

## WYZNACZANIE PRACY WYJŚCIA ELEKTRONÓW Z METALU METODĄ PROSTEJ RICHARDSONA\*

### 1. Podstawy fizyczne

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się ze zjawiskiem termoemisji elektronów i wyznaczenie ich pracy wyjścia z metalu (katoda lampy elektronowej). Termoemisją nazywamy zjawisko wychodzenia elektronów z rozgrzanej powierzchni danego ciała do otaczającej przestrzeni. Zjawisko to jest jednym z kilku zjawisk emisji elektronów pod wpływem dostarczonej energii. W zależności od sposobu doprowadzenia tej energii rozróżnia się następujące rodzaje emisji: termoelektronową, fotoelektronową, wtórną i polową.

**Emisja termoelektronowa** zachodzi (jak to już wspomniano) w wyniku nagrzania danego ciała do odpowiednio wysokiej temperatury.

**Emisja fotoelektronowa** występuje wskutek pochłaniania przez substancję energii promieniowania elektromagnetycznego.

**Emisja wtórna** jest to emisja zachodząca wskutek bombardowania ciała elektronami lub jonami.

**Emisja polowa** natomiast, jest to emisja elektronów z materiału zachodząca pod działaniem bardzo silnego pola elektrycznego.

#### 1.1. Własności gazu elektronowego

Dokładna analiza zjawiska termoemisji wymaga znajomości mechaniki kwantowej. Jedną z fundamentalnych zasad tej teorii fizycznej jest przyjęcie falowej natury cząstek materii. Słuszność tej zasady potwierdziły liczne doświadczenia fizyczne. Jednak tzw. „fala materii” nie jest żadną realną falą, jak choćby fala akustyczna czy elektromagnetyczna, ale jest to abstrakcyjna fala prawdopodobieństwa związanej z losami danej cząstki. Zgodnie z mechaniką kwantowa, cząsteczki w ciele stałym (np. elektrony) można traktować jak fale stojące, zamknięte w wymiarach danego ciała. Przy takim podejściu do problemu okazuje się, że taka cząstka-fala nie może mieć dowolnej energii, lecz tylko jedną z ciągu wartości dyskretnych. Mówimy, że energia rozpatrywanego układu cząstka - ciało stałe jest skwantowana.

W fizyce klasycznej elektrony traktuje się jak cząstki podlegające statystyce (rozkładowi) Maxwella - Boltzmana, natomiast zgodnie z teorią kwantową do elektronów należy stosować **kwantową statykę Fermiego-Diraca**, gdyż elektrony jako cząstki mające spin połówkowy (spin - własny moment pędu elektronu równy  $\hbar/2$ ) podlegają zakazowi Pauliego. Zakaz ten mówi, że dwa **fermiony**, czyli cząstki o spinie połówkowym nie mogą zajmować tego samego stanu kwantowego. W wyniku **zakazu Pauliego** zachodzi np. taka sytuacja, że jeden poziom energetyczny może być zajęty przez co najwyżej dwa elektrony o przeciwnie skierowanych spinach. Jak wynika z powyższego, kwantowy gaz elektronowy zachowuje się inaczej niż gaz „klasyczny”. Uproszczone wyprowadzenie statystyki Fermiego - Diraca znajduje się w uzupełnieniu niniejszej instrukcji.

W myśl tej statystyki liczba  $n$  elektronów o energii z przedziału  $(E, E + dE)$  wyniesie:

$$n(E)dE = \frac{N(E)dE}{1 + \exp[(E - E_F)/kT]} = f(E)N(E)dE \quad (1)$$

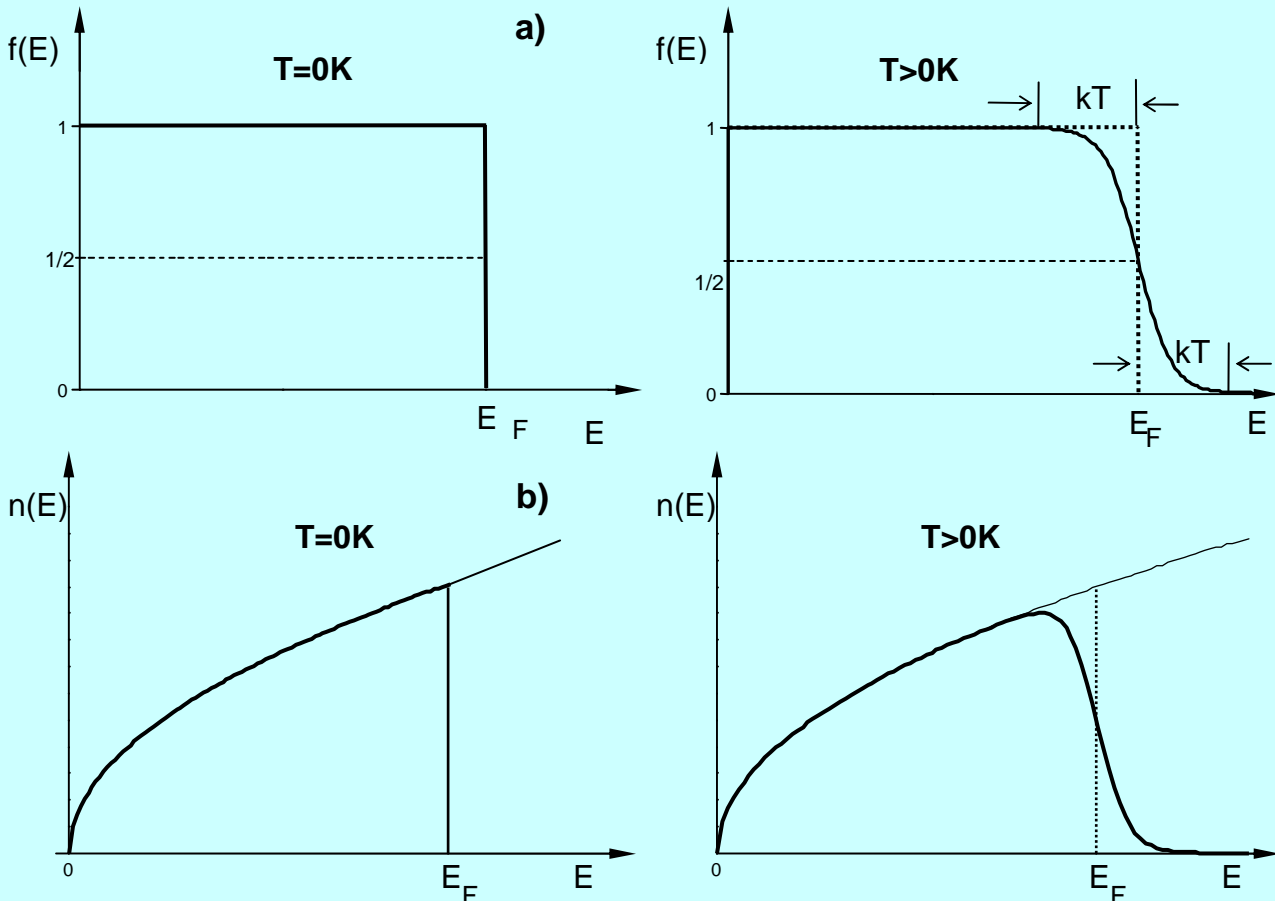
gdzie:

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp[(E - E_F)/kT]} \quad (2)$$

\* Sir Owen Williams Richardson (1879 - 1959) - fizyk angielski, otrzymał w 1928r. nagrodę Nobla za odkrycie zależności gęstości prądu termoemisji od temperatury emitującego metalu.

jest funkcją rozkładu Fermiego-Diraca określającą prawdopodobieństwo obsadzenia przez elektron poziomu o energii  $E$ .  $E_F$  oznacza energię (poziom) Fermiego.  $N(E)dE$  - jest liczbą możliwych stanów energetycznych elektronu leżących w przedziale energii  $E$ ,  $E+dE$ ;  $k$  - stała Boltzmana,  $T$  - temperatura ciała.

Kształt funkcji rozkładu  $f(E)$  i funkcji  $n(E)$  przedstawia rysunek 1. Dla poziomu obsadzonego przez dwa elektrony -  $f(E) = 1$ , przez jeden -  $f(E) = \frac{1}{2}$  a dla pustego  $f(E) = 0$ . W temperaturze 0 K elektrony obsadzają możliwe najniższe dozwolone poziomy energetyczne, a więc od najniższych do coraz wyższych. W tej temperaturze (0 K) najwyższym obsadzonym poziomem jest poziom energii Fermiego  $E_F$ . Poziomy wyższe od poziomu Fermiego są nieobsadzone, czyli  $f(E) = 0$ .



Rys.1. a) Funkcja rozkładu Fermiego - Diraca  $f(E)$  dla 0 K i dla  $T > 0 K$ ; b) Funkcja  $n(E)$  równa iloczynowi funkcji  $f(E)N(E)$  dla 0 K i dla  $T > 0 K$ .

