

Filtry Elektryczne

opracował: Marcin Bieda

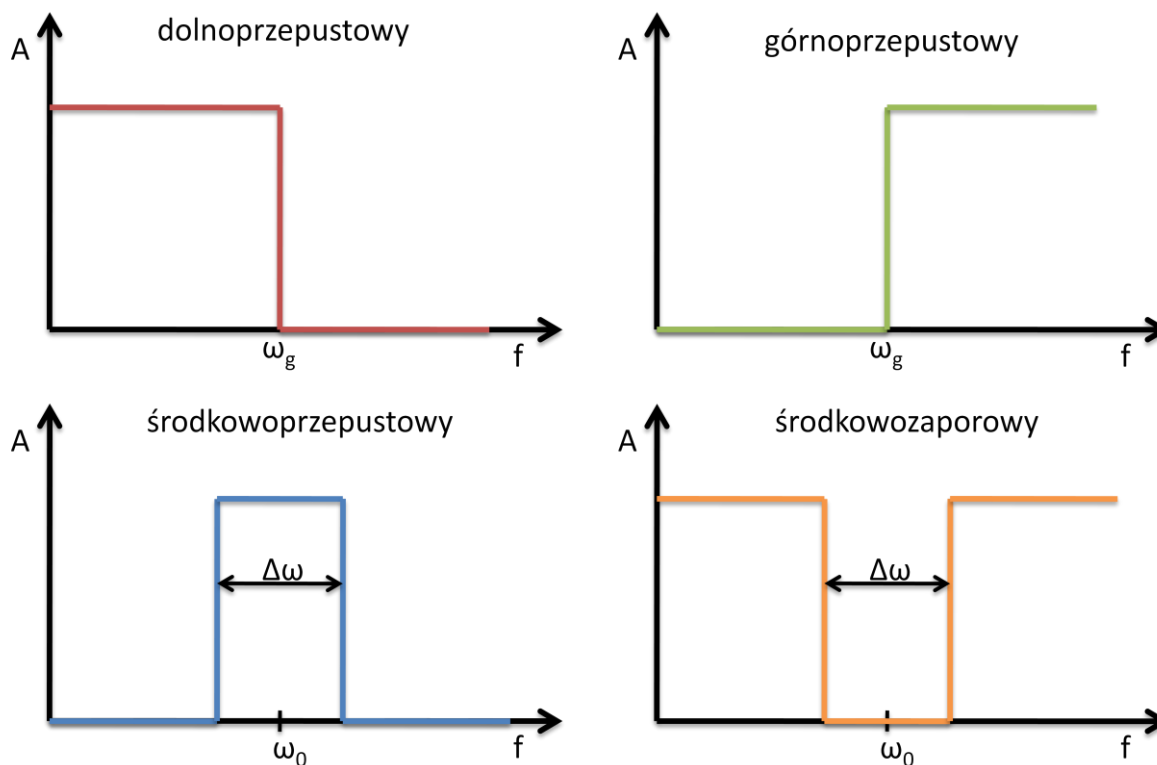
1. Wprowadzenie

Filtrami elektrycznymi nazywane są układy elektryczne przepuszczające przebiegi elektryczne zawarte w określonym paśmie częstotliwości, a tłumiące przebiegi o innych częstotliwościach (Encyklopedia Powszechna, PWN, Warszawa 1973).

W praktyce definicja ta oznacza, że filtrem elektrycznym można nazwać każdy układ, realizujący operacje na sygnale elektrycznym w dziedzinie częstotliwości. Filtry stosuje się najczęściej w celu usunięcia z sygnału niepożądanych składowych, zwykle zakłóceń oraz szumu. Można je podzielić ze względu na rodzaj charakterystyki częstotliwościowej na filtry:

- dolnoprzepustowe (lowpass)
- górnoprzepustowe (highpass)
- środkowoprzepustowe/pasmowe (bandpass)
- środkowozaporowe (bandstop/notch)

Wyidealizowane charakterystyki tych filtrów przedstawione są na rysunku 1.



Rys 1. Charakterystyki filtrów idealnych

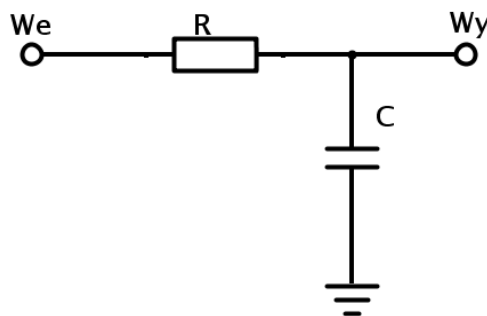
Tą część charakterystyki częstotliwościowej, która jest przepuszczana przez filtr nazywamy pasmem przenoszenia filtru, natomiast część charakterystyki, która jest tłumiona nazywamy pasmem zaporowym. Dla filtrów dolno i górnoprzepustowych definiuje się częstotliwość graniczną ω_g , przy której wzmocnienie filtru spada o 3dB. Dla filtrów środkowoprzepustowych i środkowozaporowych definiuje się częstotliwość środkową ω_0 oraz pasmo filtru $\Delta\omega$. Stosunek częstotliwości środkowej do pasma nazywamy dobrocią filtru $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Filtry idealne cechują się stałym wzmocnieniem w paśmie przenoszenia oraz nieskończonym tłumieniem w paśmie zaporowym. Zbocze charakterystyki filtru jest pionowe. Takie filtry są niemożliwe do zrealizowania w praktyce, rzeczywiste filtry aproksymują charakterystyki filtrów idealnych.

