Podstawy Optyki

ćwiczenia

$$\psi(\vec{r},t)=A\exp\left[i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi_0\right)\right]$$
$$\varphi=\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi_0$$
$$\vec{k}\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z z$$

Ruch falowy

$$\left.\begin{array}{l}\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{r=const.}=-\omega\\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}\right|_{t=const.}=\vec{k}\end{array}\right\}\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right|_{\varphi=const.}=\frac{-\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{r=const.}}{\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}\right|_{t=const.}}=\frac{\omega}{\vec{k}}=\vec{v}$$

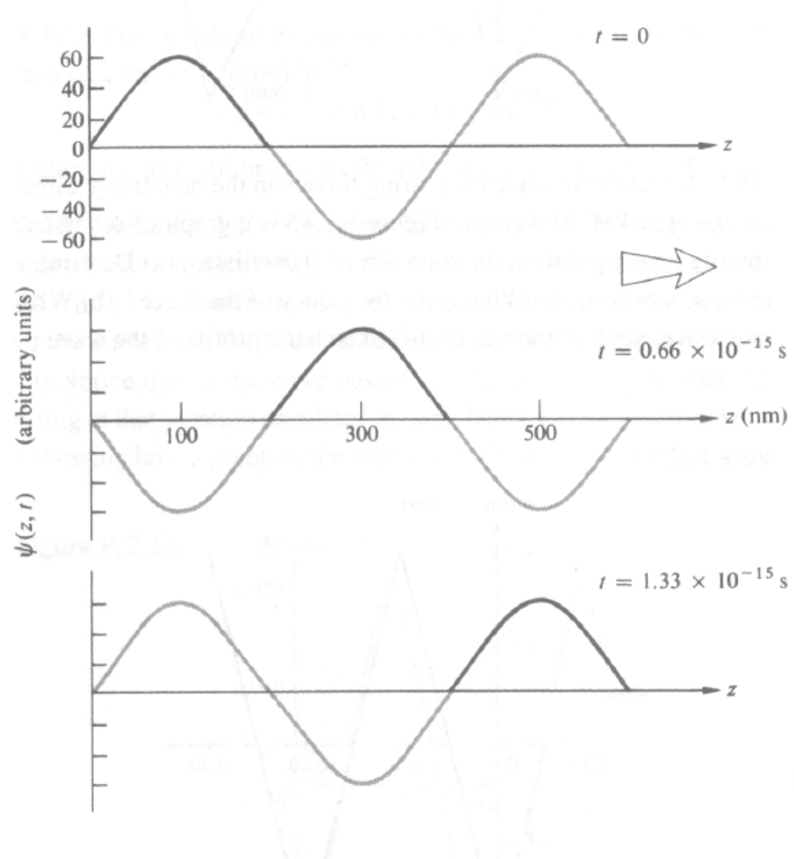
1. $\psi_1=4\sin 2\pi(0.2x-3t)$

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=3Hz;\lambda=\frac{2\pi}{k}=5m;T=\frac{1}{f}=0{,}33s;A=4;v=\frac{\omega}{k}=15\frac{m}{s};$$

$$\psi_2=\frac{\sin(7x-3.5t)}{2.5}$$

2. Napisz równanie funkcji falowej opisującej falę harmoniczną o amplitudzie 10^3 V/m, okresie $2{,}2 \times 10^{-15}$ s oraz prędkości 3×10^8 m/s. Fala propaguje się w ujemnyn kierunku osi x i ma wartość 10^3 V/m w chwili t=0 i x=0.

3. Napisz równanie fali --->



4. Jak dużo długości fali światła żółtego (580nm) zmieści się w odległości odpowiadającej grubości kartki papieru 80 gr/m^2 ?

5. Skrzypce są zanurzone w basenie z wodą na ślubie dwojga nurków. Zakładając, że prędkość dźwięku w wodzie jest równa 1498 m/s oblicz jaka jest długość fali dźwięku o częstotliwości 440Hz granego na tym instrumencie?

6. Liście pewnej rośliny rosnącej nad brzegiem jeziora odbijają jedynie fale światła o długości 555nm . Jakiej barwy będzie ta roślina widziana spod wody, jeśli prędkość światła w wodzie jest 1,34 razy mniejsza niż w powietrzu?

