

BADANIE DRGAŃ HARMONICZNYCH TŁUMIONYCH

1. Podstawy fizyczne

1.1 Swobodne drgania harmoniczne

Wiele obiektów fizycznych, wytrąconych z położenia równowagi trwałej (wskutek krótko trwającego działania zewnętrznego), będzie powracać do stanu początkowego pod wpływem siły proporcjonalnej do wychylenia x i skierowanej przeciwnie do wychylenia. Tak działająca siła może być zapisana wzorem:

$$F = -kx, \quad (1)$$

gdzie k jest dodatnim współczynnikiem charakteryzującym tę siłę. Jest to **siła harmoniczna**. Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (2)$$

ruch ciała o masie m pod wpływem siły harmoniczej, opisywany będzie przez równanie:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (3)$$

Po podzieleniu tego równania przez m , wprowadzeniu nowej stałej:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (4)$$

i przeniesieniu wszystkich wyrazów na jedną stronę, otrzymujemy równanie:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5)$$

zwane **równaniem oscylatora harmonicznego**. Równanie to możemy rozwiązać metodą przewidywania: szukamy funkcji, której druga pochodna z dokładnością do stałego czynnika jest równa poszukiwanej funkcji. Warunek ten spełniają funkcje sinus i cosinus. Zatem, aby równanie (2) było spełnione, funkcje te muszą mieć postać:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) \quad \text{lub} \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t). \quad (6)$$

Ponieważ (5) jest równaniem liniowym i jednorodnym, to suma (kombinacja liniowa) tych szczególnych rozwiązań jest także rozwiązaniem. Oznacza to, że rozwiązanie ogólne można zapisać w postaci:

$$x(t) = A_1 \sin(\omega_0 t) + A_2 \cos(\omega_0 t), \quad (7)$$

lub

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi) . \quad (8)$$

Zatem ruch pod wpływem siły harmoniczej jest ruchem okresowym. Stała ω_0 (posiadająca wymiar odwrotności czasu) nosi nazwę **częstości kołowej drgań swobodnych** (inaczej **częstość drgań własnych**). Można łatwo sprawdzić, że okres funkcji $x(t)$ wynosi:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} . \quad (9)$$

Stała A nosi nazwę **amplitudy** i określa maksymalne wychylenie oscylatora z położenia równowagi. Argument funkcji okresowej nosi nazwę **fazy**, a jego część niezależna od czasu ϕ to **przesunięcie fazowe**. Stałe A i ϕ są określone na podstawie warunków początkowych.

1.2 Drgania harmoniczne tłumione

Drgania oscylatora harmonicznego swobodnego powinny trwać nieskończenie długo, bez zmiany amplitudy. Jednak amplituda drgań rzeczywistych oscylatorów maleje wraz z upływem czasu. Przyczyną tego jest istnienie oporów ruchu. Przyjmuje się, że dla niezbyt dużych prędkości siłę oporu można przedstawić wzorem:

$$\vec{F}_{op} = -\gamma \vec{v} , \quad (10)$$

a więc jest ona proporcjonalna do aktualnej wartości prędkości i ma zwrot przeciwny do zwrotu prędkości. Równanie ruchu tak tłumionego oscylatora przyjmie postać:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} . \quad (11)$$

Po podzieleniu stronami przez m i podstawieniu:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \text{i} \quad \frac{\gamma}{2m} = \beta , \quad (12)$$

gdzie ω_0 - częstość drgań swobodnych, β - współczynnik tłumienia, otrzymamy równanie:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (13)$$

Jest to ogólna postać równania, opisującego zachowanie się dowolnego oscylatora tłumionego (nie tylko mechanicznego). W równaniu tym bezpośrednio parametry oscylatora (np. masa m , współczynnik k , współczynnik γ) zostały zastąpione parametrami ogólnymi, jakimi są : częstość drgań swobodnych ω_0 i współczynnik tłumienia β . Szczegółowe rozwiązanie tego równania zostało przedstawione w Dodatku nr 1.

Postać rozwiązania zależy od wartości β i ω_0 :

Przypadek 1. $\beta < \omega_0$ - słabe tłumienie.

W tym przypadku rozwiązaniem równania (13) jest funkcja opisująca tzw. **drżania harmoniczne słabo tłumione** (rys. 1, krzywa a):

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t - \phi) , \quad (14)$$

które zachodzą z częstością

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} .$$

(15)

Amplituda tych drgań jest malejącą funkcją czasu:

$$A(t) = x_0 e^{-\beta t} .$$

(16)

Przesunięcie fazowe ϕ oraz x_0 są wyznaczone na podstawie warunków początkowych.

Częstość drgań tłumionych jest mniejsza od częstości drgań swobodnych i zależy od współczynnika tłumienia. W przypadku słabego tłumienia $\beta \ll \omega_0$ zależność ta jest słaba i częstość drgań tłumionych jest zbliżona do częstości drgań swobodnych. Gdy wartość współczynnika tłumienia zbliża się do wartości częstości ω_0 , częstość drgań tłumionych szybko maleje do zera.