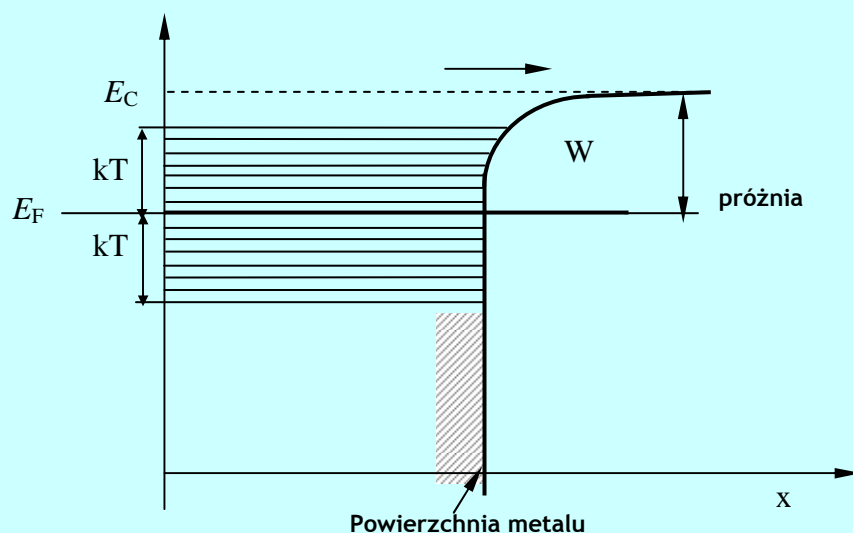
W temperaturze  $T > 0 K$  większość elektronów swobodnych metalu ma nadal energię poniżej poziomu Fermiego, a tylko niewielki procent elektronów ma energię przewyższającą poziom Fermiego. Jak widać z rysunku 1a, dla  $T = 0 K$ , gdy  $E = E_F$ , to  $f(E) = \frac{1}{2}$  czyli dla energii Fermiego średnie prawdopodobieństwo obsadzenia poziomu wynosi  $\frac{1}{2}$  (jeden elektron na dany poziom).

Część elektronów może mieć energię wystarczającą do pokonania naturalnej bariery potencjału przy powierzchni metalu. Należy się spodziewać, że liczba takich elektronów będzie wzrastała wraz z temperaturą.

## 1.2. Termoemisja

Zakładamy, że elektrony swobodne stanowią pewnego rodzaju gaz wypełniający objętość metalu i ich energia jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej, gdzie energia kinetyczna jest dodatnia a potencjalna ujemna. Powierzchnia metalu, jak wspomniano uprzednio, stanowi barierę potencjału dla elektronów, którą muszą pokonać, jeśli chcą wyrwać się z metalu.

Zakładamy też, że powierzchnia metalu jest gładka i że poza nią rozciąga się próżnia. Stany energetyczne poniżej poziomu Fermiego są w zdecydowanej większości obsadzone; obsadzenie bardzo szybko maleje przy przejściu do energii powyżej poziomu Fermiego.



Rys.2. Poziomy energetyczne w pobliżu powierzchni metalu.

$W = E_C - E_F$  zdefiniowane jest jako tzw. **praca wyjścia**, czyli energia potrzebna do przeniesienia elektronu z poziomu Fermiego na poziom  $E_C$ , gdzie  $E_C$  - energia elektronu w próżni czyli na zewnątrz metalu. Można przyjąć, że  $E_C = 0$ . W praktyce przyjmuje się zwykle  $W = e\phi$  ( $e$  - ładunek elektronu;  $\phi$  - potencjał wyjścia mierzony w voltach). Istnienie potencjału wyjścia, a tym samym i pracy wyjścia, wynika z elektrycznego oddziaływania przyciągającego pomiędzy elektronami swobodnymi a siecią krystaliczną złożoną ze zjonizowanych dodatnio atomów metalu. Jest więc zrozumiałe, że elektrony muszą dostać dodatkową energię aby pokonać wynikający z tych oddziaływań próg potencjału  $\phi$  i wyrwać się z metalu.

Na rysunkach 1 i 2 widać, że w miarę wzrostu temperatury elektrony w pobliżu poziomu Fermiego mogą zwiększyć swoją energię o wielkość rzędu  $kT$  i przejść na wyższe poziomy energetyczne. Jeśli praca wyjścia jest porównywalna z  $kT$  wtedy mogą nawet opuścić metal, pokonując potencjał wyjścia. Warto pamiętać, że typowa energia Fermiego jest rzędu kilku elektronowoltów, natomiast energia  $kT$  w temperaturze pokojowej (300 K) wynosi ok. 0,025eV, a więc jest niewielkim ułamkiem energii Fermiego.

Wynika stąd, że dopiero w wysokich temperaturach, rzędu tysięcy kelwinów, znacząca ilość swobodnych elektronów może zwiększyć swoją energię i ewentualnie wylecieć z metalu na zewnątrz. Kierunek ruchu wylatujących elektronów pokazuje strzałka na rysunku 2.

