

## POMIAR DŁUGOŚCI FALI ŚWIETLNEJ ZA POMOCĄ SIATKI DYFRAKCYJNEJ I SPEKTROMETRU

### 1. Podstawy fizyczne

Fala elektromagnetyczna są to rozchodzące się w przestrzeni periodyczne zmiany pola elektrycznego i magnetycznego. Wektory natężenia pola elektrycznego  $E$  i indukcji magnetycznej  $B$  fali elektromagnetycznej są do siebie prostopadłe a ich wartości proporcjonalne. Dlatego przy opisie zjawisk falowych wystarczy wybrać jeden z nich np.  $E$ . Falę elektromagnetyczną rozchodzącą się wzdłuż osi  $X$  możemy opisać za pomocą funkcji falowej:

$$E(x,t) = E_0 \sin(\omega t - kx)$$

(1a)

gdzie:  $E_0$  jest **amplitudą natężenia pola elektrycznego**, argument funkcji sinus,  $(\omega t - kx)$  nazywamy **fazą fali**,  $\omega$  - **częstością kołową**,  $k$  - **liczbą falową** związaną z długością fali  $\lambda$  zależnością :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(1b)

Jak wynika ze wzorów (1a) i (1b) przebycie przez falę drogi  $x = \lambda$  powoduje zmianę fazy fali o kąt  $2\pi$ . Ponieważ  $2\pi$  jest okresem funkcji sinus to wszystkie punkty, w których fazy będą różniły się o wielokrotność  $2\pi$ , będą miały takie same wartości natężenia pola elektrycznego  $E$ . Mówimy wówczas, że drgania natężenia pola w tych punktach są zgodne w fazie.

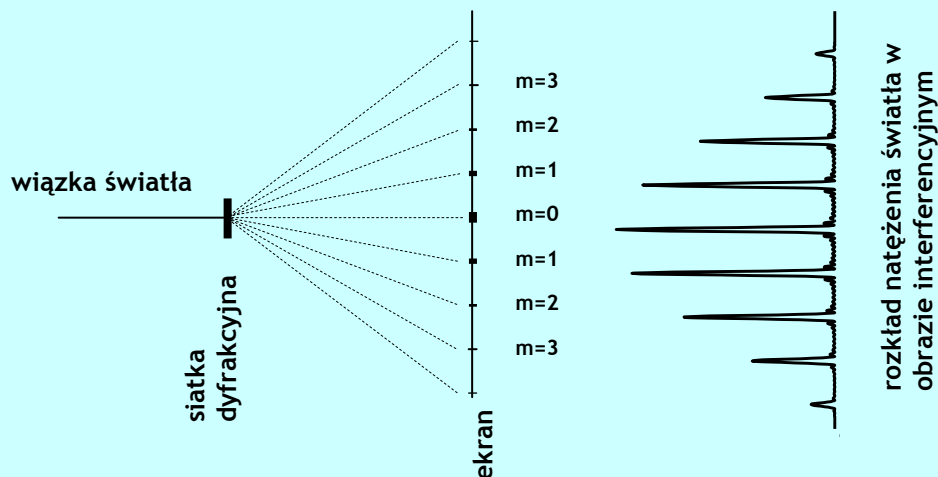
Fala elektromagnetyczna jest **falą poprzeczną** co oznacza, że wektory natężenia pola elektrycznego i indukcji magnetycznej są zawsze prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali. W przypadku fali opisywanej równaniem (1a) będą się one zmieniały tylko wzdłuż osi  $X$  - będą natomiast stałe w płaszczyznach  $YZ$  prostopadłych do osi  $X$ . Wszystkie punkty na danej płaszczyźnie  $YZ$  będą miały jednakową fazę. Falę taką nazywamy **falą płaską**.

Zjawisko interferencji powstaje w wyniku nałożenia się dwóch lub więcej fal w danym punkcie przestrzeni. Obraz interferencyjny możemy zaobserwować wówczas gdy:

1. Źródła są monochromatyczne (wysyłają fale o jednej długości fali).
2. Źródła interferujących fal są spójne (koherentne) - tzn. fale wysyłane przez te źródła zachowują stałą w czasie różnicę faz.