Wygodnymi parametrami określającymi, jak szybko zanikają drgania harmoniczne tłumione są: czas relaksacji i logarytmiczny dekrement tłumienia. **Czas relaksacji** τ jest określony jako czas, po którym amplituda maleje e - krotnie:

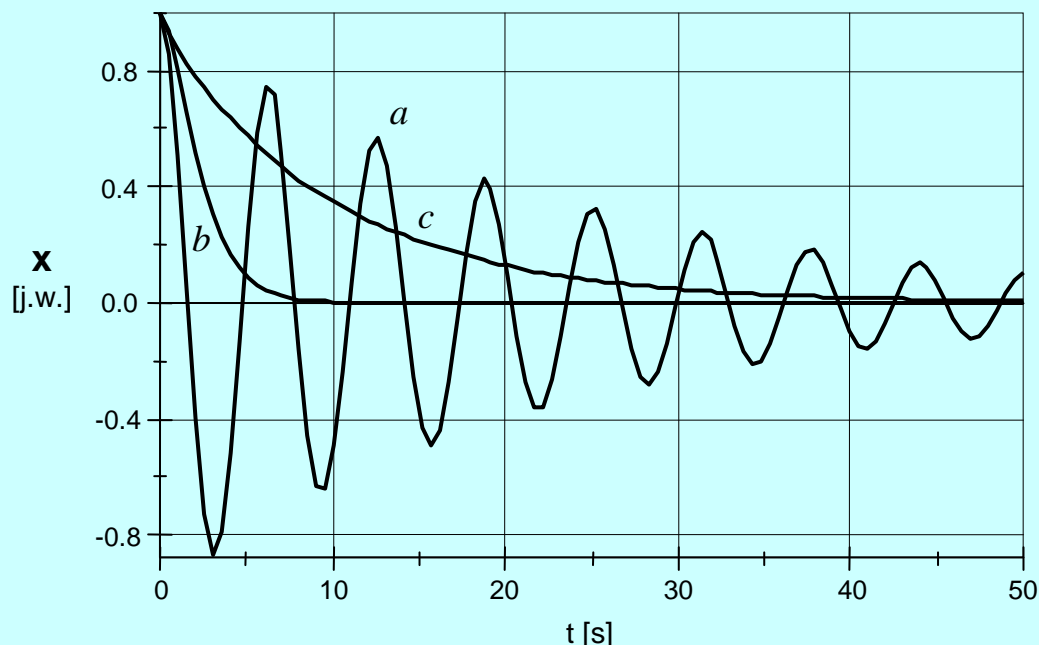
$$A(\tau) = \frac{A(0)}{e} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{\beta} .$$

(17)

Logarytmiczny dekrement tłumienia δ jest określony jako logarytm naturalny ze stosunku dwóch kolejnych amplitud:

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} .$$

(18)



Rys.1 Rodzaje powrotu oscylatora harmonicznego tłumionego do stanu równowagi: a) drgania harmoniczne tłumione, b) krytyczny, c) aperiodyczny.

Przypadek 2. $\beta = \omega_0$ - tłumienie krytyczne.

W tym przypadku rozwiązaniem równania (13) jest funkcja opisująca tzw. krytyczny powrót do stanu równowagi (rys. 1, krzywa b):

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} .$$

(19)

Stałe A i B wyznacza się na podstawie warunków początkowych. Podczas wykonywania ruchu krytycznego, oscylator najszybciej osiąga stan równowagi. Występujący w funkcji (19) liniowy jej wzrost "ginie" wobec wykładniczego zmniejszania się i dla czasów spełniających warunek $\beta t \gg 1$ maleje ona jak funkcja $e^{-\beta t}$.

Przypadek 3. $\Delta > 0$ czyli $\beta > \omega_0$ - silne tłumienie.

W tym przypadku rozwiązaniem równania (13) jest funkcja opisująca aperiodyczny powrót do stanu równowagi :

$$x(t) = A_1 e^{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} . \quad (20)$$

Stałe A_1 i A_2 wyznacza się na podstawie warunków początkowych. W obu składnikach funkcji (20) wykładniki potęg są ujemne, więc rozwiązanie składa się z sumy dwóch wyrazów wykładniczo malejących w czasie. Jednak to zmniejszanie jest wolniejsze niż w ruchu krytycznym, gdyż drugi składnik posiada mniejszą wartość wykładnika potęgi dla tej samej wartości t , niż to ma miejsce w ruchu krytycznym (por. (19)). Praktycznie to on będzie określał powrót do położenia równowagi.

2. Opis ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zbadanie zachowania się oscylatora harmonicznego tłumionego, wyznaczanie charakteryzujących go parametrów i porównanie ich z wartościami teoretycznymi dla urządzenia wychyłowego galwanometru (drżania mechaniczne, skrętne) i dla obwodu RLC (drżania elektromagnetyczne).

