.: } m = \frac{\sigma q R^3}{4\pi\epsilon_0 g l^3}$$

12. Elektron o prędkości $5.0 \cdot 10^8$ cm/s wpada, poruszając się równoległe do linii sił, w obszar pola elektrycznego o natężeniu $1.0 \cdot 10^3$ N/C tak zorientowanego, że hamuje ono ruch elektronu. a) Jaką drogę przebędzie elektron w polu zanim się zatrzyma? b) Ile czasu upłynie do chwili zatrzymania? c) Jaką część pierwotnej energii straciłby elektron przechodzący przez pole kończące się nagle po 0.8 cm?

$$\text{Odp.: } a) 7.1 \text{ cm} \quad b) 2.9 \cdot 10^{-8} \text{ s} \quad c) 11\%$$

13. W obszar pola elektrycznego o natężeniu $E = 2.0 \cdot 10^3$ N/C (skierowanym do góry) pomiędzy dwiema równoległymi, naładowanymi płytami, tuż przy krawędzi dolnej płyty wpada elektron poruszający się z prędkością $v = 6.0 \cdot 10^6$ m/s pod kątem $\theta = 45^\circ$ względem wektora E . Płyty mają szerokość $l = 10.0$ cm i są odległe od siebie o $d = 2.0$ cm. Czy elektron uderzy w którąś z płyt, a jeśli tak to w którym miejscu?

$$\text{Odp.: Uderzy w górną płytę 2.7 cm od krawędzi.}$$

Oraz zadania ze skryptu 7.1- 7.9

Prawo Gaussa

14. Ładunek punktowy q znajduje się w jednym z rogów sześcianu o boku a . Jaki strumień przepływa przez z każdą ze ścian sześcianu ?

Odp.: Dla ścian stykających się z ładunkiem $\Phi_E = 0$, dla pozostałych $\Phi_E = q/24\epsilon_0$

15. Wyznaczyć natężenie pola elektrycznego gęstość dowolnym punkcie oddalonym o r od nieskończenie długiej nici naładowanej gęstością liniową gęstością ładunku λ .

$$\text{Odp.: } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

16. Przestrzenna gęstość ładunku nieskończonego walca gęstość promieniu R gęstość wynosi ρ . Wyznaczyć natężenie pola elektrycznego gęstość dowolnym punkcie przestrzeni.

$$\text{Odp.: } E = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0} \text{ dla } r \geq R$$

$$E = \frac{r\rho}{2\epsilon_0} \text{ dla } r \leq R$$

17. Przestrzenna gęstość ładunku nieskończonej warstwy o grubości a wynosi ρ . Wyznaczyć natężenie pola w dowolnym punkcie przestrzeni.

$$\text{Odp.: } E = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \frac{x_0}{|x_0|} \text{ dla } |x_0| \geq \frac{a}{2}$$

$$E = \frac{\rho x_0}{\epsilon_0} \text{ dla } |x_0| \leq \frac{a}{2}$$

18. Cienkościenne rura metalowa ma promień R . Na powierzchni rury zgromadzony jest ładunek o gęstości liniowej λ . Obliczyć natężenie pola elektrycznego w całej przestrzeni.

$$\text{Odp.: } E=0 \text{ dla } r < R; E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ dla } r > R$$

19. W objętości nieprzewodzącej kuli o promieniu R zawiera zgromadzony jest (równomiernie rozłożony) ładunek Q . Znaleźć wartość natężenia pola E oraz potencjału V w całej przestrzeni. Porównać wynik z tym który otrzymamy dla takiej samej kuli wykonanej z materiału przewodzącego na której również jest zgromadzony ładunek Q .

Odp.: Dla kuli nieprzewodzącej:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}; V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \text{ dla } r < R$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}; V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \text{ dla } r > R.$$

Dla kuli przewodzącej:

$$E = 0; V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \text{ dla } r < R$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}; V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \text{ dla } r > R.$$

20. Metalowa kula o promieniu a zawiera ładunek $2Q$. Kulę otacza metalowa powierzchnia sferyczna o promieniu wewnętrznym b i promieniu zewnętrznym c . Powłoka zawiera

ładunek $-Q$. Obliczyć wartość natężenia pola E w całej przestrzeni. Opisać rozkład ładunku w układzie gdy znajduje się on w równowadze elektrostatycznej.