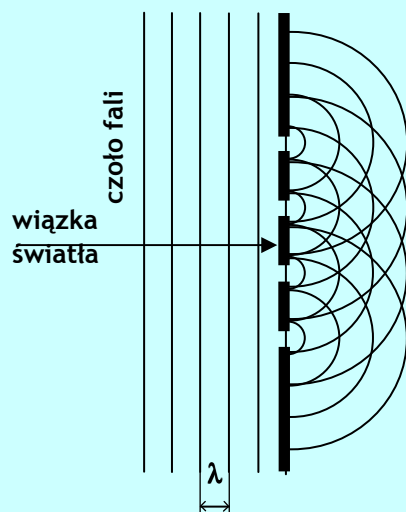
#### 1.1. Siatka dyfrakcyjna

Obraz interferencyjny można wytworzyć za pomocą układu równoległych szczelin, który nazywamy siatką dyfrakcyjną. Podstawowym parametrem charakteryzującym siatkę dyfrakcyjną jest **odległość między szczelinami  $d$  zwaną stałą siatki**. Oświetlenie siatki dyfrakcyjnej równoległą wiązką światła powoduje powstanie na ekranie umieszczonym za siatką obrazu interferencyjnego w postaci prążków przedstawionych na rysunku 1a. Obraz jest dobrze widoczny, jeśli są spełnione podane wyżej warunki oraz gdy stała siatki jest porównywalna z długością fali świetlnej. Dla zakresu światła widzialnego o długości z zakresu od 400 do 700 nm odległość między szczelinami powinna wynosić około 1  $\mu\text{m}$ . Oznacza to, że wiązka światła o szerokości 2 mm oświetla 2000 szczelin.



Rys. 1a. Powstawanie i rozkład natężeń w obrazie interferencyjnym.

Opis powstania takiego obrazu na ekranie należy rozpocząć od przypomnienia **zasady Huygensa**. Mówi ona o tym, że każdy punkt przestrzeni, do którego dociera fala może być traktowany jako źródło nowej, **wtórnej fali kulistej**. Fala kulista rozchodzi się we wszystkich kierunkach, a obserwowana fala jest złożeniem (superpozycją) wszystkich kulistych fal elementarnych. Punkty w przestrzeni posiadające taką samą fazę tworzą **czoło fali** - w przypadku fali płaskiej **czoło fali** stanowi płaszczyznę.



Rys. 1b. Ilustracja zasady Huygensa.

Założmy teraz, że fala płaska pada na siatkę dyfrakcyjną o stałej  $d$ , w której szczeliny są bardzo wąskie. Zgodnie z zasadą Huygensa każda ze szczelin siatki dyfrakcyjnej staje się źródłem nowej fali kulistej o jednakowej fazie początkowej (rysunek 1b). Oznacza to, że w przestrzeni za siatką rozchodzą się fale kuliste. Liczba tych fal jest równa liczbie szczelin oświetlonych przez wiązkę świetlną. Do każdego punktu przestrzeni za siatką docierają fale pochodzące ze **wszystkich** źródeł i zachodzi zjawisko **interferencji**.

**Interferencja** jest to nakładanie się w danym punkcie przestrzeni przeliczalnej liczby fal, które może prowadzić do ich **wzmocnienia** lub **wygaszenia**, w zależności od różnicy faz. **Maksimum natężenia** występuje w punktach, w których interferujące fale będą zgodne w fazie, czyli różnica faz będzie równa:

$$\varphi = m \cdot 2\pi \quad (\text{gdzie } m=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Przy założeniu równości faz początkowych wszystkich fal kulistych wytwarzanych przez siatkę dyfrakcyjną, różnica faz w dowolnym punkcie przestrzeni P zależy tylko od różnicy **dróg optycznych** (dróg geometrycznych dla próżni)  $\Delta$ . Różnicy dróg równej długości fali,  $\Delta = \lambda$  odpowiada różnica faz  $\varphi = 2\pi$ . W ogólności możemy tę zależność zapisać w postaci proporcji:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta}{\lambda} \quad \dots\dots (2b)$$

Porównując wzór (2b) z (2a) otrzymuje się zależność:

$$\Delta = m \cdot \lambda. \quad (2c)$$

Tak więc wzmocnienie (maksimum interferencyjne) następuje wówczas, gdy różnica dróg optycznych jest równa wielokrotności długości fali.