2.1 Opis ruchu urządzenia wychyłowego galwanometru

Urządzenie wychyłowe galwanometru stanowią: cewka i zwierciadełko zawieszone na tej samej cienkiej, metalowej nici. Cewka znajduje się w stałym polu magnetycznym. Od zwierciadełka odbija się wiązka światła, dając na skali jasną plamkę. Gdy na skutek krótkotrwałego zadziałania czynnika zewnętrznego (dostarczenie energii) cewka zostanie wychylona z położenia równowagi, pojawi się moment siły sprężystości nici M , proporcjonalny do jej kąta skręcenia θ :

$$M = -\kappa\theta , \quad (21)$$

gdzie κ jest współczynnikiem sprężystości skrętnej nici. Oprócz momentu sprężystości nici, na urządzenie wychyłowe będące w ruchu, działać będzie moment sił oporu, M_{op} . Siły te są pochodzenia mechanicznego i elektromagnetycznego. Niezależnie od rodzaju sił, moment sił oporu jest proporcjonalny do prędkości kątowej urządzenia wychyłowego :

$$M_{op} = -\xi \frac{d\theta}{dt} . \quad (22)$$

Równanie ruchu urządzenia wychyłowego, o momencie bezwładności I , zgodnie z II zasadą dynamiki ruchu obrotowego, będzie miało postać :

$$I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta - \xi \frac{d\theta}{dt} , \quad (23)$$

a po przekształceniu:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I_0}\theta - \frac{\xi}{I_0} \frac{d\theta}{dt} . \quad (24)$$

Równanie (24) ma postać równania oscylatora harmonicznego tłumionego (porównaj (13)), w którym:

$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{I_0}, \quad \beta = \frac{\xi}{2I_0}. \quad (25)$$

Jeżeli wejście galwanometru jest rozwarte, to na układ drgający będzie działać tylko niewielki moment sił oporu mechanicznego. Natomiast przy dołączonym do galwanometru rezystorze R (rys. 2), w poruszającej się w polu magnetycznym cewce, płynąć będzie prąd indukcyjny o natężeniu:

$$i = \frac{\varepsilon}{R_w + R}, \quad (26)$$

gdzie R_w jest rezystancją wewnętrzną galwanometru, a ε - siłą elektromotoryczną indukcji, która zgodnie z prawem Faradaya jest proporcjonalna do szybkości zmiany strumienia magnetycznego:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (27)$$

Dla niezbyt dużych kątów skręcenia nici:

$$\varepsilon = -\Phi_0 \frac{d\theta}{dt}, \quad (28)$$

gdzie Φ_0 jest maksymalną wartością strumienia wektora indukcji magnetycznej, przepływającego przez cewkę galwanometru. Przepływ prądu o natężeniu

$$i = \frac{\Phi_0}{R_w + R} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (29)$$

przez uzwojenie cewki powoduje, że podlega ona działaniu hamującego momentu sił elektrodynamicznych (reguła Lenza), proporcjonalnego do wartości przepływającego przez cewkę prądu, a więc odwrotnie proporcjonalnego do wartości rezystancji $R_w + R$. Moment mechaniczny tłumienia jest dużo mniejszy od momentu elektromagnetycznego i dlatego o charakterze ruchu urządzenia wychyłowego decydować będzie wartość oporu. **Współczynnik tłumienia β będzie więc odwrotnie proporcjonalny do $R_w + R$.**

W zależności od wartości dołączonego do galwanometru rezystora R możemy uzyskać ruch harmoniczny tłumiony, krytyczny lub aperiodyczny.

2.2 Opis drgań elektromagnetycznych w obwodzie RLC.

Drgania harmoniczne tłumione zachodzą także w obwodach elektrycznych zawierających elementy R , L , i C . Załóżmy, że naładowany kondensator o pojemności C zaczyna się rozładowywać przez rezystor R i cewkę o indukcyjności L (rys. 3). Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa suma zmian potencjału na drodze zamkniętej jest równa zero:

$$U_L + U_R + U_C = 0, \quad (30)$$

gdzie: $U_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$ napięcie na cewce, (31)

$$U_R = Ri = R \frac{dq}{dt} \quad \text{napięcie na rezystorze,} \quad (32)$$

$$U_C = \frac{q}{C} \quad \text{napięcie na kondensatorze.} \quad (33)$$

Po podstawieniu i podzieleniu stronami przez L otrzymamy równanie:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (34)$$

Jest to równanie elektromagnetycznego oscylatora harmonicznego tłumionego (por. wzór (13)), w którym :