Interferencja fal 1D

- Fala stojąca

$$E = E_0\left[\cos(kx-\omega t)+\cos(kx+\omega t+\varphi_0)\right]$$

$$E = 2E_0\cos\left(kx+\frac{\varphi_0}{2}\right)\cos\left(\omega t-\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

- Dudnienia

$$E = E_0\left[\cos(k_1 x-\omega_1 t)+\cos(k_2 x-\omega_2 t)\right]$$

$$\overline{\omega} = 0{,}5(\omega_1+\omega_2) \qquad \Delta\omega = \omega_1-\omega_2$$

$$\overline{k} = 0{,}5(k_1+k_2)\Delta k = k_1-k_2$$

$$E = 2E_0\cos\tfrac{1}{2}(\Delta k x-\Delta\omega t)\cos(\overline{k}x-\overline{\omega}t)$$

$$I = 4I_0\cos^2\tfrac{1}{2}(\Delta k x-\Delta\omega t) = 2I_0\left[1+\cos(\Delta k x-\Delta\omega t)\right]$$

$$\sin a+\sin b = 2\sin 0{,}5(a+b)\cos 0{,}5(a-b)$$

$$\cos a+\cos b = 2\cos 0{,}5(a+b)\cos 0{,}5(a-b)$$

1. Fala stojąca jest dana wyrażeniem E=100 sin (2/3)*PI*x cos 5*PI*t. Ustal dwie fale które można dodać by wytworzyć tę falę stojącą

2. Wyobraź sobie że uderzasz w dwa kamertony: jeden o częstotliwości 340Hz, a drugi o częstotliwosci 342Hz. Co usłyszysz?

Interferencja fal 2D

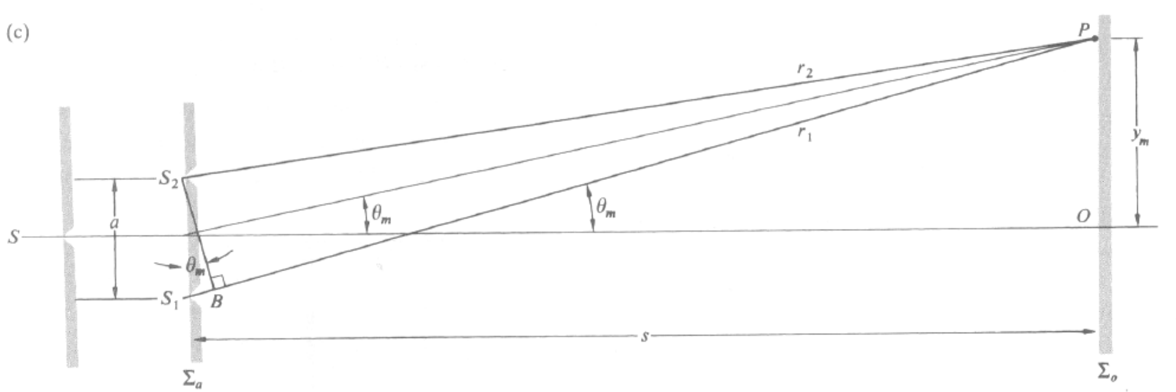
- Doświadczenia Younga

$$r_2 - r_1 = a\sin\theta_m = m\lambda$$

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{a}$$

$$y_m = \frac{s}{a}m\lambda$$

1. Czerwone fale płaskie z lasera rubinowego =694,3 nm propagujące się w powietrzu padają na dwie równoległe szczeliny na nieprzeźroczystym ekranie. Wzór interferencyjny tworzy się na odległej ścianie i widzimy na nim, że czterdziesty prążek jasny znajduje się 1° nad osią środkową. Oblicz odległość między tymi szczelinami.
2. W kartoniku o wymiarach 3cm x 5cm znajdują się dwie pinhole o średnicach 0,08 mm, a ich środki są odległe od siebie o 0,1 mm. Są one oświetlone równoległą wiązką promieni światła niebieskiego pochodzącego z lasera argonowego (λ=488 nm) Jeśli prążki obserwowane na ekranie mają być od siebie odległe o 1 cm to jak daleko powinien znajdować się ekran?
3. Światło białe pada na dwie długie cienkie szczeliny, rozchodzi się za nimi i obserwujemy je na odległym ekranie. Jaka jest długość światła fioletowego, jeżeli wiemy, że prążek pierwszego rzędu dla światła czerwonego (780 nm) pokrywa się z prążkiem drugiego rzędu dla światła fioletowego?