2. Projektowanie filtru dolnoprzepustowego

Projekt filtru elektrycznego składa się z dwóch części: doboru funkcji aproksymującej idealną charakterystykę filtru oraz projektu układu elektronicznego realizującego tę charakterystykę. W tym akapicie zajmiemy się wyłącznie doбором funkcji przenoszenia filtru dolnoprzepustowego.

Najprostszym filtrem dolnoprzepustowym jest układ całkujący RC (rys 2.)



Rys 2. Prosty filtr dolnoprzepustowy

Częstotliwościowa funkcja przenoszenia takiego filtru wyraża się wzorem (1), natomiast charakterystyka amplitudowa wzorem (2). Zakładając, że $\omega_g = \frac{1}{RC}$ otrzymujemy (3).

$$K(j\omega) = K(s) = \frac{1/sC}{1/sC + R} = \frac{1}{1 + sRC} \quad (1)$$

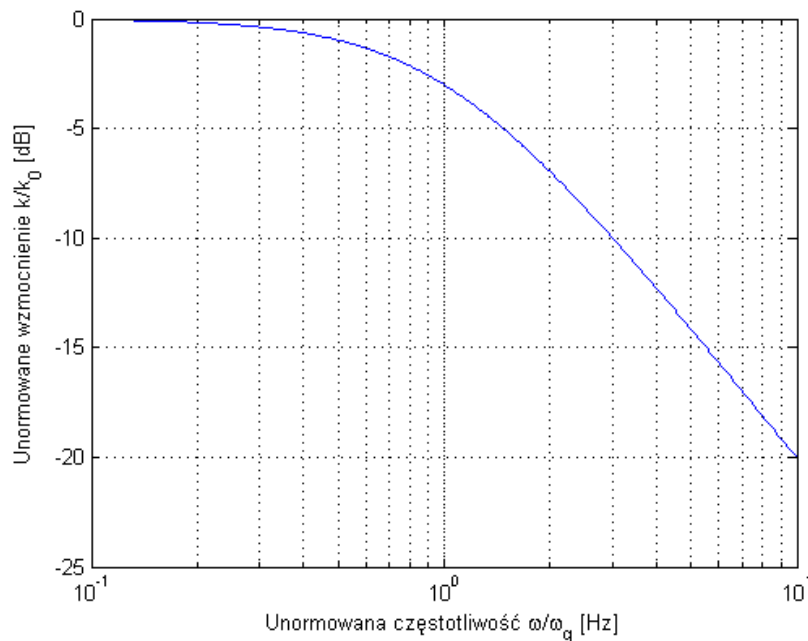
$$A(\omega) = |K(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (2)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}} \quad (3)$$

Jeżeli $\omega \ll \omega_g$, to $A(\omega) \approx 1$, natomiast dla $\omega \gg \omega_g$, mamy $A(\omega) \approx \omega_g/\omega$. Jeżeli wyrazimy amplitudę w skali logarytmicznej to otrzymamy (4). Z powyższej analizy wynika, że wzmacnienie filtru w paśmie przenoszenia wynosi 1, natomiast tłumienie w paśmie zaporowym maleje o 20dB przy dziesięciokrotnym wzroście częstotliwości (20dB/dekadę lub 6dB/oktawę).

$$A_{dB}(\omega) \approx 20 \log\left(\frac{\omega_g}{\omega}\right) = 20 \log \omega_g - 20 \log \omega \quad (4)$$

Warto również zauważyć, że $A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$. Częstotliwość graniczną filtru definiuje się jako częstotliwość przy której wzmacnienie filtru spada o 3dB. Charakterystyka takiego filtra przedstawiona jest na rysunku 3:



Rys 3. Charakterystyka amplitudowa filtru dolnoprzepustowego pierwszego rzędu

W celu niezależnienia projektowania filtru od wartości ω_g zastosujemy oznaczenie $S = \frac{s}{\omega_g}$. Jednakże, aby uzyskać lepszą aproksymację idealnej charakterystyki filtru stosuje się funkcję przenoszenia o postaci:

$$K(s) = \frac{1}{1 + C_1 S + C_2 S^2 + C_3 S^3 + \dots} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^N C_n S^n} \quad (5)$$

Wartość stałej N nazywamy rzędem filtru. Można pokazać, że w ogólności dla filtru N -tego rzędu charakterystyka w paśmie zaporowym maleje z szybkością $N \cdot 20dB/dekadę$. Wynika z tego, że im wyższy rząd filtru, tym lepiej aproksymuje charakterystykę filtru idealnego.

Wielomian zespolony, występujący w mianowniku wyrażenia (5) można rozłożyć na iloczyn trójmianów kwadratowych (6). Pozwala to na realizację filtrów dowolnego rzędu za pomocą kaskadowo połączonych filtrów drugiego rzędu. Przez k_0 oznaczono wzmacnienie filtru w paśmie przenoszenia (dla $\omega = 0$).

$$K(S) = \begin{cases} \frac{k_0}{(1 + a_1S + b_1S^2)(1 + a_2S + b_2S^2)(1 + a_3S + b_3S^2) \dots} & \text{dla parzystego } N \\ \frac{k_0}{(1 + a_1S)(1 + a_2S + b_2S^2)(1 + a_3S + b_3S^2) \dots} & \text{dla nieparzystego } N \end{cases} \quad (6)$$

Istnieje wiele różnych kryteriów doboru współczynników a_i, b_i . Poniżej przedstawione zostaną trzy z nich, najczęściej stosowane w praktyce:

a) Charakterystyka Butterwortha

Jedno z najbardziej intuicyjnych kryteriów jest takie, aby charakterystyka filtra była jak najbardziej płaska w całym paśmie przenoszenia. Matematycznie znaczy to, że w punkcie $S = 0$ jak najwięcej pochodnych kwadratu funkcji $K(S)$ ma być równych zero (7).