Odp.:

$$E = 0 \quad \text{dla } r < a$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{dla } a < r < b$$

$$E = 0 \quad \text{dla } b < r < c$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{dla } r > c$$

Ładunek $2Q$ zgromadzony jest na powierzchni kuli. Na wewnętrznej stronie powierzchni sferycznej jest zgromadzony ładunek $-2Q$. Na zewnętrznej stronie powierzchni znajduje się ładunek Q .

21. Dwie duże metalowe płyty umieszczono naprzeciw siebie. Na wewnętrznych powierzchniach płyt zgromadzone są ładunki o gęstościach powierzchniowych odpowiednio $+\sigma$ i $-\sigma$. Jakie jest natężenie pola E w punktach a) na lewo od płyt, b) pomiędzy płytami, c) na prawo od nich. Rozważyć te punkty, dla których odległość od płyt jest dużo mniejsza od ich rozmiaru.

Odp.: a) $E=0$; b) $E = \sigma/\epsilon_0$; c) $E=0$

22. Mała kula o masie $m=1\text{mg}$ ma ładunek $q=2*10^{-8}\text{C}$. Wisi ona na przytwierdzonej do dużej nieprzewodzącej płyty jedwabnej nici, która tworzy kąt $\pi/6$ z płytą. Oblicz powierzchniową gęstość ładunku płyty.

$$\text{Odp.: } \sigma = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{mg\epsilon_0}{q} = 5.0*10^{-6} \text{C/m}^2$$

23. Sfera metalowa o promieniu R_1 otoczona jest kulistą warstwą dielektryka o względnej przenikalności elektrycznej ϵ i grubości d oraz drugą sferą o promieniu R_2 umieszczoną współśrodkowo. Ładunek mniejszej sfery wynosi Q . Wiedząc, że spełniony jest warunek $R_1 + d \leq R_2$, wyznaczyć wartość natężenia pola elektrycznego oraz potencjału w funkcji odległości od środka kuli.

$$\text{Odp.: } E = 0; V = -\frac{Q(\epsilon R_1 + d)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 (R_1 + d)} \quad \text{dla } r < R_1$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}; V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + \frac{(1-\epsilon)Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 (R_1 + d)} \quad \text{dla } R_1 < r < R_1 + d$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}; V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{dla } r > R_1 + d$$

Oraz zadania ze skryptu 7.10-7.15

Potencjał

24. Dwie duże równoległe, przewodzące płyty znajdują się w odległości $d=10\text{cm}$ i mają jednakowe lecz o przeciwnych znakach ładunki na naprzeciwległych powierzchniach. Na elektron umieszczony w połowie drogi między dwiema płytami działa siła $F=1.6\cdot 10^{-15}\text{ N}$. Jaka jest różnica potencjałów między płytami ?

$$\text{Odp.: } \Delta V = \frac{F}{e} d = 1000\text{V}$$

25. Obliczyć pracę potrzebną do umieszczenia dwóch ładunków $+q$ i dwóch ładunków $-q$ w wierzchołkach kwadratu o boku a , w taki sposób, że ładunki o tych samych znakach znajdują się w wierzchołkach przeciwnych.

$$\text{Odp.: } W = -0.21q^2/\epsilon_0 a$$

26. Jaką różnicę potencjałów musi przebyć elektron, aby (zgodnie z mechaniką Newtona) uzyskać prędkość równą prędkości światła. Używając relatywistycznego wyrażenia na energię kinetyczną wyrazić rzeczywistą prędkość elektronu osiągniętą po przebyciu obliczonej różnicy potencjałów.