## 2. Opis ćwiczenia

W niniejszym ćwiczeniu będziemy wyznaczać pracę wyjścia elektronów z metalu, z którego wykonana jest katoda próżniowej lampy elektronowej, tzw. diody. Dioda elektronowa składa się z bańki szklanej, w której osadzone są dwie elektrody: katoda i anoda. W celu zapewnienia termoemisji elektronów z materiału katody, jest ona podgrzewana przy pomocy odizolowanego od niej grzejnika. Na rys. 3 pokazano widok oraz schemat elektryczny badanej lampy elektronowej. Wykres obrazuje charakterystykę prądu lampy od napięcia przyłożonego pomiędzy katodę i anodę.

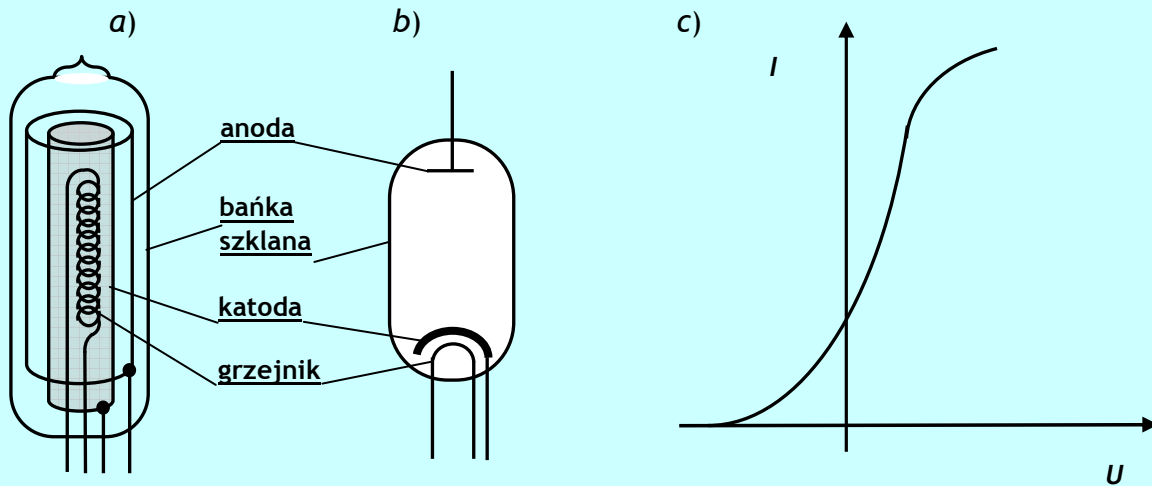
### 2.1. Metoda wyznaczania temperatury katody

Opierając się na powyższych rozważaniach oraz równaniu (1) można obliczyć gęstość prądu termoemisji dla metalu. Rachunki takie przedstawione są w uzupełnieniu niniejszej instrukcji. Wzór na gęstość prądu emisji można napisać w postaci znanej pod nazwą **wzoru Richarda - Dushmana**:

$$J_e = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right),$$

(3)

gdzie  $A$  nosi nazwę stałej Richardsona i dla niektórych materiałów równa się  $120 \text{ A/cm}^2\text{K}^2$ .



Rys. 3. a) Widok, b) schemat, c) charakterystyka prądowo - napięciowa diody próżniowej.

Wielkość  $A$  można wyliczyć na gruncie mechaniki kwantowej przyjmując, że niektóre elektrony, nawet posiadające energię przewyższającą pracę wyjścia, mogą odbijać się od bariery potencjału i powracać w głąb metalu. Zatem wielkość  $A$  lepiej opisuje wzór  $A = A_0(1 - r)$ , gdzie  $A_0 = 120 \text{ A/cm}^2 \text{ K}^2$  zaś  $r$  - współczynnik wewnętrznego odbicia elektronów od powierzchni katody, który może się zmieniać od 0 do 1. Poza tym  $r$  jest funkcją temperatury i zależy od stanu powierzchni. Dla powierzchni niejednorodnych (np. powierzchni tzw. aktywowanych) stała  $A$  znacznie odbiega od wielkości obliczonej i zawiera się w granicach od 0,01 do ok.  $15 \text{ A/cm}^2 \text{ K}^2$ .

Dotychczasowe rozważania dotyczyły sytuacji, kiedy w pobliżu powierzchni emitującej nie było pola elektrycznego. Istnienie takiego pola musi niewątpliwie wpłynąć na wysokość bariery potencjału na granicy metal-otoczenie, a więc i na gęstość prądu termoemisji. Obecność pola hamującego można potraktować jako czynnik zwiększający wysokość bariery potencjału, którą muszą pokonać elektrony, aby znaleźć się poza objętością metalu. Można to przedstawić w postaci zależności:

$$\phi_x = \phi + U_x \quad (4)$$

gdzie  $\phi_x$  - wysokość bariery potencjału w odległości  $x$  od powierzchni emitującej (katody),  $\phi$  - potencjał wyjścia, a  $U_x$  - hamująca różnica potencjałów.