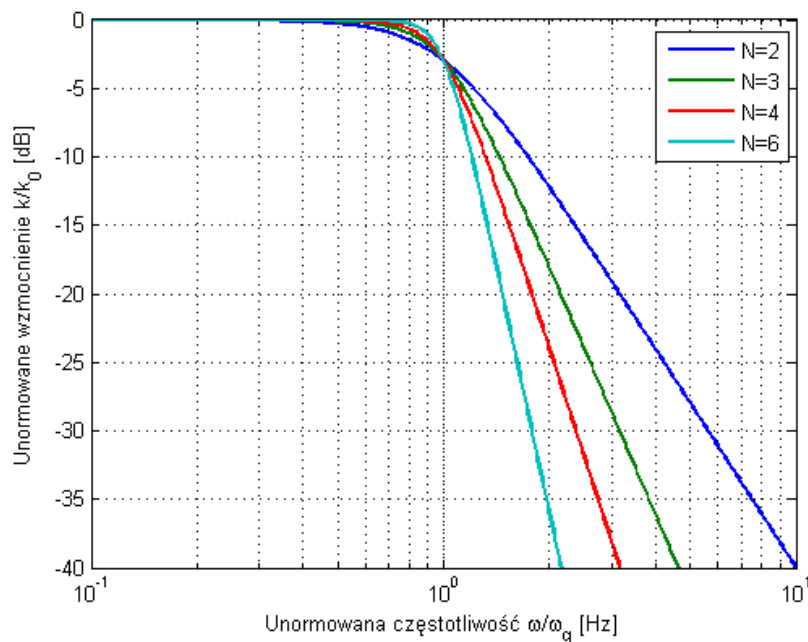
$$\begin{aligned} \frac{d^n |K(S)|^2}{dS^n} &= 0, \text{ dla } n < 2N \\ \frac{d^{2N} |K(S)|^2}{dS^{2N}} &\neq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Z warunku tego można wyprowadzić wzór na wielomiany o postaci (8):

$$|K(S)|^2 = \frac{k_0}{1 + S^{2N}} \quad (8)$$

Wielomiany spełniające równanie (8) noszą nazwę wielomianów Butterwortha. Sposób wyliczania współczynników tych wielomianów a_i, b_i jest opisany w literaturze, jednak w praktyce inżynierskiej najczęściej korzysta się ze stabelaryzowanych wartości (patrz dodatek B).

Charakterystyki Butterwortha dla kilku rzędów są przedstawione na rysunku 4.



Rys 4. Charakterystyki Butterwortha

b) Charakterystyka Czebyszewa

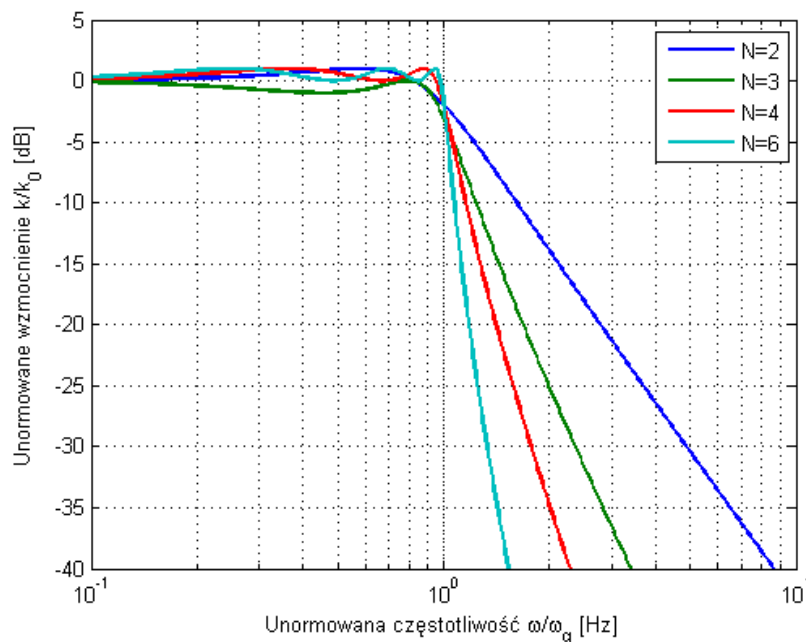
Jeżeli projektowany filtr nie musi mieć płaskiej charakterystyki w paśmie przenoszenia to możemy wykorzystać filtry o charakterystyce Czebyszewa. Zapewniają one lepsze tłumienie w paśmie zaporowym kosztem zafalowań charakterystyki w paśmie przenoszenia. W mianowniku wzoru (5) występują wielomiany Czebyszewa o postaci (9).

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x), & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh} x), & \text{dla } x > 1 \end{cases} \quad (9)$$

W paśmie przenoszenia funkcja \cos powoduje zafalowanie charakterystyki o amplitudzie określonej przez współczynnik ϵ (10).

$$|K(S)|^2 = \frac{k_0}{1 + \epsilon T_n(S)} \quad (10)$$

Rysunek poniżej przedstawia charakterystyki Czebyszewa o zafalowaniu 1dB.