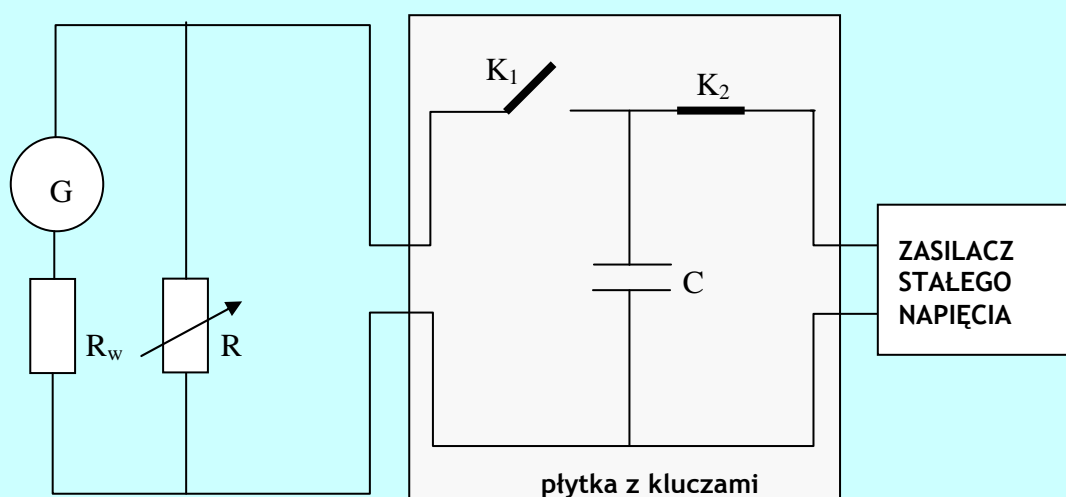
$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad \text{oraz} \quad \frac{R}{2L} = \beta. \quad (35)$$

A więc ładunek elektryczny, a tym samym i napięcie na kondensatorze wykonywać będzie ten sam rodzaj drgań, co urządzenie wychyłowe galwanometru.

3. Wykonanie ćwiczenia

3.1 Badanie urządzenia wychyłowego galwanometru

1. Zestawić układ do badania ruchu urządzenia wychyłowego galwanometru według schematu przedstawionego na rys. 2, nie odłączając przewodu zwierającego wejście galwanometru.



Rys. 2. Schemat układu do badania ruchu urządzenia wychyłowego galwanometru. Klucze K_1 i K_2 (sprzężone mechanicznie) oraz kondensator C są umieszczone na wspólnej płytce.

Układ ten działa następująco. Zasilacz ładuje kondensator C . Po zwarcie (naciśnięciu) klucza K_1 następuje automatyczne rozwarczenie klucza K_2 , odłączającego zasilacz i kondensator C rozładowuje się przez rezystor R i galwanometr. Ten krótkotrwały przepływ prądu rozładowania przez galwanometr spowoduje odchylenie jego urządzenia wychyłowego od położenia równowagi (co sygnalizuje nam położenie plamki na skali galwanometru). Po rozładowaniu się kondensatora C urządzenie wychyłowe galwanometru zacznie powracać do położenia równowagi, w zależności od rezystora R ruchem harmonicznym tłumionym, krytycznym lub aperiodycznym. Po zwolnieniu klucza K_1 i automatycznym zwarceniu klucza K_2 kondensator C naładuje się ponownie.

Uwaga! Kondensator, klucze i zasilacz nie mają wpływu na powrót urządzenia wychyłowego do stanu równowagi. Są one tylko urządzeniem zewnętrznym, umożliwiającym wyprowadzenie urządzenia wychyłowego ze stanu równowagi.

2. Po sprawdzeniu układu pomiarowego przez prowadzącego, nastawić na zasilaczu niewielkie napięcie (rzędu kilku woltów) i dużą wartość rezystancji R (małe tłumienie). Odłączyć przewód zwierający wejście galwanometru i skorygować zerowe położenie plamki. Zewrzeć klucz K_1 i zaobserwować ruch harmoniczny słabo tłumiony urządzenia wychyłowego galwanometru, uwidoczniiony jako ruch

plamki świetlnej na jego skali. Jeżeli wychylenia plamki są zbyt małe, należy wtedy zwiększyć napięcie na zasilaczu tak, aby początkowe wychylenie dochodziło prawie do końca skali.

- Zmierzyć amplitudę drgań A w funkcji czasu t dla danej wartości rezystancji R . Najwygodniej przeprowadzić to następująco: przy maksymalnym wychyleniu plamki (np. w prawo), włączyć stoper, odczytać na skali wartość amplitudy i zanotować. Nie wyłączając stopera notować kolejne amplitudy "w prawo". Przy rejestracji ostatniej, n -tej amplitudy zatrzymać stoper i zapisać wskazany na nim czas t_n . Okres drgań urządzenia wychyłowego galwanometru T obliczyć ze wzoru:

$$T = \frac{t_n}{n-1}.$$

Wyniki zapisać w tabeli 1.