Podstawiając do wzoru (3)  $\phi_x$  otrzymamy gęstość prądu w odległości  $x$  od powierzchni emitującej z uwzględnieniem hamującego pola elektrycznego:

$$J_x = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi_x}{kT}\right) = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right) \exp\left(-\frac{eU_x}{kT}\right) = J_e \exp\left(-\frac{eU_x}{kT}\right). \quad (5)$$

Wielkość  $U_T = \frac{kT}{e}$  nosi nazwę potencjału elektrokinetycznego. Z doświadczenia wynika, że zależność

(5) jest słuszna dla  $|U_x| \geq 3U_T$ .

Korzystając z zależności (5) można pośrednio wyznaczyć temperaturę powierzchni emitującej. W tym celu należy zmierzyć zależność prądu od hamującej różnicy potencjałów między powierzchnią emitującą (katodą) a określonym punktem oddalonym o  $x = a$  od tej powierzchni, w którym w naszym przypadku znajduje się anoda. Podstawiając we wzorze (5) zamiast  $J_x$  wartość natężenia prądu anodowego  $I_a$  oraz  $J_e = I_e$ ,  $U_x = U_a$  otrzymamy:

$$I_a = I_e \exp\left(-\frac{eU_a}{kT}\right) \quad (6a)$$

a po zlogarytmowaniu, równanie prostej typu  $y = ax + b$ :

$$\ln(I_a) = \ln(I_e) - \frac{eU_a}{kT} \quad (6b)$$

gdzie  $y = \ln(I_a)$ ,  $x = U_a$ ,  $b = \ln(I_e)$  i z której nachylenia  $a = -\frac{e}{kT}$  można wyznaczyć temperaturę  $T$ :

$$T = -\frac{e}{ka} \quad (7)$$

## 2.2. Metoda wyznaczania pracy wyjścia

Wyznaczając natężenie prądu termoemisji  $I_e$  z parametru  $b$  prostej dla różnych wartości temperatury  $T$  (różnych napięć żarzenia) można, korzystając ze wzoru (3), wyznaczyć pracę wyjścia  $W = e\phi$ :

$$I_{e1} = AT_1^2 \exp\left(-\frac{W}{kT_1}\right)$$

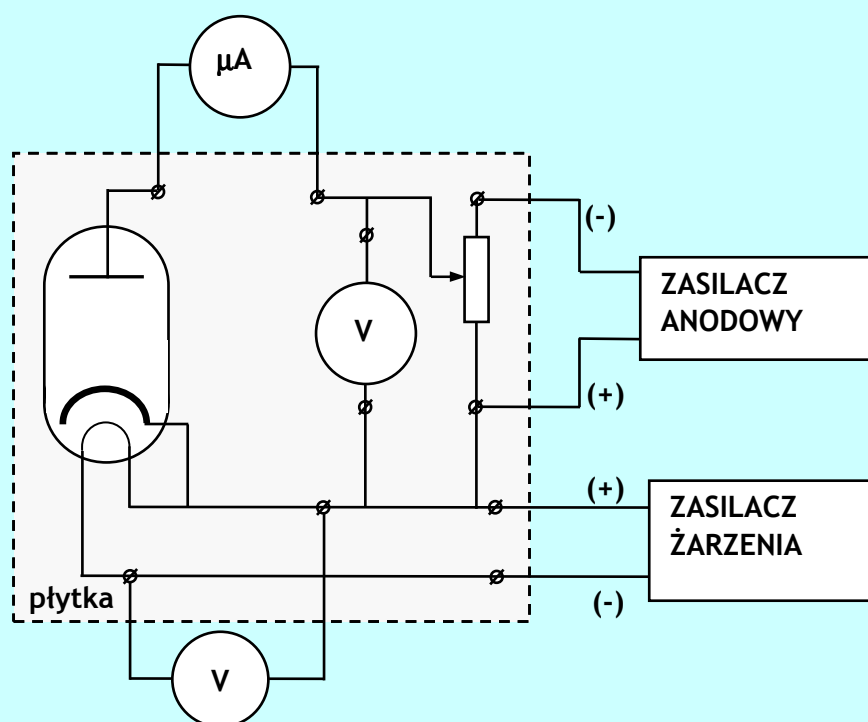
$$I_{e2} = AT_2^2 \exp\left(-\frac{W}{kT_2}\right)$$

Dzieląc stronami oba równania a potem logarytmując obie strony otrzymamy wyrażenie na pracę wyjścia:

$$W = k \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \left[ \frac{I_{e1} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2}{I_{e2} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} \right] \quad (8)$$

gdzie  $I_{e1}$ ,  $I_{e2}$  - wartości prądu  $I_a$  dla  $U_a = 0$ , dla różnych napięć żarzenia.