Rys 5. Charakterystyki Czebyszewa o zafalowaniu 1dB

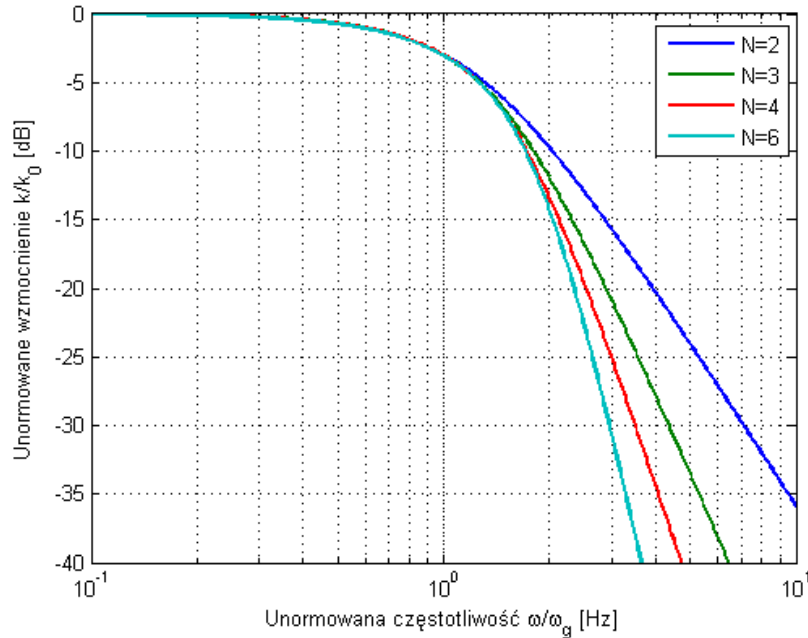
c) Charakterystyka Bessela

W niektórych zastosowaniach istotnie jest, aby filtr przesyłał wiernie kształt sygnału w swoim paśmie przenoszenia. Jak wiadomo każdy sygnał periodyczny w czasie można rozłożyć na szereg Fouriera. Aby zachować kształt sygnału, należy nie tylko zachować amplitudy poszczególnych składowych harmonicznnych ale również ich fazy.

Do zobrazowania w jaki sposób filtr wpływa na fazę składowej sygnału o danej częstotliwości służy charakterystyka opóźnienia grupowego, definiowana jako pochodna charakterystyki fazowej filtru (11).

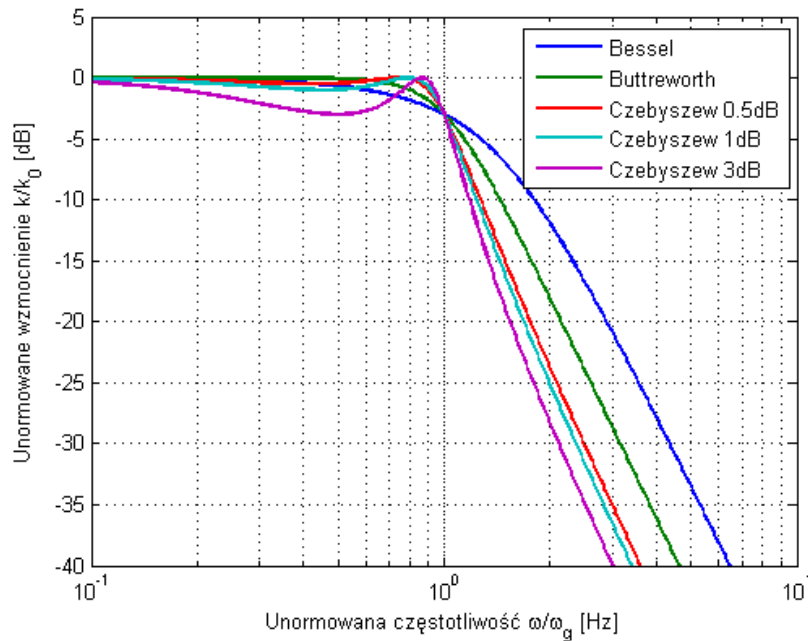
$$T(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d[\text{Arg}(K(s))]}{ds} \quad (11)$$

Jeżeli za kryterium projektowania filtra założymy maksymalnie płaską charakterystykę opóźnienia grupowego to otrzymamy filtr Bessela. Filtry te najmniej zniekształcają sygnał w paśmie przenoszenia, co jest okupione gorszą tłumiennością w paśmie zaporowym.