$$\text{Odp.: } \Delta V = \frac{m_e c^2}{2e} = 2.6\cdot 10^5\text{V}; 0.75c$$

27. Dwa elektrony znajdują się w odległości $d=2.0\text{m}$ od siebie. Trzeci elektron zostaje wystrzelony z nieskończoności i zatrzymuje się w połowie drogi między dwoma pozostałymi elektronami. Obliczyć jego prędkość początkową.

$$\text{Odp.: } v = e \sqrt{\frac{2}{\pi \epsilon_0 m_e d}} = 0.32\text{ m/s}$$

28. Obliczyć a) potencjał elektryczny wytworzony przez jądro wodoru w średniej odległości krążącego elektronu ($r=5.3\cdot 10^{-11}\text{m}$), b) elektryczną energię potencjalną atomu, gdy elektron znajduje się w tej odległości, c) kinetyczną energię elektronu, zakładając, że porusza się on po orbicie kołowej o promieniu r i środku w jądrze, c) ile potrzeba energii żeby zjonizować atom wodoru.

$$\text{Odp.: } a) +27\text{ V}; b) -27\text{ V}; c) 13.6\text{ eV}; d) 13.6\text{ eV}$$

29. Dwie metalowe kule o promieniu 3.0m mają ładunki równe $+1.0\cdot 10^{-8}\text{C}$ i $-3.0\cdot 10^{-8}\text{C}$. Zakładamy, że rozłożone równomiernie. Odległość pomiędzy środkami kul wynosi 2.0m . Obliczyć: a) potencjał w punkcie znajdującym się w połowie drogi między ich środkami oraz b) potencjał każdej z kul.

$$\text{Odp.: } a) -180\text{ V}; b) +2900\text{ V}, -9000\text{ V}$$

30. Przestrzeń między dwiema współosiowymi kulami o promieniach R_1 i R_2 jest wypełniona nieprzewodzącym materiałem o jednorodnej gęstości ładunku ρ . Znaleźć potencjał elektryczny V jako funkcję odległości r od środka kul, rozpatrując obszary a) $r < R_1$, b) $R_1 < r < R_2$, c) $r > R_2$.

Odp.:

$$a) \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$

$$b) \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3}{2} R_2^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^2}{r} \right)$$

$$c) \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r}$$

31. W stronę dużej metalowej płyty naładowanej z powierzchniową gęstością ładunku $\sigma = -2 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$ został wystrzelony elektron o energii $E = 100 \text{ eV}$. Z jakiej odległości został on wystrzelony jeśli wiadomo, że dotarł dokładnie do powierzchni płyty.

$$\text{Odp.: } x = \frac{2E\epsilon_0}{e\sigma} = 0.885 \text{ mm}$$

Kondensatory i energia pola

32. Znaleźć pojemność kondensatora cylindrycznego o promieniach okładek R_1 i R_2 i długości L .

$$\text{Odp.: } C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

33. Kondensator o pojemności $C = 100 \text{ pF}$ naładowano do różnicy potencjałów $V_1 = 50 \text{ V}$ i odłączono od baterii. Następnie kondensator połączono równolegle z drugim kondensatorem początkowo nienaładowanym. Jaka jest pojemność drugiego kondensatora C_2 jeśli mierzona różnica potencjałów zmalała do $V_2 = 35 \text{ V}$

$$\text{Odp.: } C_2 = 43 \text{ pF}$$

34. Różnicę potencjałów $V = 300 \text{ V}$ przyłożono do połączonych szeregowo kondensatorów o $C_1 = 2.0 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 8.0 \text{ }\mu\text{F}$. a) Jaki jest ładunek i różnica potencjałów na każdym z kondensatorów? b) Naładowane kondensatory rozłączono i połączono razem ich dodatnie oraz ujemne okładki razem, nie przykładając żadnego napięcia zewnętrznego. Jaki jest ładunek i różnica potencjałów na każdym z kondensatorów? c) Naładowane kondensatory z punktu (a) rozłączono i połączono ze sobą okładki o przeciwnych znakach. Jaki jest ładunek i różnica potencjałów na każdym z kondensatorów?