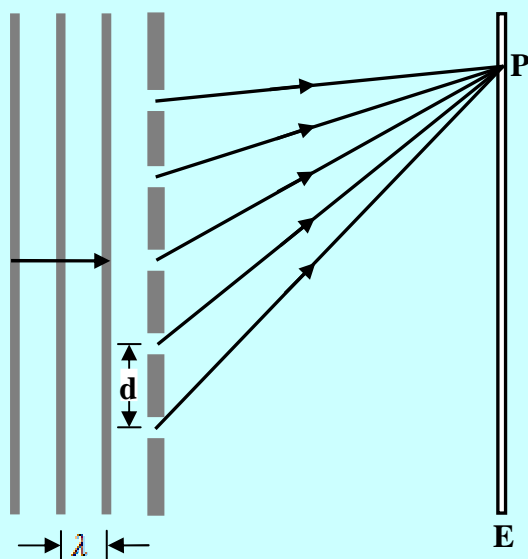
Minimum natężenia występuje w punktach, w których różnica faz interferujących fal jest równa nieparzystej wielokrotności  $\pi$ :

$$\varphi = (2m+1)\pi \quad (\text{gdzie } m=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3a)$$

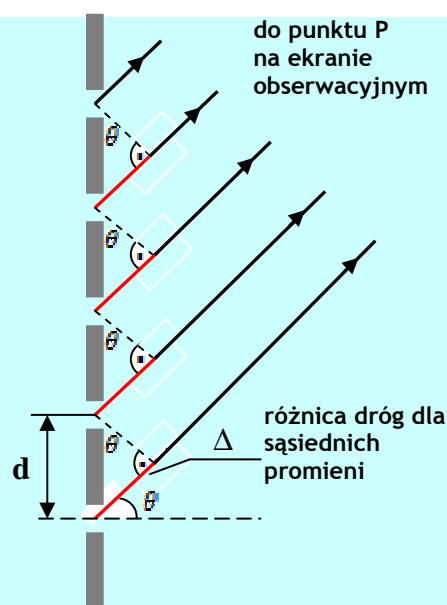
co odpowiada różnicy dróg optycznych:

$$\Delta = (2m+1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3b)$$

## 1.2. Powstawanie maksimum interferencyjnych w siatce dyfrakcyjnej



Rys.2a . Uproszczona siatka dyfrakcyjna, na którą składa się tylko pięć szczelin, - wytwarza obraz interferencyjny na odległym ekranie E.



Rys. 2b. Ze względu na dużą odległość ekranu w porównaniu do szerokości szczelin, promienie światła wychodzące ze szczelin siatki, są w przybliżeniu równoległe.

Jak widać na rysunku 2b różnica dróg optycznych promieni wychodzących z sąsiednich szczelin wynosi:  $\Delta = d \sin \theta$ . Maksima interferencyjne w siatce dyfrakcyjnej występują zgodnie z warunkiem określonym równaniem (2c) gdy:

$$d \sin \theta = m \lambda. \quad (4)$$

Kąt  $\theta$  w tym wzorze oznacza kąt, pod jakim względem prostopadłej do siatki dyfrakcyjnej, widoczne jest na ekranie maksimum  $m$ -tego rzędu. Położenie maksimów zaznaczono na rys. 1a.

Jak widać z powyższego wzoru, kąty pod którymi obserwujemy maksima interferencyjne nie zależą od liczby szczelin w siatce natomiast zależą od odległości między szczelinami,  $d$ , i od długości fali światła padającego  $\lambda$ . Dlatego też za pomocą siatki dyfrakcyjnej możemy rozłożyć padającą wiązkę światła na składowe odpowiadające różnym długościom fal.



Rys. 3. Widmo wysyłane przez lampę helową.

Mierząc kąty  $\theta$  i znając stałą siatki możemy wyznaczyć długości fal wysyłanych przez lampę:  $\lambda = d \sin \theta / m$ .