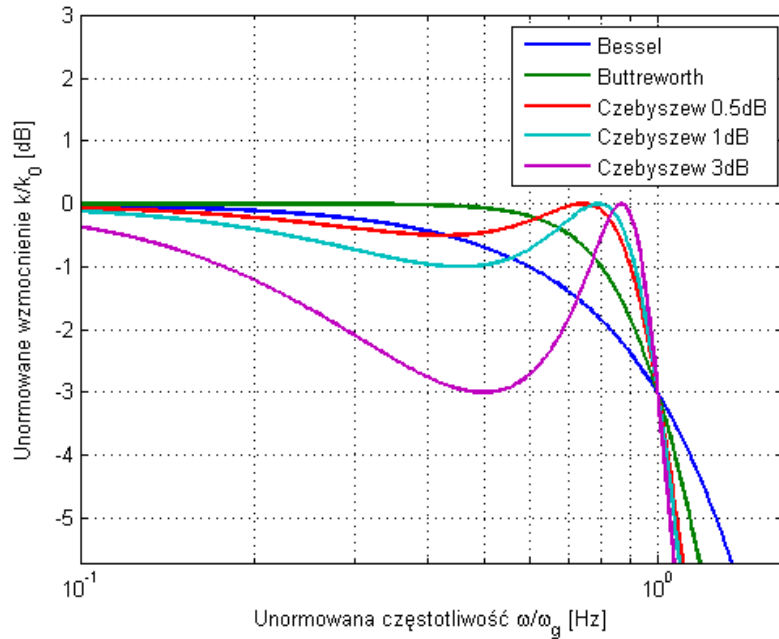


Rys 6. Charakterystyki Bessela

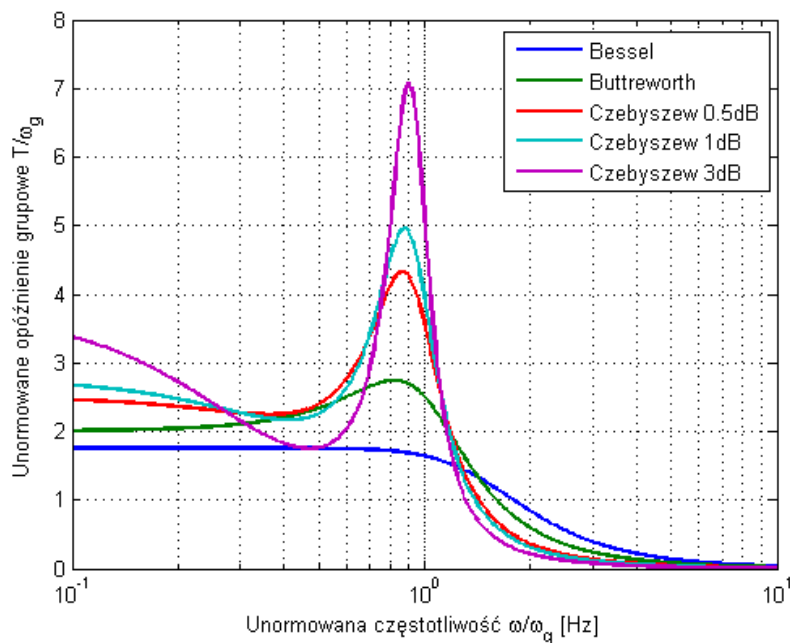
d) Porównanie charakterystyk



Rys 7. Porównanie charakterystyk filtrów trzeciego rzędu



Rys 8. Porównanie charakterystyk filtrów trzeciego rzędu w paśmie przenoszenia



Rys 9. Porównanie opóźnienia grupowego filtrów trzeciego rzędu

Na powyższych trzech wykresach przedstawiono porównanie charakterystyk filtrów Bessela, Butterwortha oraz Czebyszewa o zafalowaniach od 0,5 do 3dB. W praktyce inżynierskiej należy rozważyć wiele czynników przy wyborze charakterystyki filtra. Jeżeli wymagane jest zachowanie kształtu sygnału przenieszonego przez filtr, najbardziej optymalna jest charakterystyka Bessela, jednakże może ona wymagać użycia filtra wyższego rzędu w celu zapewnienia wymaganego tłumienia. Z drugiej strony, o wiele leprze tłumienie zapewniają filtry Czebyszewa, ale one z kolei

zniekształcają sygnał. Filtry Butterwortha są często wybierane jako kompromis, ponieważ zapewniają dosyć dobre tłumienie w paśmie zaporowym, a zniekształcenia sygnału nie są jeszcze zbyt duże.

3. Realizacja filtru dolnoprzepustowego

Jeżeli znamy charakterystykę filtru (6) następnym krokiem jest budowa układu elektronicznego realizującego tę charakterystykę. Dobór układu zależy w dużej mierze od częstotliwości granicznej filtru. Jeżeli nie przekracza ona kilku MHz najczęściej stosuje się obwody oparte o wzmacniacze operacyjne. Takie układy noszą nazwę filtrów aktywnych.

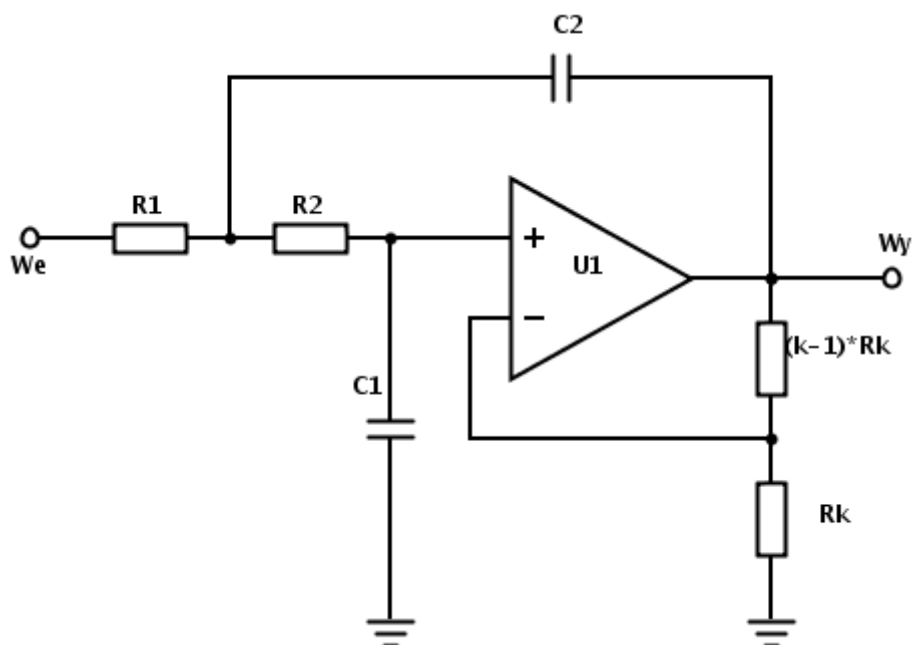
Dzięki rozłożeniu wielomianu (5) na czynniki (6) każdy filtr można zrealizować poprzez połączenie filtrów o transmitancji pierwszego (12) i drugiego (13) rzędu.