Musimy oczywiście zdawać sobie sprawę z małej dokładności przedstawionej w tym ćwiczeniu metody wyznaczania pracy wyjścia elektronów, gdyż choćby zmiana temperatury katody pociąga za sobą zmianę wielkości  $A$ , czyli  $A$  nie jest stałe jak milcząco zakładaliśmy przy wyprowadzeniu wzoru na pracę wyjścia  $W$ . Dlatego też głównym zadaniem niniejszego ćwiczenia jest zapoznanie się ze zjawiskiem termoemisji oraz pokazanie jak metodą bezkontaktową można oszacować temperaturę gorącej powierzchni materiału (katody).



Rys.4 Schemat układu pomiarowego.

## 4. Wykonanie ćwiczenia

1. Zestawić układ pomiarowy według schematu przedstawionego na rysunku 4. Obwód żarzenia zasilić napięciem odpowiednim dla danego typu lampy, podanym przy zestawie ćwiczeniowym.
2. Uwaga! Dioda powinna być spolaryzowana w kierunku zaporowym, a więc do anody należy przyłożyć napięcie ujemne względem katody.
3. Zmierzyć charakterystykę  $I_a = f(U_a)$ , poczynając od  $I_a = 0$  aż do napięcia przy którym jeszcze nie trzeba zmieniać najczulszego (najniższego) zakresu prądu  $I_a$  na mikroamperomierzu.
4. Obniżyć napięcie żarzenia i powtórzyć pkt. 2, rejestrując otrzymane wyniki.

## 5. Opracowanie wyników

1. Korzystając z otrzymanych wyników wykonać wykresy zależności  $\ln(I_a) = f(U_a)$  (przy pomocy programu komputerowego) dla każdego napięcia żarzenia, a następnie wybrać do dalszych wyliczeń tylko te punkty pomiarowe (idąc od małych wartości  $I_a$ ), które układają się dość dobrze na prostej. Czy wyniki testu  $\chi^2$  pozwalają potwierdzić hipotezę o prawidłowości równania Richarda - Dushmana?
2. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów wyznaczyć z powyższych rezultatów wartość współczynników  $a$  i  $b$  w równaniu prostej (6b) i obliczyć z nich temperatury katody a następnie wartość pracy wyjścia (wzór 8) i określić niepewności wyznaczenia tych wielkości, a także ustosunkować się do otrzymanych wyników. Wartości prądów  $I_{e1}$  oraz  $I_{e2}$  obliczyć ze wzoru  $I_e = \exp(b)$ . Wyznaczyć niepewność rozszerzoną pracy wyjścia i porównać ją z wartościami tablicowymi dla różnych materiałów - z czego została wykonana katoda?

**Uwaga!** Nie wprowadzać do obliczeń punktów pomiarowych, dla których  $I_a = 0$ .

## 6. Pytania kontrolne

1. Jakie znasz sposoby wywoływania emisji elektronów z metalu?
2. Co to jest termoemisja?
3. Co rozumiemy pod pojęciem „gaz elektronowy”?
4. O czym mówi zakaz Pauliego?
5. Co to jest statystyka Fermiego-Diraca i kiedy można ją stosować?
6. Jaka jest postać wzoru Richardsona-Dushmana i co ten wzór opisuje?

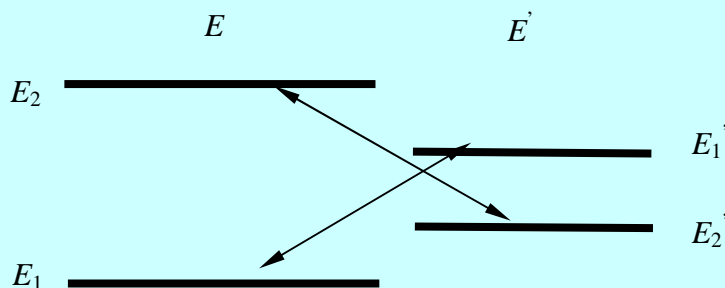
## 7. Literatura

1. H. Szydłowski, „Pracownia fizyczna PWN W - wa 1980r. str. 455 - 458
2. I.W. Sawieliew, „Kurs fizyki” tom3 PWN W - wa 1989r. str. 207 - 217, 247 - 250
3. C. Kittel, „Wstęp do fizyki ciała stałego” PWN W - wa 1974r. str.255 - 257
4. Sz. Szczeniowski, „Fizyka doświadczalna” tom3 PWN W - wa 1970r. str. 267 - 271