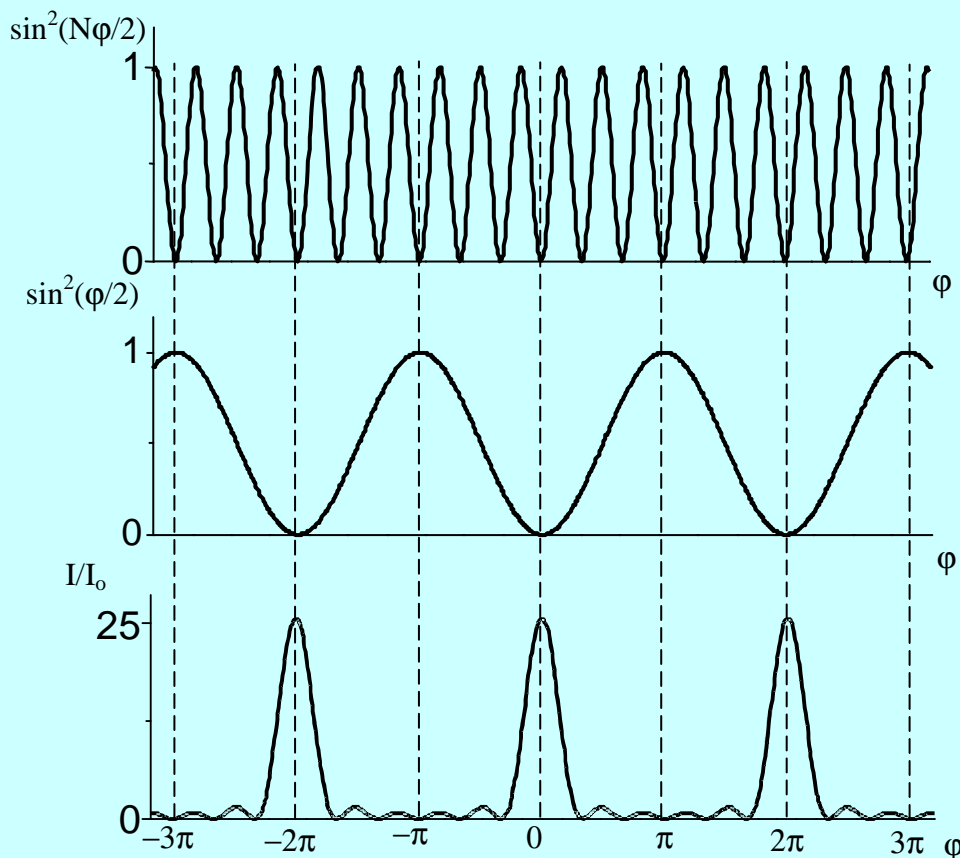
### 1.3. Natężenie światła w obrazie interferencyjnym

Wypadkowe natężenie tj. średnia moc przenoszona przez fale wysyłane z  $N$  szczelin siatki dyfrakcyjnej wyraża się wzorem:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} .$$

(5)

gdzie:  $I_0$  jest natężeniem fali pochodzącej z jednego źródła (szczeliny) i jest równe kwadratowi amplitudy  $E_0^2$ ,  $\varphi$  - oznacza różnicę faz dwóch fal wysyłanych z sąsiednich szczelin siatki dyfrakcyjnej.



Rys. 4. Obraz interferencyjny dla pięciu szczelin. Przedstawiono poszczególne czynniki z równania (5) oraz ich ilorz. Główne maksima przedzielone są szeregiem mniejszych maksimów bocznych.

Zależność natężenia  $I$  od kąta  $\varphi$  (który z kolei zależy od kąta  $\theta$ ), zawiera zmienny czynnik  $\sin^2(N\varphi/2)$ , modulowany przez znacznie wolniej zmienne wyrażenie  $\sin^2(\varphi/2)$ . Każdy z tych czynników jak i ich iloraz przedstawiono na rysunku 4. Wyprowadzenie wzoru znajduje się na końcu instrukcji.

Wartość wyrażenia (5) dla kąta  $\varphi = 0$ , można obliczyć stosując przybliżenie  $\sin(N\varphi/2) \sim (N\varphi/2)$  i  $\sin(\varphi/2) \sim (\varphi/2)$  i przechodząc z  $\varphi \rightarrow 0$ . Otrzymamy wówczas:

$$I = I_0 \frac{(N\varphi/2)^2}{(\varphi/2)^2} = N^2 I_0$$

Identyczny wynik uzyskamy dla wszystkich kątów spełniających warunek:  $\varphi = m \cdot 2\pi$ . a więc wypadkowe natężenie w maksimach głównych jest  $N^2$  razy większe od natężenia światła z pojedynczej szczeliny.