Tabela 1. Zależność amplitudy drgań od czasu. $R = \dots\dots\dots$

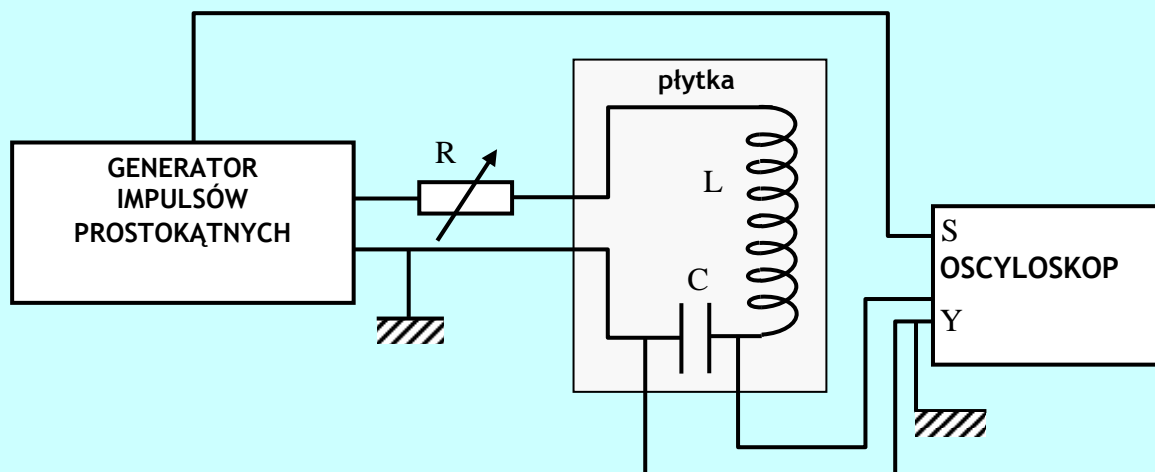
Numer pomiaru	1	2	3	4	n
Liczba okresów	0	1	2	3		n-1
A [dz]						
t [s]						$t_n =$

Powtórzyć pomiary amplitudy drgań w funkcji czasu oraz okresu drgań dla takiej rezystancji R , dla którego wystąpi ruch harmoniczny silnie tłumiony. W takim przypadku dla uzyskania odpowiedniej liczby punktów pomiarowych powinno się wyznaczać wartość amplitudy co pół okresu.

- Zmniejszyć wartość rezystancji tak, aby otrzymać ruch krytyczny i zaobserwować go. Jeżeli początkowe wychylenie jest zbyt małe, należy zwiększyć napięcie na zasilaczu. Zanotować krytyczną wartość rezystancji.
- Jeszcze bardziej zmniejszyć rezystancję R i zaobserwować ruch aperiodyczny (w miarę potrzeby zwiększyć napięcie na zasilaczu).
- Po wykonaniu pomiarów zwrócić wejście galwanometru, zmniejszyć do zera nastawę zasilacza, wyłączyć zasilacz i rozmontować układ pomiarowy.

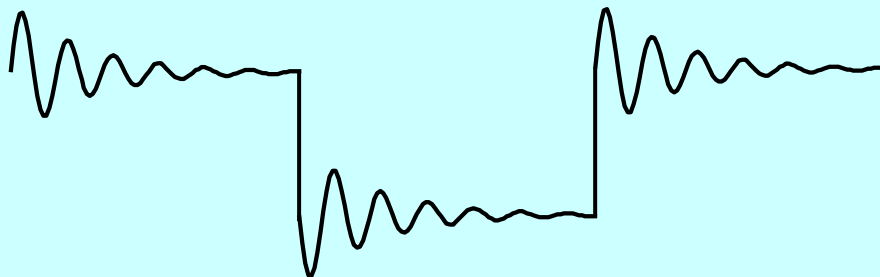
3.2. Badanie drgań elektromagnetycznych w obwodzie RLC

- Zestawić układ do badania drgań elektromagnetycznych, według niżej zamieszczonego schematu (rys.4). Układ ten działa następująco. Każda impulsowa zmiana napięcia na wyjściu generatora spowoduje powstanie drgań harmonicznnych tłumionych napięcia na kondensatorze C , jeżeli rezystor R jest odpowiednio mały. Napięcie to jest podawane na wejście Y oscyloskopu, gdzie po wzmacnieniu powoduje odchylenie plamki na ekranie oscyloskopu w kierunku pionowym, proporcjonalnie do swojej wartości. Aby obraz był stabilny, należy zastosować zewnętrzną synchronizację podstawy czasu. Impuls napięciowy, który powoduje powstanie drgań w obwodzie, należy podać na wejście synchronizacji podstawy czasu S , zapoczątkowując przesuw plamki w kierunku poziomym z wybraną przez nas prędkością.



Rys. 3. Schemat układu do obserwacji drgań elektromagnetycznych. Cewka i kondensator są umieszczone na wspólnej płytce. S - wejście zewnętrznej synchronizacji podstawy czasu.

- Po sprawdzeniu układu, włączyć generator impulsów prostokątnych, wybierając częstotliwość około 100 Hz. Nastawić wartość rezystancji R równą zero i włączyć oscyloskop. Po jego nagraniu powinien być widoczny obraz drgań harmonicznch tłumionych (rys. 4).
- Ustawić pokrętkę podstawy czasu i czułości wejścia Y oscyloskopu w pozycji kalibrowanej.



Rys. 4. Przebiegi napięcia na kondensatorze w obwodzie RLC zasilanym prostokątnymi impulsami napięcia.