Polaryzacja fal

$$E_x = A_x \cos(kz - \omega t)$$

$$E_y = A_y \cos(kz - \omega t + \varphi)$$

$$\frac{E_y}{A_y} = \cos(kz - \omega t)\cos\varphi - \sin(kz - \omega t)\sin\varphi$$

$$\frac{E_y}{A_y} = \frac{E_x}{A_x}\cos\varphi - \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2}\sin\varphi$$

$$\left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2\cos^2\varphi - 2\left(\frac{E_x}{A_x}\right)\left(\frac{E_y}{A_y}\right)\cos\varphi = \sin^2\varphi - \left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2\sin^2\varphi$$

$$\left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{A_x}\right)\left(\frac{E_y}{A_y}\right)\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2A_x A_y \cos\varphi}{A_x^2 - A_y^2}$$

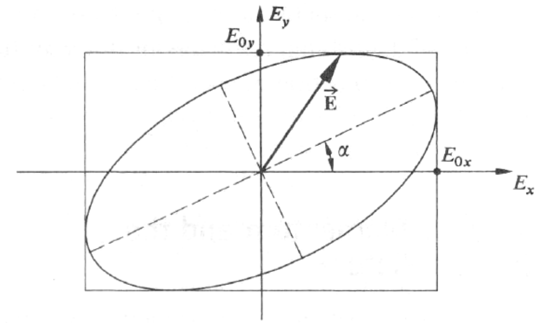
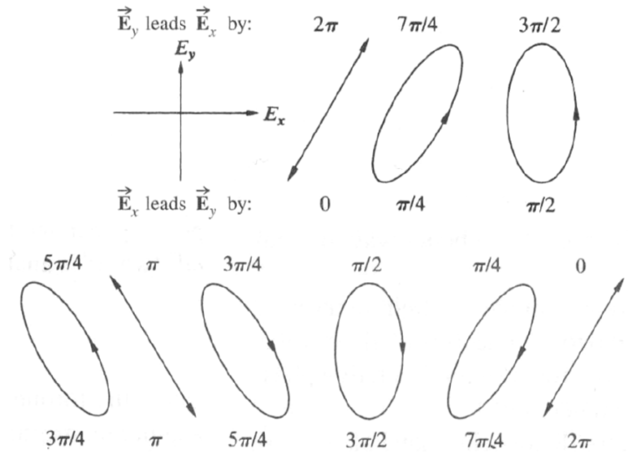


Figure 8.6 Elliptical light. The endpoint of the electric field vector sweeps out an ellipse as it rotates once around.



- Prawo Malusa

$$I(\theta) = \frac{c\varepsilon_0}{2} A_1^2 \cos^2\theta$$

$$I(0) = \frac{c\varepsilon_0}{2} A_1^2$$

$$I(\theta) = I(0)\cos^2\theta$$

1. Napisz wyrażenie dla stanu fali świetlnej P o częstości kątowej ω i amplitudzie E_0 propagującej się wzdłuż osi x z płaszczyzną drgań pod kątem 30° do płaszczyzny xy. Zaburzenie jest zerowe dla t=0 i x=0

2. Idealny polaryzator obraca się z częstością kątową ω pomiędzy podobną parą nieruchomych skrzyżowanych polaryzatorów. Pokaż że wychodząca gęstość strumienia będzie modulowana z czterokrotnie większą prędkością niż częstość obrotu. Innymi słowy wykaż, że $I = I_1/8 * (1 - \cos 4\omega t)$

3. Określ stan polaryzacji:
   (a) $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{i}} E_0 \cos(kz - \omega t) - \hat{\mathbf{j}} E_0 \cos(kz - \omega t)$
   (b) $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{i}} E_0 \sin 2\pi(z/\lambda - \nu t) - \hat{\mathbf{j}} E_0 \sin 2\pi(z/\lambda - \nu t)$
   (c) $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{i}} E_0 \sin(\omega t - kz) + \hat{\mathbf{j}} E_0 \sin(\omega t - kz - \pi/4)$
   (d) $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{i}} E_0 \cos(\omega t - kz) + \hat{\mathbf{j}} E_0 \cos(\omega t - kz + \pi/2)$.