W miarę jak kąt  $\varphi$  wzrasta od wartości 0, stosunek kwadratów dwóch sinusów we wzorze (5) zaczyna maleć i pierwsze minimum dyfrakcyjne otrzymamy wówczas, gdy licznik wyrażenia (5) przyjmuje wartość zerową, czyli gdy  $(N\varphi/2) = \pi$ , to znaczy  $\varphi = 2\pi/N$ . Dalsze zwiększanie fazy  $\varphi$ , prowadzi do zwiększenia amplitudy wypadkowej i pojawienia się maksimum bocznego. Maksima boczne występują dla kątów  $\varphi$  dla których licznik wyrażenia (5) równy jest 1, są one jednak znacznie słabsze od maksimów głównych (rys.4).

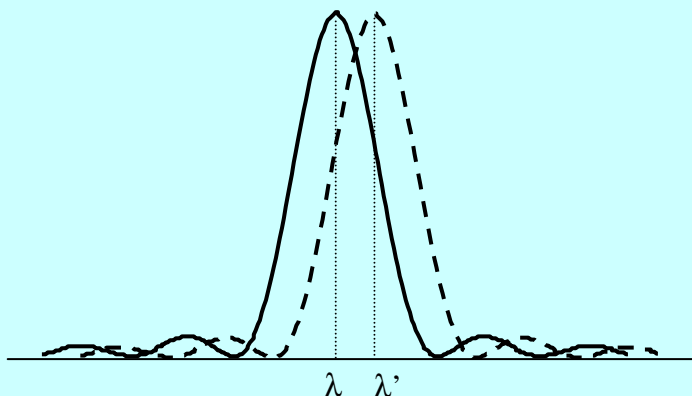
#### 1.4. Zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej

Jak już wspominaliśmy, siatkę dyfrakcyjną możemy wykorzystać do rozdzielania fal o różnych długościach. Pytamy jaka może być najmniejsza różnica między długościami fal  $\lambda$  i  $\lambda'$ , aby można je było rozróżnić za pomocą siatki dyfrakcyjnej? Wprowadźmy w tym celu pojęcie zdolności rozdzielczej  $R$ , siatki, którą definiujemy jako:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} ,$$

(6)

gdzie:  $\lambda$  - jest jedną z długości fali dwu linii widmowych a  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  jest różnicą długości fali między nimi.



Rys.5. Ilustracja kryterium Rayleigha.

Powszechnie stosowanym warunkiem na rozdzielanie dwóch fal o bliskich sobie długościach jest tzw. **kryterium Rayleigha**, które mówi, że aby dwa maksima główne były rozróżniane, to odległość kątowna powinna być taka, aby minimum jednej linii przypadło w maksimum drugiej linii (rys.5). Jak wiemy, pierwsze minimum dyfrakcyjne wypada w odległości  $\varphi = (2\pi/N)$  od maksimum głównego (zerowanie się licznika w równaniu (5)), taka różnica faz odpowiada różnicy długości dróg optycznych  $(\lambda/N)$ . A więc warunek na pierwsze minimum dla widma  $m$ -tego rzędu możemy zapisać:

$$d \sin \theta = m\lambda + \frac{\lambda}{N} .$$

(7)

Równocześnie dla fali o długości  $\lambda'$  musimy otrzymać w tym miejscu maksimum natężenia, czyli:  $d\sin\theta = m\lambda'$ . Odejmując stronami te dwa wyrażenia otrzymujemy po przekształceniu:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \quad (8)$$

gdzie:  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ ,  $m$  jest rzędem widma,  $N$  jest liczbą szczelin.

Widzimy, że zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej jest tym większa, im więcej biorących udział w interferencji szczelin zawiera siatka i im wyższy jest rząd widma. Możemy ten fakt łatwo sprawdzić, obserwując obrazy interferencyjne za pomocą spektrometru z siatką dyfrakcyjną, którą oświetlamy np. lampą neonową. Prążki w widmie drugiego rzędu są lepiej rozdzielone niż pierwszego, ale pojawia się pewna trudność w ich obserwacji, ponieważ mają one słabsze natężenie w porównaniu z prążkami pierwszego rzędu. Dlaczego tak się dzieje?