$$K = \frac{k_0}{1 + aS} \quad (12)$$

$$K = \frac{k_0}{1 + aS + bS^2} \quad (13)$$

Do realizacji filtru pierwszego rzędu stosujemy układ z rys 2.

Jest wiele układów pozwalających realizować funkcję (12). W ćwiczeniu, w tym celu przewidziano układ Sallen-Keya (rys 10).



Rys 10. Filtr dolnoprzepustowy Sallen-Keya drugiego rzędu

Funkcja przenoszenia takiego układu dana jest wzorem:

$$K(S) = \frac{k_0}{1 + S\omega_g[R_1C_1 + R_2C_1 + (1 - k)R_1C_2] + S^2\omega_g^2R_1R_2C_1C_2} \quad (14)$$

Jeżeli założymy, że wszystkie wartości elementów są sobie równe, to wyrażenie znacznie się uprości:

$$K(S) = \frac{k_0}{1 + S\omega_g[(3 - k)RC] + S^2\omega_g^2R^2C^2} \quad (15)$$

Porównując (15) z (13) otrzymujemy:

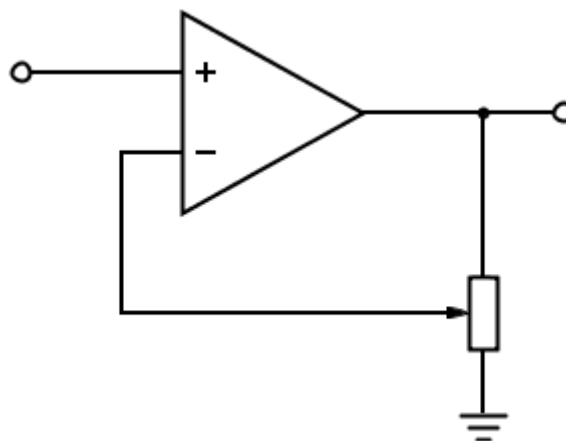
$$RC = \frac{\sqrt{b}}{\omega_g} \quad (16)$$
$$k = \frac{a}{\sqrt{b}}$$

Takie podejście pozwala bardzo łatwo projektować filtry drugiego rzędu. Wadą takiego układu jest możliwość wystąpienia oscylacji w układzie (wzbudzenia), jeżeli wartość k jest bliska 3. Z tego powodu przy projektowaniu filtrów wyższych rzędów, stosuje się podejście bazujące bezpośrednio na wzorze (14).

4. Projekt filtru (do opracowania w domu, przed ćwiczeniem)

Każdy zespół otrzyma indywidualne zadanie w postaci założeń projektowych obejmujących typ filtru, rząd filtru, jego częstotliwość graniczną i wzmocnienie. Na tej podstawie należy poprzez porównanie zależności (14) z (13) wyznaczyć wartości elementów filtru. Projekt powinien zawierać kompletny schemat filtru aktywnego wraz z wartościami elementów (w formie papierowej), narysowaną charakterystykę amplitudową filtru oraz przeprowadzone obliczenia. Dopuszcza się przeprowadzenie obliczeń za pomocą komputera, w takim wypadku należy dołączyć wzory, z których się korzystało i ewentualnie skrypty/kody źródłowe programów. Do realizacji filtrów przewidziano następujące elementy:

- kondensatory 10nF (zakładamy, że $C_1 = C_2$)
- regulowane rezystory (1kΩ - 100kΩ)
- wzmacniacze operacyjne z regulacją wzmocnienia



Uwaga 1. Wzmocnienie k_0 pojawiające się we wzorze (14) to wzmocnienie sekcji drugiego rzędu, a nie całego filtra. Jeżeli filtr ma się składać z dwóch sekcji, to wypadkowe wzmocnienie będzie iloczynem wzmocnień poszczególnych sekcji.

Uwaga 2. Projekt nie musi obejmować wyznaczania rezystorów R_k . Wystarczy obliczyć wzmocnienia poszczególnych sekcji.

Uwaga 3. W laboratorium dostępne są rezystory z zakresu $1k\Omega - 100k\Omega$. Należy tak zaprojektować filtr, aby wykorzystywane rezystory miały wartości z tego zakresu.