Reflektancja i transmitancja

$$r_\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t} = \frac{\sin(\theta_t-\theta_i)}{\sin(\theta_t+\theta_i)} \qquad r_\parallel = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{n_t\cos\theta_i - n_i\cos\theta_t}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t} = \frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}$$

$$t_\perp = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t} = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_t+\theta_i)} \qquad t_\parallel = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t} = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}$$

$$dla\,\theta_i = 0$$

$$r = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t}$$

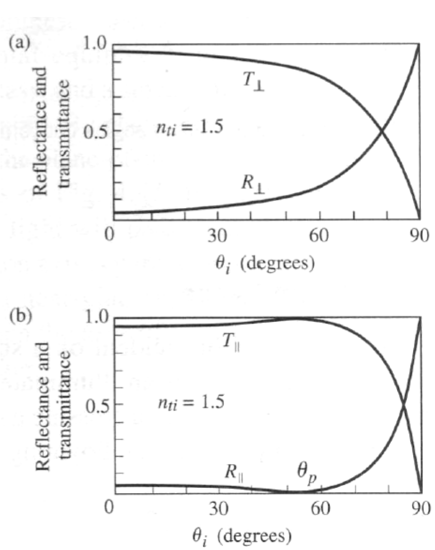
$$t = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$$

$$I = \frac{\varepsilon v}{2}E_0^2 \;-\; srednia\,energia\,na\;jedn.\,czasu\,i\;jedn.\,powierzchni \perp S$$

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = r^2 \qquad T = \frac{I_t\cos\theta_t}{I_i\cos\theta_i} = \frac{n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i}\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = \frac{n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i}t^2$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}} = \frac{c}{n}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\alpha = x\\ &\alpha = \arcsin x + 2n\pi \;\;\text{lub}\;\; \alpha = \pi - \arcsin x + 2n\pi\end{aligned}}$$



1. Udowodnij, że: $T_\parallel = \dfrac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)\cos^2(\theta_i-\theta_t)}$ $\qquad T_\perp = \dfrac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)}$

2. Na podstawie powyższego udowodnij że R+T=1

3. Sprawdź czy istnieje taki kąt padania, dla którego współczynniki transmisji $T_\parallel\, i\, T_\perp$ są równe 1

TIR, mody w światłowodach

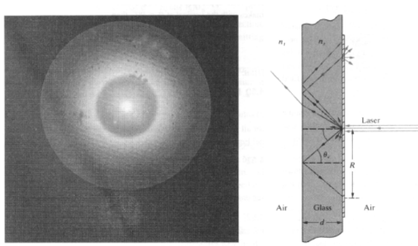
Związek dyspersyjny dla modów TE:

$$W\kappa = \arctan\left(\frac{\sqrt{\left(n_1{}^2 - n_o{}^2\right)k_o{}^2 - \kappa^2}}{\kappa}\right) + \arctan\left(\frac{\sqrt{\left(n_1{}^2 - n_2{}^2\right)k_o{}^2 - \kappa^2}}{\kappa}\right) + \pi m$$

$$\kappa > 0 \quad \kappa_{\max} = k_0\sqrt{n_1^2 - n_0^2}$$

1. Udowodnij, że ktoś patrzący prosto w dół na wodę w basenie będzie odnosił wrażenie, że każdy przedmiot znajdujący się w wodzie znajduje się o ¾ jego faktycznej głębokości.

2. Ryba patrzy prosto do góry na gładką powierzchnię stawu. Wyjaśnij co widzi.



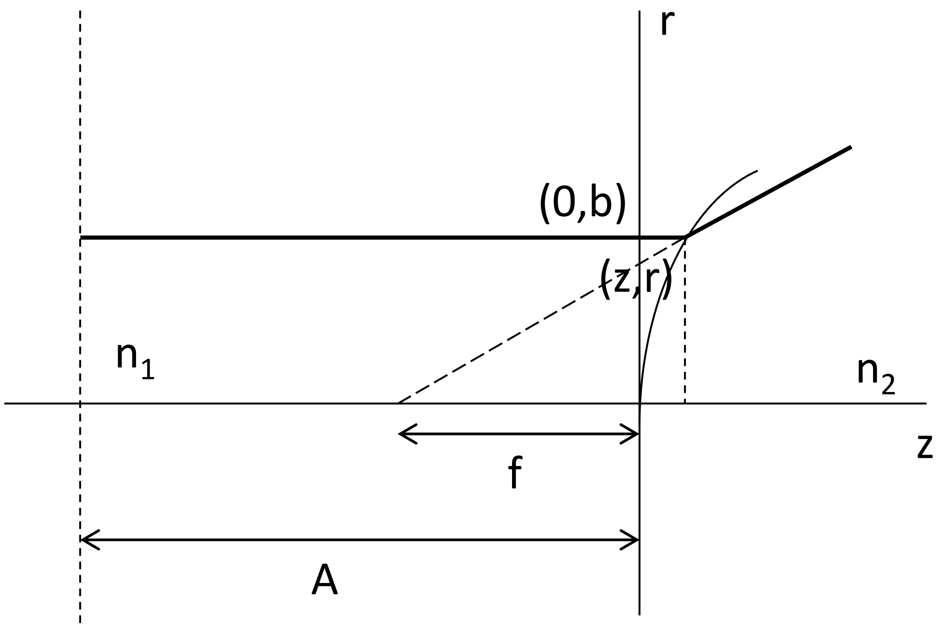
← 3. Wiązka laserowa pada na mokry kawałek bibułki przyklejonej na wierzchu warstwy szkła w celu pomiaru współczynnika załamania szkła. Wyprowadź wyrażenie na n znając R i d