### 1.5. Wpływ skończonej szerokości pojedynczej szczeliny na obraz interferencyjny.

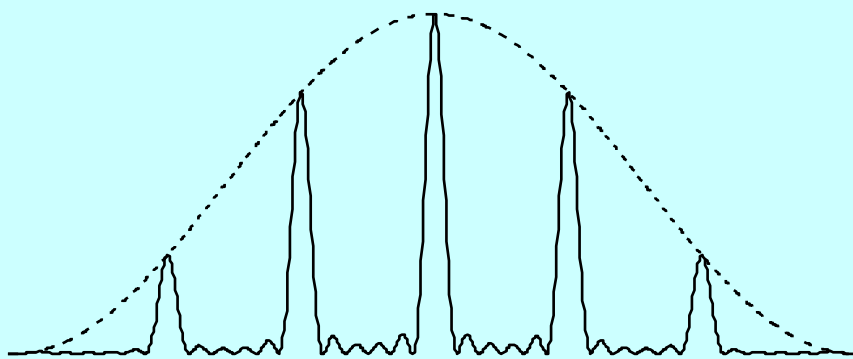
Z dotychczasowych rozważań wynika, że wszystkie maksima główne powinny mieć takie samo natężenie. Pamiętajmy jednak, że wynik ten uzyskaliśmy zakładając, że szczeliny siatki są na tyle wąskie, że możemy zaniedbać różnice faz między punktami w obrębie jednej szczeliny. W rzeczywistości warunek ten nie jest spełniony i musimy uwzględnić dyfrakcję na pojedynczej szczelinie. Aby otrzymać wzór na natężenie światła ugiętego na pojedynczej szczelinie postępujemy podobnie jak w przypadku siatki dyfrakcyjnej. Dzielimy szczelinę na  $M$  równych, bardzo wąskich pasków. Jeśli przechodzimy w granicy z  $M \rightarrow \infty$  zachowując stałą różnicę faz  $\alpha = M\varphi$  między jednym brzegiem szczeliny a drugim, to kąt  $\varphi$  we wzorze (5) staje się tak mały, że słusznie jest przybliżenie:  $\sin(\alpha/M) \sim (\alpha/M)$ . Wówczas  $I_0 = I_0' M^2$  - gdzie  $I_0'$  jest natężeniem światła wysyłanych przez jeden z pasków, na które podzieliliśmy szczelinę. Wyrażenie na natężenie światła ugiętego na pojedynczej szczelinie przyjmuje postać:

$$I_{dyf.} = I_0 \frac{\sin^2(\alpha/2)}{(\alpha/2)^2}, \quad (9)$$

gdzie:  $\alpha$  - oznacza różnicę faz między promieniami pochodzącymi z dwóch brzegów szczeliny,  $I_0$  - jest natężeniem światła wysyłanym przez jedną szczelinę.

Tak więc wzór na natężenie obrazu interferencyjnego z siatki dyfrakcyjnej będzie złożeniem wzorów (5) i (9):

$$I = I_{dyf.} \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}. \quad (10)$$



**Rys.6. Rozkład natężeń dla siatki dyfrakcyjnej w której szerokość szczeliny  $a = (d/3)$ , gdzie  $d$  jest odległością między szczelinami.**

Na rysunku 6 przedstawiono obraz interferencyjny dla siatki dyfrakcyjnej z  $N=5$  szczelinami, z uwzględnieniem dyfrakcji na pojedynczej szczelinie, której szerokość  $a = d/3$ , gdzie  $d$  - jest

odległością między szczelinami. W tym przypadku łatwo zauważyć, że  $\alpha = \varphi/3$ , a więc wyrażenie (9) zmienia się znacznie wolniej niż (5), dlatego otrzymujemy stopniowe zmniejszanie się jasności prążków dla dalszych części widma. Przedstawiony na rysunku 6 rozkład natężeń został otrzymany przy założeniu idealnych szczelin o ostrych równoległych brzegach. Poprzez odpowiedni dobór kształtu szczelin, możemy znaleźć postać czynnika modulującego,  $I_{\text{dyf.}}$ , we wzorze (10), na przykład w ten sposób aby lepiej widoczne były dalsze rzędy widma posiadające lepszą zdolność rozdzielczą.