## DODATEK

**1 Wyprowadzenie wzoru na rozkład Fermiego-Diraca**

Poniżej przedstawiony zostanie uproszczony sposób wyprowadzenia wzoru na funkcję rozkładu Fermiego-Diraca  $f(E)$ . Rozkład ten, jak to już było wspomniane, dotyczy fermionów czyli cząstek podlegających zakazowi Pauliego. Przyjmiemy na początku pewne upraszczające założenia nie zmieniające jednak istoty problemu, a mianowicie:



**Rys. 5. Odizolowany układ zawierający dwa fermiony zdolne do obsadzenia czterech poziomów energetycznych.**

- założymy dla prostoty, że mamy dwa elektrony o energii  $E_1$  i  $E_2$ , które w wyniku jakiegoś oddziaływania zmieniają zajmowane stany na stany o energiach  $E_1'$  i  $E_2'$  (patrz rys. 5.),
- układ jest odosobniony, a więc obowiązuje zasada zachowania energii, czyli  $E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$ ,
- liczba przejść w jednostce czasu od stanów  $E$  do  $E'$  równa  $n(E, E')$  jest proporcjonalna do prawdopodobieństwa przejścia między tymi stanami  $P(E, E')$ , czyli  $n(E, E') \sim P(E, E')$ ,
- układ jest w stanie równowagi termodynamicznej tzn. ilość przejść ze stanów  $E$  do  $E'$  jest równa ilości przejść w drugą stronę z  $E'$  do  $E$ , czyli  $n(E, E') = n(E', E)$ ,
- musimy przyjąć też (zgodnie z zasadą Pauliego), że liczba przejść elektronów ze stanów  $E$  do  $E'$  (lub odwrotnie) jest proporcjonalna nie tylko do liczby obsadzonych stanów wyjściowych a więc tym samym i do  $f(E)$ , ale również do ilości wolnych miejsc w stanach końcowych, czyli do wielkości  $[1 - f(E')]$ , gdzie  $f(E)$  jest poszukiwaną funkcją rozkładu Fermiego-Diraca i ma sens prawdopodobieństwa obsadzenia stanu o energii  $E$ . Czyli:  $n(E, E') \sim f(E)[1 - f(E')]$ ,
- ponadto przyjmuje się na podstawie tzw. zasady równowagi szczegółowej, że prawdopodobieństwo przejść między dwoma stanami jest niezależne od ich kolejności, czyli  $P(E, E') = P(E', E)$ .

Podsumowując, na podstawie powyższych założeń otrzymamy następującą równość:

$$P(E, E')f(E_1)[1 - f(E_1')]f(E_2)[1 - f(E_2')] = P(E', E)f(E_1')[1 - f(E_1)]f(E_2')[1 - f(E_2)]$$

Równość tą można przekształcić do postaci:

$$\frac{f(E_1)}{[1 - f(E_1)]} \cdot \frac{f(E_2)}{[1 - f(E_2)]} = \frac{f(E_1')}{[1 - f(E_1')] } \cdot \frac{f(E_2')}{[1 - f(E_2')] } \quad (D1a)$$

Wprowadźmy teraz nową funkcję:

$$\phi(E) = \frac{f(E)}{[1 - f(E)]} \quad (D1b)$$

wtedy,  $\phi(E_1)\phi(E_2) = \phi(E_1')\phi(E_2')$  oraz  $E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$ .

Jedyną funkcją elementarną spełniającą oba te warunki jest funkcja typu  $\phi(E) = A \exp(\beta E)$ .



Z praw termodynamiki wynika, że  $\beta = -1/kT$ , a stałą  $A$  można przedstawić w postaci  $A = \exp(\mu/kT)$ , gdzie  $\mu$  nosi nazwę potencjału chemicznego. W naszym przypadku  $\mu = E_F$  i jest to tzw. energia Fermiego. Zatem:

$$\phi(E) = \exp\left[\frac{-(E - E_F)}{kT}\right]. \quad (D2)$$

Po wstawieniu tego wyrażenia do wzoru definiującego funkcję  $\phi(E)$  (D1b) i przekształceniu otrzymamy ostateczną postać funkcji rozkładu Fermiego-Diraca:

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}. \quad (D3)$$

Można sprawdzić, że  $0 \leq f(E) \leq 1$ , a więc funkcja ta może być traktowana jako prawdopodobieństwo obsadzenia stanu kwantowego o energii  $E$ .

## 2. Wyprowadzenie wzoru Richardsona

Niech powierzchnia metalu będzie prostopadła do osi  $x$ . W pierwszym przybliżeniu możemy założyć, że tylko te elektrony będą mogły uciec z metalu, dla których prędkość  $V_x$  wzdłuż osi  $x$  będzie spełniać warunek  $\frac{1}{2}mV_x^2 \geq W + E_F$ . Wyrażenie na składową  $x$  prądu (katodowego) wywołanego przez elektrony o prędkościach zawartych między  $V_x$ , a  $V_x + dV_x$

(gdzie  $V_x = \sqrt{\frac{2(W + E_F)}{m}}$ ), jest następujące:

$$dJ_x = eV_x dn = \frac{e}{m} p_x dn, \quad (D4)$$

gdzie  $dn$  oznacza liczbę elektronów o prędkościach zawartych między  $V_x$ ,  $V_x + dV_x$  lub, jeżeli operujemy pojęciem pędu, o pędach zawartych między  $p_x$ , a  $p_x + dp_x$  ( $p_x > \sqrt{2m(W + E_F)}$ ).