- Wyregulować obraz na ekranie oscyloskopu tak, aby zmieściło się na nim ok. 10 okresów drgań napięcia na kondensatorze. Przeprowadzić pomiary amplitudy A w funkcji czasu t dla danych wartości indukcyjności L , pojemności C i dla dwóch wartości rezystancji: mała rezystancja R - drgania słabo tłumione, duża rezystancja R - drgania silnie tłumione. Całkowita rezystancja jest równa sumie rezystancji rezystora R , rezystancji omowej cewki R_c i rezystancji wyjściowego generatora R_g . Wyniki zapisać w tabeli 1. Zmierzyć okres drgań na odpowiednio dobranym zakresie podstawy czasu. Powtórzyć pomiary amplitudy A w funkcji czasu t oraz okresu drgań T dla takiej samej wartości indukcyjności L , innej wartości pojemności C i dla takich samych jak uprzednio wartości rezystancji.
- Przy ustalonej wartości indukcyjności i pojemności zmieniać rezystancję R tak, aby uzyskać przypadek krytycznego przebiegu napięcia na kondensatorze. Następnie rozciągnąć podstawę czasu tak, aby można było określić zależność napięcia na kondensatorze (wychylenia y) od czasu. Zapisać krytyczną wartość całkowitej rezystancji R_k .
- Uwzględniając, że dla $\beta t \gg 1$ (por. (23)) napięcie (wychylenie y) w przypadku krytycznym zanika wykładniczo w czasie (praktycznie zachodzi to dla czasów, dla których wychylenie jest mniejsze od połowy wychylenia maksymalnego), zmierzyć zależność napięcia na kondensatorze (wychylenia y) od czasu, a wyniki zamieścić w tabeli 2.
- Zwiększać wartość rezystancji R (notując jej wartość) tak, aby uzyskać przypadek aperiodyczny. Zmierzyć zależność napięcia na kondensatorze (wychylenia y) od czasu, zapisując wyniki w tabeli.
Uwaga ! Pomiary opisane w punktach 5 - 7 można przeprowadzić dla dwóch wartości pojemności kondensatora.
- Przedstawić wyniki do akceptacji, a po jej uzyskaniu rozmontować układ i uporządkować stanowisko pomiarowe.

4. Opracowanie wyników

1. Dla przypadku tłumienia słabego

Jeżeli zlogarytmujemy wzór (14) to otrzymamy :

$$\ln A = \ln x_0 - \beta t .$$

Podstawiając $\ln A = y$, $\ln x_0 = b$, $-\beta = a$, otrzymujemy równanie prostej: $y = ax + b$. Oznacza to, że punkty pomiarowe wykresu $\ln A$ w funkcji t powinny układać się na linii prostej. Wobec powyższego, dla przypadku drgań harmonicznch tłumionych (zarówno mechanicznch jak i elektrycznych) należy sporządzić wykresy zależności $\ln A$ od czasu i znaleźć wartości współczynników tłumienia β .

Dysponując wartościami współczynnika tłumienia β i wyznaczonymi doświadczalnie wartościami okresu drgań tłumionych T należy obliczyć wartości czasu relaksacji τ (17), wartości dekrementu

tłumienia δ (22), wartości częstości drgań tłumionych $\omega=2\pi/T$ i częstości drgań swobodnych ω_0 (19). Oszacować niepewności wyznaczonych wartości.

Uzyskane wyniki zestawić w tabelach 2 i 3; wyciągnąć wnioski dotyczące zgodności przewidywań teoretycznych z wynikami doświadczalnymi. Na przykład: Jak wpływa zmiana współczynnika tłumienia β na parametry drgań harmonicznych tłumionych, ω , τ , δ ? Czy wyznaczona doświadczalnie częstość ω jest różna dla różnych wartości współczynnika β ?

Tabela 2. Zestawienie wyników badań drgań mechanicznych (podać wraz z niepewnością standardową)

	β	τ	δ	ω	ω_0
słabe tłumienie					
silne tłumienie					

Tabela 3. Zestawienie wyników badań drgań elektromagnetycznych (podać niepewności rozszerzone)

	$L = \dots\dots\dots$ [H]	$L = \dots\dots\dots$ [H]	$L = \dots\dots\dots$ [H]	$L = \dots\dots\dots$ [H]	$L = \dots\dots\dots$ [H]	$L = \dots\dots\dots$ [H]
	$C = \dots\dots\dots$ [F]	$C = \dots\dots\dots$ [F]	$C = \dots\dots\dots$ [F]	$C = \dots\dots\dots$ [F]	$C = \dots\dots\dots$ [F]	$C = \dots\dots\dots$ [F]
	$R_{\text{cewki}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{cewki}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{cewki}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{cewki}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{cewki}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{cewki}} = \dots\dots\dots$ [Ω]
	$R_{\text{generatora}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{generatora}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{generatora}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{generatora}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{generatora}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{generatora}} = \dots\dots\dots$ [Ω]
	$R_{\text{rezystora}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{rezystora}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{rezystora}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{rezystora}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{rezystora}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{rezystora}} = \dots\dots\dots$ [Ω]
	$R_{\text{szeregowa}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{szeregowa}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{szeregowa}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{szeregowa}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{szeregowa}} = \dots\dots\dots$ [Ω]	$R_{\text{szeregowa}} = \dots\dots\dots$ [Ω]
	wynik teoretyczny	wynik pomiaru	wynik teoretyczny	wynik pomiaru	wynik teoretyczny	wynik pomiaru
$R_{\text{kryt}} [\Omega]$						
$T [s]$						
$\tau []$						
$\beta []$						
$\delta []$						
$\omega []$						
$\omega_0 []$						

Dla obwodu RLC porównać wyniki doświadczalne parametrów drgań tłumionych z wartościami teoretycznymi. Czy w granicach określonych niepewnością rozszerzoną wyniki są zgodne?