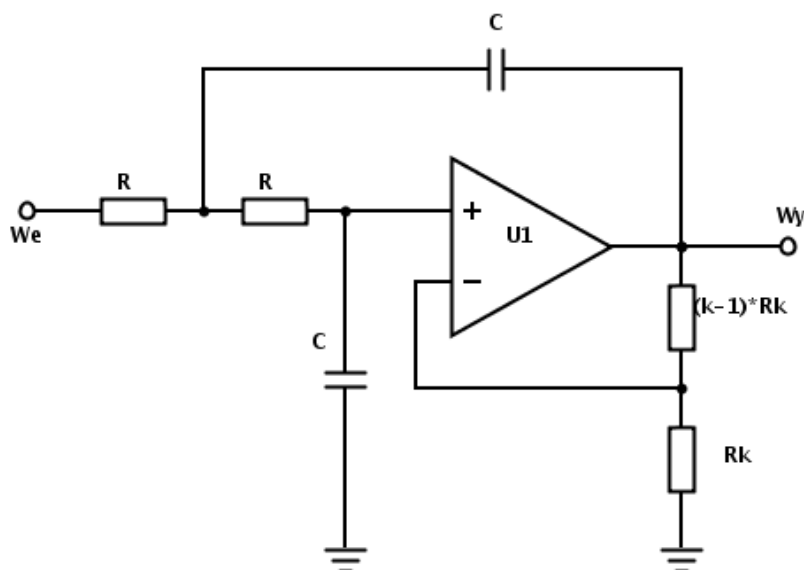
Uwaga 4. Filtr aktywny w niekorzystnych okolicznościach może stać się niestabilny (filtr może zacząć generować sygnał). Najprostszym warunkiem stabilności filtra jest $k \geq A \left(2 - \frac{a^2}{4b}\right)$. W teorii stała $A=1$, w praktyce jednak, na skutek tolerancji elementów, przyjmuje się $A=1,2$.

5. Przebieg ćwiczenia

W ćwiczeniu zostanie wykorzystane urządzenie ELVIS II+ z dedykowaną płytką *daughterboard*. Płytkę ta (dodatek A) zawiera 4 regulowane rezystory oraz 2 potencjometry do regulacji wzmocnienia wzmacniaczy operacyjnych. Ustawianie rezystancji oraz wzmocnienia odbywa się cyfrowo za pomocą przewidzianego do tego programu.

a) Pomiar charakterystyk filtrów drugiego rzędu

Na płytce prototypowej należy zestawić układ z rysunku 11. Korzystając z równań (16) należy kolejno obliczyć wartość R , oraz k dla filtrów Butterwortha, Bessela oraz Czebyszewa o zafalowaniach 3dB o $\omega_0 = 500Hz$. Dla każdego z tych filtrów należy zmierzyć i zapisać charakterystykę amplitudową oraz opóźnienie grupowe, a następnie należy zarejestrować odpowiedź filtra na sygnał prostokątny o częstotliwości 100Hz.



Rys 11. Filtr drugiego rzędu

b) Symulacja projektu filtru

Należy sporządzić schemat zaprojektowanego filtru w środowisku Multisim, a następnie przeprowadzić symulację charakterystyki częstotliwościowej filtru. Jeżeli symulowana charakterystyka zgadza się z założeniami projektowymi można przystąpić do dalszej części ćwiczenia.

c) Realizacja projektu filtru

Na płytce stykowej zestawu Elvis II+ należy zestawić zaprojektowany filtr. Należy przeprowadzić pomiar charakterystyki amplitudowej i zweryfikować poprawność filtru poprzez porównanie z charakterystyką symulowaną. Należy zarejestrować odpowiedź filtru na skok jednostkowy.

6. Zadania do opracowania w sprawozdaniu

- Porównać i omówić charakterystyki amplitudowe filtrów 2 rzędu
- Przedyskutować charakterystyki opóźnienia grupowego oraz odpowiedzi na sygnał prostokątny
- Omówić realizację zaprojektowanego filtru uwzględniając różnice pomiędzy symulacją a rzeczywistym pomiarem
- Scharakteryzować odpowiedź filtru na skok jednostkowy
- Sformułować wnioski z ćwiczenia