4. Określić przedział grubości falowodu niesymetrycznego, w którym propaguje się tylko jeden mod TE. Przyjąć: n_1=1,62, n_0=1,47, n_2=1,00, λ_0=633 nm

5. Określić ilość modów TE w falowodzie symetrycznym o grubości W=100µm. Przyjąć: n_1=1,62; n_0=n_2=1,00, λ_0=633 nm

Optyka geometryczna – elementy optyczne

1. Znaleźć powierzchnię osiowo-symetryczną względem osi OX, przechodzącą przez punkt (0,0), która transformuje falę płaską w falę sferyczną rozbieżną. Dane: n1, n2, f.



$$n_1(A+z)=n_2\sqrt{(f+z)^2+r^2}$$

$$(0,0)\rightarrow n_1A=n_2 f$$

$$\left(f+\frac{n_1}{n_2}z\right)^2-(f+z)^2=r^2$$

$$2f\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)z+\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}-1\right)z^2=r^2$$

$$2fz\left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right)+z^2=\frac{n_2^2r^2}{n_1^2-n_2^2}$$

$$\left(z+\frac{n_2 f}{n_1+n_2}\right)^2-\frac{n_2^2r^2}{n_1^2-n_2^2}=\frac{n_2^2 f^2}{(n_1+n_2)^2}$$

$$\frac{\left(z+\frac{n_2 f}{n_1+n_2}\right)^2}{\frac{n_2^2 f^2}{(n_1+n_2)^2}}-\frac{r^2}{\frac{(n_1^2-n_2^2)f^2}{(n_1+n_2)^2}}=1$$

2. Dwa źródła quasi-punktowe emitują fale o lokalnych amplitudach A oraz 2A w punkcie P. Wyznaczyć wartości natężenia wokół punktu P gdy źródła są:

a) wzajemnie koherentne.

b) wzajemnie niekoherentne.

$a)$

$$I_P\in\left\langle\left(\sqrt{I_2}-\sqrt{I_1}\right)^2;\left(\sqrt{I_2}+\sqrt{I_1}\right)^2\right\rangle$$