## 2. Wykonanie ćwiczenia

1. Włączyć lampę sodową i ustawić siatkę dyfrakcyjną na stoliku spektrometru prostopadle do wiązki światła wychodzącej z kolimatora.
2. Zmierzyć kąty pod którymi widać kolejne rzędy widma, po prawej i lewej stronie względem kierunku wiązki padającej. Jeśli kąty ugięcia mierzone po lewej i prawej stronie różnią się o więcej niż  $5^\circ$  - należy dokonać korekty ustawienia siatki.  
Żółty prążek światła sodowego składa się w rzeczywistości z dwóch bardzo bliskich linii o długościach fal:  $\lambda_1 = 589,6 \text{ nm}$  i  $\lambda_2 = 589,0 \text{ nm}$ . Zaobserwować dla którego rzędu ugięcia widoczny jest rozdzielony dublet sodowy.
3. Włączyć lampę wskazaną przez prowadzącego i wykonać pomiary kątów dla obserwowanych prążków.

## 3. Opracowanie wyników

1. Na podstawie pomiarów wykonanych z lampą sodową wyznaczyć stałą siatki (wzór (4)) oraz jej niepewność. Uwzględnić niepewności standardowe obliczane metodą typu A i B. Długość fali światła sodowego przyjąć równą  $\lambda_{\text{Na}} = 589,3 \text{ nm}$ .
2. Znając stałą siatki wyznaczyć długość fal wysyłanych przez atomy drugiego z gazów i obliczyć ich niepewności standardowe złożone. Obliczyć niepewności rozszerzone, zapisać poprawnie wyniki pomiarów i porównać z danymi tablicowymi.
3. Na podstawie pomiarów i obserwacji przeprowadzonych w punkcie 2 w wykonaniu ćwiczenia, wyznaczyć zdolność rozdzielczą siatki dyfrakcyjnej i obliczyć liczbę szczelin  $N$  biorących udział interferencji (wzór (8)).

## 4. Pytania kontrolne

1. Kiedy możemy zaobserwować obraz interferencyjny?
2. Podaj interpretację wzoru na położenie maksimów natężeń obrazu interferencyjnego (wzór 4).
3. Co to jest zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej i w jaki sposób możemy ją zwiększyć?
4. Dlaczego dalsze rzędy widma są coraz słabiej widoczne?

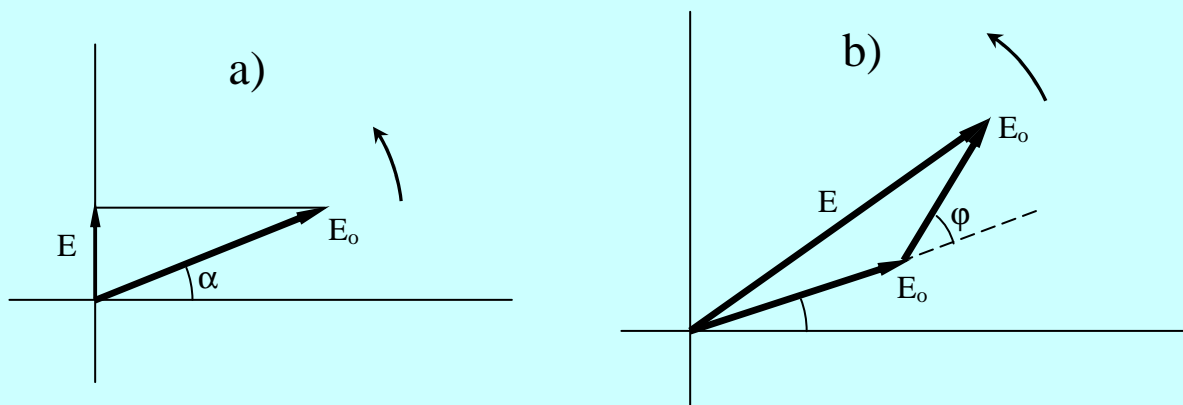
## 5. Literatura

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki, PWN (2005 r.) t.4 rozdział 36,37.
2. J. Orear, Fizyka, PWN (1990 r.) t.II rozdział 22.