7. Literatura

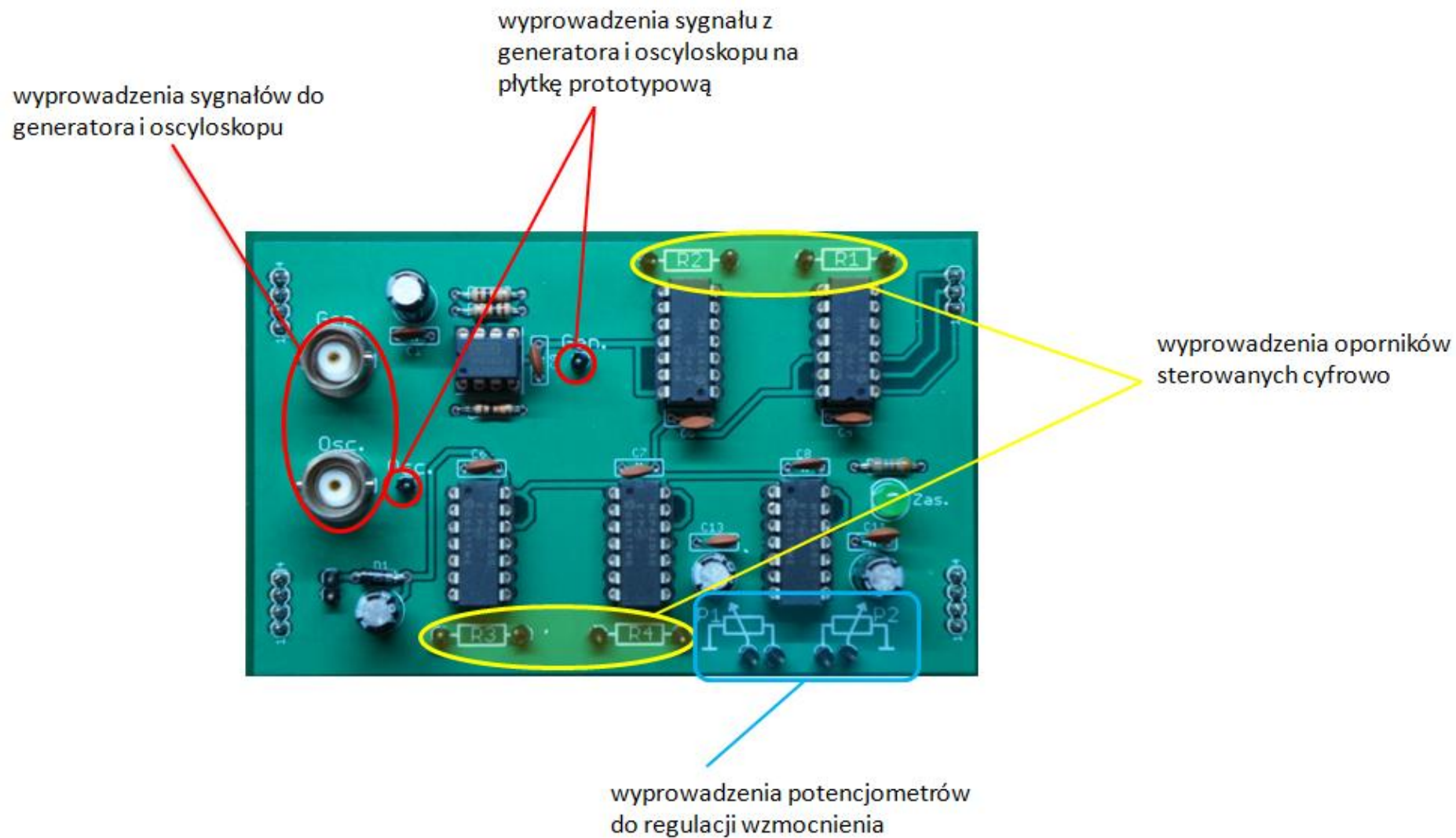
[1] U. Tietze, Ch. Schenk, "Układy Półprzewodnikowe," rozdział 14, WNT, Warszawa

[2] W. G. Jung, "Op Amp Applications," section 5, Analog Devices, 2002 (dostępna online: http://www.analog.com/library/analogDialogue/archives/39-05/op_amp_applications_handbook.html) - zdarzają się błędy w równaniach!

[3] L. Tykarski, L. Widomski, W. Tłaczała, "Ćwiczenia laboratoryjne z elektorniki," ćwiczenie 5, wyd. PW, Warszawa 1992

[4] J. Izydorczyk, J. Konopacki, "Filtry analogowe i cyfrowe," PAN oddział w Katowicach, Gliwice, 2003

Dodatek A - opis płytki *daughterboard*



Dodatek B - tablice

Butterworth

N	i	a	b
1	1	1,0000	0,0000
2	1	1,4142	1,0000
3	1	1,0000	1,0000
	2	1,0000	0,0000
4	1	1,8478	1,0000
	2	0,7654	1,0000

Czebyszew 1dB

N	i	a	b
1	1	1,0000	0,0000
2	1	1,2124	1,3448
3	1	0,5442	1,2057
	2	2,2156	0,0000
4	1	2,5392	3,9686
	2	0,2979	1,1240

Bessel

N	i	a	b
1	1	1,0000	0,0000
2	1	1,3617	0,6180
3	1	0,9996	0,4772
	2	0,7560	0,0000
4	1	1,3397	0,4889
	2	0,7743	0,3890

Czebyszew 2dB

N	i	a	b
1	1	1,0000	0,0000
2	1	1,0490	1,4018
3	1	0,4300	1,2036
	2	2,7994	0,0000
4	1	2,3277	4,6806
	2	0,2300	1,1167

Czebyszew 0,5dB

N	i	a	b
1	1	1,0000	0,0000
2	1	1,3067	1,2738
3	1	0,6402	1,1931
	2	1,8636	0,0000
4	1	2,5967	3,3525
	2	0,3605	1,1235

Czebyszew 3dB

N	i	a	b
1	1	1,0000	0,0000
2	1	0,9115	1,4142
3	1	0,3559	1,1923
	2	3,3496	0,0000
4	1	2,0987	5,1041
	2	0,1886	1,1076

Dodatek C - zadania do ćwiczenia

Nr. Zad.	Typ filtru	Częstotliwość graniczna f_g [Hz]	Wzmocnienie k [V/V]	Rząd filtru N	Zafalowania [dB]
1	Butterworth	500	6	4	-
2	Butterworth	400	10	4	-
3	Butterworth	600	5	4	-
4	Butterworth	600	2,5	3	-
5	Butterworth	500	4	3	-
6	Butterworth	400	4	3	-
7	Bessel	600	4	4	-
8	Bessel	350	9	4	-
9	Bessel	400	7	4	-
10	Bessel	600	2,5	3	-
11	Bessel	400	4	3	-
12	Bessel	500	5	3	-
13	Chebyszew	750	5	4	1
14	Chebyszew	800	10	4	2
15	Chebyszew	850	10	4	3
16	Chebyszew	900	7,5	4	0,5
17	Chebyszew	950	6	4	0,5
18	Chebyszew	800	9	4	0,5
19	Chebyszew	800	3	3	0,5
20	Chebyszew	500	2,5	3	0,5
21	Chebyszew	400	4	3	1
22	Chebyszew	450	5	3	2
23	Chebyszew	550	4	3	3
24	Chebyszew	600	7	3	1