$$I_P\in\langle I;9I\rangle$$

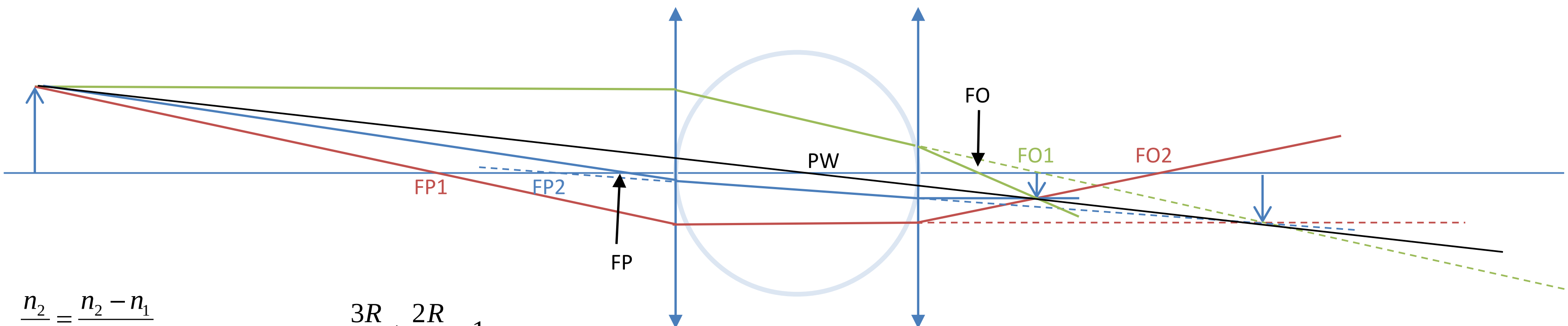
$b)$

$$I_P=I_1+I_2$$

$$I_P=5I$$

Optyka geometryczna - soczewki grube

1. Określić położenie obrazu obiektu położonego s_0 = 1,2 m przed szklaną kulą o promieniu 10 cm i współczynniku załamania n=1,5. Naszkicować promienie tworzące obraz, określić jego rodzaj (rzeczywisty, pozorny, prosty, obrócony) oraz powiększenie.



$$\frac{n_2}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$f_{1o} = \frac{n}{n-1} R = 3R = f_{2p}$$

$$f_{1p} = \frac{1}{1-n}(-R) = 2R = f_{2o}$$

$$\frac{3R}{o} + \frac{2R}{p} = 1$$

$$o = \frac{3pR}{p-2R}$$

$$p' = 2R - o = -\frac{pR + 4R^2}{p - 2R}$$

$$\frac{2R}{o'} + \frac{3R}{p'} = 1$$

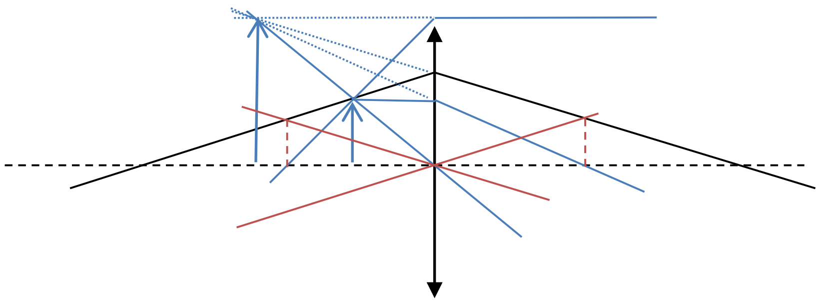
$$o' = \frac{2p'R}{p' - 3R} = \frac{p + 4R}{2p - R} R \xrightarrow{p\to\infty} f = \frac{1}{2} R$$

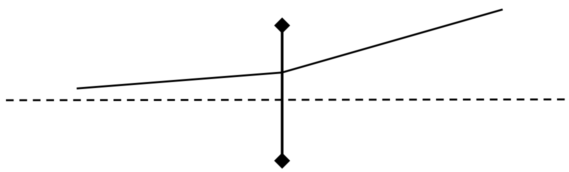
UWAGA! Punkty węzłowe powierzchni sferycznych nie leżą na przecięciu osi optycznej i powierzchni!

2. Soczewka obustronnie wklęsła o współczynniku załamania n=1,5 ma promienie krzywizny R1=20 cm, R2=10 cm oraz grubość d=5 cm na osi symetrii. Znaleźć położenie obrazu dla obiektu znajdującego się w odległości 8 cm od pierwszego wierzchołka soczewki. Porównać otrzymany wynik z rezultatem uzyskanym z równania soczewki cienkiej..

Optyka geometryczna – soczewki cienkie

1. Znając położenie soczewki cienkiej oraz trajektorię promienia padającego i załamanego znaleźć konstrukcyjnie położenie ogniska dla soczewki skupiającej i rozpraszającej.





2. Wyznaczyć ogniskową f soczewki powstałej ze sklejenia 2 soczewek cienkich o ogniskowych f1 oraz f2.

3. Pokazać, że najmniejsza odległość między przedmiotem a jego obrazem rzeczywistym, utworzonym przez soczewkę cienką, skupiającą o ogniskowej f wynosi 4f.