- Dla przypadku krytycznego powrotu do stanu równowagi w obwodzie RLC, na podstawie wykresu $\ln(y)$ w funkcji t określić, czy jego przebieg jest zgodny z przewidywaniami teoretycznymi (23) oraz, czy wyznaczona wartość β jest równa (w granicach niepewności) wartości teoretycznej.
- Dla przypadku aperiodycznego powrotu do stanu równowagi w obwodzie RLC sporządzić wykres funkcji $\ln(y)$ w funkcji t i wyznaczyć wartość współczynnika nachylenia „B”. Uwzględniając, że w tym przypadku:

$$B = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

oraz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

obliczyć wartość współczynnika tłumienia β i porównać ją z wartością teoretyczną.

5. Pytania kontrolne

- Jaka jest różnica pomiędzy drganiami harmonicznymi swobodnymi i tłumionymi?
- Co to jest czas relaksacji i logarytmiczny dekrement tłumienia?
- Jaki warunek musi być spełniony, aby zachodził krytyczny powrót oscylatora do stanu równowagi?
- Kiedy zachodzi aperiodyczny powrót oscylatora do stanu równowagi?
- Jaki warunek musi być spełniony, aby bryła wykonywała ruch obrotowy harmoniczny?

6. Literatura

- [1] J. Januszajtis, Fizyka dla politechnik. t. III, PWN Warszawa 1977, str. 57.
 [2] I.W. Sawieliew, Kurs Fizyki, t. II, PWN Warszawa 1989, str. 318.

DODATEK 1

Rozwiązania równania oscylatora harmonicznego tłumionego

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

poszukujemy w postaci funkcji:

$$x(t) = Ce^{\lambda t} . \quad (2)$$

Po podstawieniu i przekształceniach otrzymujemy równanie kwadratowe względem λ :

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 , \quad (3)$$

którego wyróżnik jest równy

$$\Delta = 4(\beta^2 - \omega_0^2) . \quad (4)$$

Przypadek 1. $\Delta < 0$, czyli $\beta < \omega_0$ - **słabe tłumienie.**

Równanie (3) nie posiada pierwiastków rzeczywistych. Posiada je jednak w dziedzinie liczb zespolonych. Aby je znaleźć, wyrażamy $\sqrt{\Delta}$ w postaci liczby urojonej, uwzględniając, że $\beta < \omega_0$:

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = 2\sqrt{-(\omega_0^2 - \beta^2)} = 2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \sqrt{-1} = i2\omega , \quad (5)$$

gdzie $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, $i = \sqrt{-1}$ - jednostka urojona. Zatem pierwiastkami równania (3) są:

$$\lambda_1 = \frac{-2\beta + i2\omega}{2} = -\beta + i\omega , \quad (6)$$

$$\lambda_2 = \frac{-2\beta - i2\omega}{2} = -\beta - i\omega . \quad (7)$$

Podstawiając otrzymane wartości parametru λ do wzoru (2) otrzymamy :

$$x(t) = Ce^{-\beta t} e^{i\omega t} \quad \text{i} \quad x(t) = Ce^{-\beta t} e^{-i\omega t} . \quad (8)$$

Pełnym rozwiązaniem jest kombinacja liniowa tych rozwiązań szczególnych, tj. suma tych funkcji pomnożonych przez stałe współczynniki:

$$x(t) = z_1 e^{-\beta t} e^{i\omega t} + z_2 e^{-\beta t} e^{-i\omega t} = e^{-\beta t} (z_1 e^{i\omega t} + z_2 e^{-i\omega t}) . \quad (9)$$

gdzie z_1 i z_2 - stałe liczby zespolone (współczynniki kombinacji). Funkcja $x(t)$ musi przyjmować wartości rzeczywiste, ponieważ wychylenie jest wielkością rzeczywistą. Ten warunek narzuca ograniczenia na liczby z_1 i z_2 . Funkcja $x(t)$ będzie rzeczywista, jeżeli jej sprzężenie zespolone (zamieniamy znak na przeciwny przy i) będzie równe samej funkcji, tj. $x^*(t) = x(t)$. Zatem:

$$e^{-\beta t} (z_1^* e^{i\omega t} + z_2^* e^{-i\omega t}) = e^{-\beta t} (z_1 e^{i\omega t} + z_2 e^{-i\omega t}), \quad (10)$$

a stąd przez porównanie współczynników przy wyrażeniach eksponencjalnych otrzymujemy następujące równania :

$$z_1 = z_2^* \quad \text{i} \quad z_1^* = z_2. \quad (11)$$

Zespolone współczynniki z_1 i z_2 można przedstawić w postaci:

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2, \quad (12)$$

a więc

$$a_1 + ib_1 = a_2 - ib_2, \quad a_1 - ib_1 = a_2 + ib_2. \quad (13)$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron tych równań otrzymujemy:

$$a_1 = a_2 = a, \quad b_1 = -b_2 = b. \quad (14)$$

Zgodnie ze wzorem (9) rozwiązanie przyjmie postać :

$$x(t) = e^{-\beta t} [(a + ib)e^{i\omega t} + (a - ib)e^{-i\omega t}]. \quad (15)$$

Wyrażenia eksponencjalne można przekształcić, korzystając ze wzorów Eulera:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t. \quad (16)$$

Po podstawieniu wzorów (16) do równania (15), wymnożeniu i redukcji otrzymamy:

$$x(t) = e^{-\beta t} (2a \cos \omega t - 2b \sin \omega t), \quad (17)$$

a po przekształceniach trygonometrycznych funkcję opisującą drgania harmoniczne tłumione:

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t - \phi). \quad (18)$$

Stałe x_0 i ϕ wyznaczane są na podstawie warunków początkowych.

Przypadek 2. $\Delta = 0$ czyli $\beta = \omega_0$ - tłumienie krytyczne.

W tym przypadku pierwiastkami równania (3) są:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta. \quad (19)$$

Zatem rozwiązaniem równania (1) jest funkcja :

$$x(t) = Ce^{-\beta t}. \quad (20)$$

Można łatwo dowieść, że równanie (2) spełnia również funkcja:

$$x(t) = Cte^{-\beta t} . \quad (21)$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (44) będzie kombinacja liniowa tych funkcji, czyli funkcja:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} , \quad (22)$$

która opisuje krytyczny powrót układu do stanu równowagi. Stałe A i B są wyznaczane na podstawie warunków początkowych.

Przypadek 3. $\Delta > 0$ czyli $\beta > \omega_0$ - silne tłumienie.

W tym przypadku pierwiastkami równania (3) są:

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \text{i} \quad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} . \quad (23)$$

Równanie (1) spełniają funkcje:

$$x(t) = Ce^{\lambda_1 t} \quad \text{i} \quad x(t) = Ce^{\lambda_2 t} , \quad (24)$$

a rozwiązaniem ogólnym jest kombinacja liniowa tych funkcji :

$$x(t) = A_1 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} , \quad (25)$$

opisująca aperiodyczny powrót układu do stanu równowagi. Stałe A_1 i A_2 są wyznaczane na podstawie warunków początkowych.

DODATEK 2

POSTĘPOWY RUCH HARMONICZNY	OBROTOWY RUCH HARMONICZNY	ELEKTROMAGNETYCZNE DRGANIA HARMONICZNE
DRGANIA SWOBODNE		
siła harmoniczna $F_h = -kx$	harmoniczny moment siły $M_h = -\kappa\alpha$	napięcie na kondensatorze $U_C = \frac{1}{C}q$
$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$	$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\alpha$	$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{LC}q$
$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t - \phi)$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t - \phi)$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$	$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t - \phi)$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
masa ciała m	moment bezwładności I	indukcyjność cewki L
współczynnik sprężystości sprężyny k	współczynnik sprężystości zawieszenia κ	odwrotność pojemności kondensatora $1/C$
położenie względem stanu równowagi x	położenie kątowe względem stanu równowagi α	ładunek zgromadzony w kondensatorze q
prędkość liniowa $v = \frac{dx}{dt}$	prędkość kątowna $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$	natężenie prądu $i = \frac{dq}{dt}$
przyspieszenie liniowe $a = \frac{d^2x}{dt^2}$	przyspieszenie kątowne $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$	$\frac{d^2q}{dt^2}$
energia potencjalna $W_p = \frac{1}{2}kx^2$	energia potencjalna $W_p = \frac{1}{2}\kappa\alpha^2$	energia pola elektrycznego w kondensatorze $W_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$
energia kinetyczna $W_k = \frac{1}{2}mv^2$	energia kinetyczna $W_k = \frac{1}{2}I\omega^2$	energia pola magnetycznego w cewce $W_B = \frac{1}{2}Li^2$
DRGANIA TŁUMIONE		
siła oporu proporcjonalna do prędkości liniowej $F_{op} = -bv$	moment sił oporu proporcjonalny do prędkości kątownej $M_{op} = -\xi\omega$	napięcie na rezystorze prop. do natężenia prądu $U_R = Ri$
$ma = -kx - bv$	$I\varepsilon = -\kappa\alpha - \xi\omega$	$L \frac{di}{dt} = -\frac{1}{C}q - Ri$
$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$	$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{\xi}{I} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\kappa}{I}\alpha = 0$	$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$
współczynnik tłumienia		
$\beta = \frac{b}{2m}$	$\beta = \frac{\xi}{2I}$	$\beta = \frac{R}{2L}$
$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$	$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = 0$	$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$
$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_t t - \phi)$	$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_t t - \phi)$	$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_t t - \phi)$
$\beta < \omega_0$	$\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$	$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$