$$\text{Odp.: } a) q_1 = q_2 = 4.8 \cdot 10^{-4} \text{ C}; V_1 = 240 \text{ V}, V_2 = 60 \text{ V}$$

$$b) q_1 = 1.9 \cdot 10^{-4} \text{ C}, q_2 = 7.7 \cdot 10^{-4} \text{ C}; V_1 = V_2 = 96 \text{ V}$$

$$c) q_1 = q_2 = 0; V_1 = V_2 = 0$$

35. Płytką miedzianą o grubości b jest umieszczona dokładnie w połowie odległości między okładkami płaskiego kondensatora, którego okładki mają powierzchnię A i są odległe o d . Jaka jest pojemność a) przed, b) po umieszczeniu płytki.

$$\text{Odp.: } a) \frac{\epsilon_0 A}{d}; b) \frac{\epsilon_0 A}{d-b}$$

36. Okładki dużego próżniowego kondensatora płaskiego, między którymi odległość jest równa d , połączone są przewodnikiem. Pomiędzy okładkami znajduje się metalowa płytka o ładunku elektrycznym Q . Znaleźć całkowity ładunek q , jaki przepłynie przez przewód jeżeli płytkę przesuniemy o odległość x w kierunku prostopadłym do okładek. Opór przewodnika zaniedbujemy. Czy wynik ulegnie zmianie jeśli przestrzeń pomiędzy okładkami wypełnimy dielektrykiem o względnej przenikalności elektrycznej ϵ

Odp.: $q = \frac{Q}{d} x$, nie zależy od wartości ϵ

37. Płaski kondensator o okładka o powierzchni $A=40\text{cm}^2$ i odstęp $d=1\text{mm}$ naładowano do napięcia $V=600\text{V}$. Znaleźć a) pojemność, b) wielkość ładunku na każdej okładce, c) zmagazynowaną energię, d) pole elektryczne pomiędzy okładkami, e) gęstość energii pomiędzy okładkami.

Odp.: a) $C=3.5 \cdot 10^{-11}\text{F}$; b) $2.1 \cdot 10^{-8}\text{C}$; c) $6.3 \cdot 10^{-6}\text{J}$; d) $6.0 \cdot 10^{-6}\text{J}$; e) 1.6J/m^3

38. Płaski kondensator powietrzny ma pojemność $C=100\text{pF}$. a) Jaka jest jego energia jeśli różnica potencjałów wynosi $V=50\text{V}$? b) Czy można obliczyć gęstość energii pomiędzy okładkami?

Odp.: a) $C=1.3 \cdot 10^{-7}\text{J}$; b) nie

39. Biorąc pod uwagę początkową pojemność C znaleźć pracę jaką wykonano umieszczając miedzianą płytkę z zadania 35 jeżeli a) różnica potencjałów jest stała, b) ładunek jest stały.

Odp.: a) $\frac{1}{2} CV^2$; b) $-\frac{1}{4} CV^2$

40. a) Jeżeli podwoi się różnica potencjałów w cylindrycznym kondensatorze, to jak zmieni się zmagazynowana w nim energia? b) Jeżeli podwoi się promień wewnętrznej i zewnętrznej okładki utrzymując stały ładunek, to jak zmieni się zmagazynowana energia?

Odp.: a) wzrośnie cztery razy; b) nie zmieni się

41. Obliczyć siłę z jaką przyciągają się okładki kondensatora płaskiego o okładkach o powierzchni A na których zgromadzony jest ładunek q , obliczając pracę potrzebną na rozsuniecie okładek z x do $x+dx$.

Odp.: $F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}$

42. Wyznaczyć pojemność kondensatora płaskiego, który wypełniony jest dielektrykiem o względnej przenikalności $\epsilon(x)$, będącej ciągłą funkcją odległości od okładek kondensatora. Odległość pomiędzy okładkami wynosi d , pole powierzchni okładek jest równe A .

Odp.: a) $\frac{1}{C} = \int_0^d \frac{dx}{\epsilon(x)\epsilon_0 S}$

Oraz zadania 7.17-7.23 oraz 7.24-7.28