## Dodatek

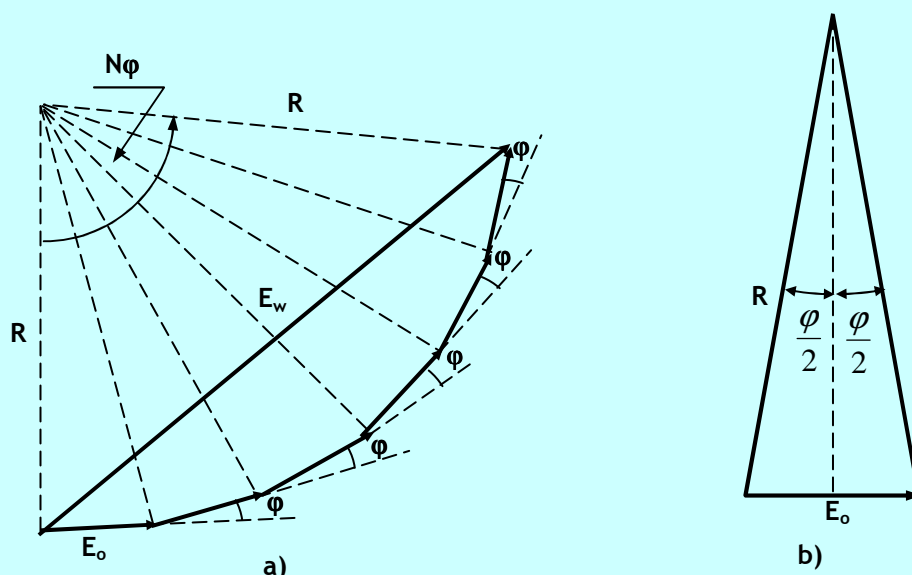
### Natężenie światła w obrazie interferencyjnym

Przeanalizujemy teraz, jak będzie wyglądał obraz interferencyjny w punktach znajdujących się pomiędzy maksimami głównymi, dla siatki mającej  $N$  szczelin. W tym celu posłużymy się metodą graficzną tzw. metodą wskazówek. W metodzie tej, natężenie pola  $E$  opisywane równaniem (1a) przedstawiamy za pomocą wektora, którego długość wynosi  $E_0$  a kąt  $\alpha$  jaki tworzy on z osią  $X$  równy jest wartości jego fazy.



**Rys.1D** a) Wektorowa ilustracja równania (1a):  $E_0$  - amplituda fali,  $a = (\omega t - kx)$  - faza,  $E = E_0 \sin a$ . Wektor obraca się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. b) Wektorowe dodawanie dwu fal,  $\phi$  - różnica faz,  $E_w$  - amplituda wypadkowa.

Ponieważ faza zmienia się w czasie, wektor ten obraca się przeciwnie do wskazówek zegara. Ponieważ różnica faz między falami pochodzącymi od sąsiednich szczelin wynosi  $\phi$ , wektorowy diagram zaburzeń będzie zawierał  $N$  wektorów o równych długościach  $E_0$  i kącie między sąsiednimi wektorami równym  $\phi$ .



**Rys.2D.** Graficzne dodawanie funkcji falowych pochodzących od  $N$  równoległych szczelin, dla których różnica faz pomiędzy sąsiednimi szczelinami wynosi  $\phi$ . Rysunek wykonano dla  $N = 5$  szczelin.



Jak widać na rys.2D, końce tych wektorów leżą na okręgu, którego promień  $R$  dany jest zależnością:

$$\frac{1}{2} E_0 = R \sin \frac{\varphi}{2} . \quad (1D)$$

Wypadkowa amplituda  $E_w$  jest podstawą równoramiennego trójkąta o bokach równych  $R$  i kącie przy wierzchołku równym  $N\varphi$ . Stąd:

$$E_w = 2R \sin \frac{N\varphi}{2} . \quad (2D)$$

Łącząc te dwa wyrażenia, otrzymamy wzór na wypadkową amplitudę:

$$E_w = E_0 \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} . \quad (3D)$$

Wypadkowe natężenie tj. średnia moc przenoszona przez falę jest proporcjonalne do kwadratu wypadkowej amplitudy  $E_w$  i wynosi:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} . \quad (4D)$$