Jeżeli założymy, że układ znajduje się w stanie równowagi, to na podstawie wzoru (1) możemy napisać:

$$dn \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) N(p) dp_y dp_z \right] dp_x \quad (D5)$$

gdzie  $f(p)$  oznacza funkcję rozkładu Fermiego-Diraca wyrażoną przez pędy.  $f(p)$  można łatwo otrzymać z wzoru (2), korzystając ze związku:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (D6)$$

Mamy więc wyrażenie na  $f(p)$  w postaci:

$$f(p) = \left\{ 1 + \exp\left[\frac{\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - E_F}{kT}\right] \right\}^{-1}. \quad (D7)$$

$f(p)$  równe jest prawdopodobieństwu obsadzenia stanu o danym kwadracie pędu elektronu. Wielkość  $N(p)$  oznacza gęstość stanów odpowiadających pędowi między  $p$  a  $p + dp$ . W celu otrzymania wyrażenia na prąd (katodowy) należy scałkować (12) od wartości  $p_{xc} = \sqrt{2m(W + E_F)}$  do nieskończoności:

$$J_x = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{p_{xc}}^{\infty} f(p) N(p) p_x dp_x dp_y dp_z \quad (D8)$$

Aby obliczyć gęstość stanów w przestrzeni pędów  $N(p)$  skorzystamy z przybliżonych rachunków opartych na zasadzie nieoznaczoności Heisenberga. Zasada ta jest jedną z fundamentalnych zasad mechaniki kwantowej. Mówi ona, że nie można z dowolną dokładnością określić pewnych, związanych



ze sobą, wielkości fizycznych. Jedną z takich par jest pęd i położenie cząstki. Zgodnie z w/w zasadą można przyjąć że:

$$\begin{aligned}\Delta p_x \Delta x &\geq h \\ \Delta p_y \Delta y &\geq h \\ \Delta p_z \Delta z &\geq h\end{aligned}\quad (D9)$$

W naszym przypadku nieokreśloności będą równe wymiarom danego ciała,  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = a$ , (niech ciało to ma kształt sześcianu), gdzie  $a$  - długość krawędzi kostki ciała stałego (metal). Nieokreśloności składowych pędu  $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z$  będą w tej sytuacji najmniejszymi możliwymi zmianami pędu elektronu w tym ciele. Z warunków (D9) można obliczyć objętość jednego stanu kwantowego elektronu (bez uwzględnienia spinu) w przestrzeni pędowej. Objętość tego stanu będzie równa iloczynowi  $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ :

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \frac{h^3}{a^3} = \frac{h^3}{V} \quad (D10)$$

gdzie  $V$  oznacza objętość ciała.

Aby obliczyć gęstość stanów w przestrzeni pędów z uwzględnieniem dwu różnych spinów elektronu, należy podzielić jednostkową objętość z tej przestrzeni (pomnożoną przez 2 ze względu na spiny) przez objętość jednego stanu. Jeśli wielkość ta ma być wyznaczona dla ciała o jednostkowej objętości, to  $V$  musi być równe 1. A więc:

$$N(p) = \frac{2}{h^3} \quad (D11)$$

Wzór (D8) na gęstość prądu można więc zapisać w postaci:

$$J_x = \frac{2e}{mh^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) p_x dp_x dp_y dp_z \quad (D12)$$

Obliczanie tej całki można uprościć korzystając z tego, że  $\exp[(E - E_F)/kT] \gg 1$ , a więc:

$$J_x = \frac{2e}{mh^3} \exp(E_F/kT) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2mkT\right] p_x dp_x dp_y dp_z. \quad (D13)$$

Ponieważ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-au^2) du = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{oraz} \quad E_c = \frac{p_{xc}^2}{2m} = W + E_F, \quad \text{więc:}$$

$$J_x = \frac{4\pi emk^2 T^2}{h^3} \exp[-(E_c - E_F)/kT]$$

lub

$$J_x = \frac{4\pi emk^2 T^2}{h^3} \exp(-W/kT). \quad (D14)$$

Wzór ten można zapisać w bardziej znanej formie:

$$J_e = AT^2 \exp(-W/kT) \quad (D15)$$

gdzie  $A = \frac{4\pi emk^2}{h^3}$ .