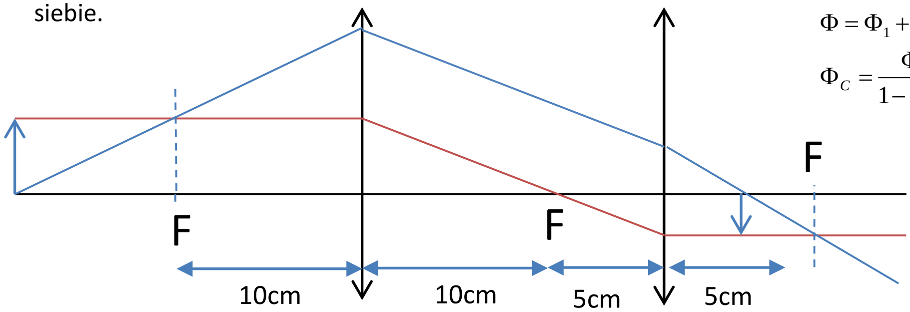
$$\frac{1}{o}+\frac{1}{p}=\frac{1}{f}\xrightarrow{s=o+p}\frac{1}{s-p}+\frac{1}{p}=\frac{1}{f}\rightarrow s(p)=\frac{p^2}{p-f}$$

$$\frac{ds}{dp}=\frac{2p(p-f)-p^2}{(p-f)^2}=0\rightarrow p^2-2pf=0\rightarrow p=2f$$

$$s(p=2f)=4f$$

Optyka geometryczna – instrumenty optyczne

1. Znajdź powiększenie liniowe i wizualne układu teleskopowego złożonego z dwóch soczewek o mocy 10D i 20D ustawionych w odległości 15 cm od siebie.



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2 = 0D$$

$$\Phi_C = \frac{\Phi_1}{1 - d\Phi_1} + \Phi_2 = 0D$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{o_1} = \Phi_1$$

$$p_2 = \frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2} - o_1$$

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{o_2} = \Phi_2$$

$$o_1 = \frac{p_1}{p_1\Phi_1 - 1} = \frac{p}{10p - 1}$$

$$p_2 = \frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2} - \frac{p_1}{p_1\Phi_1 - 1} = \frac{p_1\Phi_1^2 - \Phi_1 - \Phi_2}{\Phi_1\Phi_2(p_1\Phi_1 - 1)} = \frac{10p - 3}{200p - 20}$$

$$o_2 = \frac{p_2}{p_2\Phi_2 - 1} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 - p_1\Phi_1^2}{\Phi_2^2} = \frac{3 - 10p}{40}$$

$$m = \frac{o_1}{p_1}\frac{o_2}{p_2} = -\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = -\frac{1}{2}$$

$$M = \frac{mx}{o_2}\frac{p_1}{x} = m\frac{p_1}{o_2} = \frac{\Phi_1\Phi_2 p_1}{\Phi_1 + \Phi_2 - p_1\Phi_1^2} \xrightarrow{p_1 \to \infty} -\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = -2$$

2. Skonstruowano mikroskop złożony z 2 soczewek skupiających o ogniskowych 25 mm. Znaleźć powiększenie wizualne mikroskopu oraz odległość między soczewkami jeżeli obiekt ma leżeć 30 mm od obiektywu.

$$o_{ob} = \frac{p_{ob} f_{ob}}{p_{ob} - f_{ob}} = 150mm$$

$$p_{ok} = \frac{o_{ok} f_{ok}}{o_{ok} - f_{ok}} \xrightarrow{o_{ok} \to \infty} f_{ok} = 25mm$$

$$L = o_{ob} + p_{ok} = 175mm = f_{ob} + \Delta + f_{ok}$$

$$o_{ob} = f_{ob} + \Delta$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 40D$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2 = -200D$$

$$\Phi_C = \frac{\Phi_1}{1 - L\Phi_1} + \Phi_2 = \frac{200}{6} \cong 33{,}3D$$

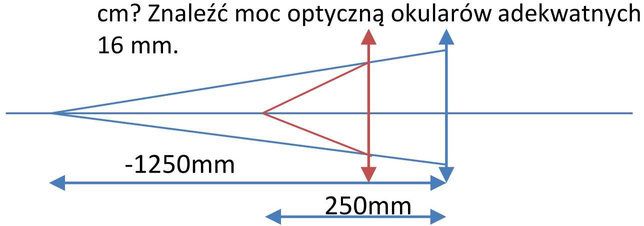
$$x = \frac{1}{\Phi} - \frac{1}{\Phi_C} = -\frac{7}{200} = -35mm$$

$$m_{ob} = -\frac{o_{ob}}{p_{ob}} \xrightarrow{p_{ob} = \frac{o_{ob} f_{ob}}{o_{ob} - f_{ob}}} -\frac{o_{ob} - f_{ob}}{f_{ob}} \xrightarrow{o_{ob} = f_{ob} + \Delta} -\frac{\Delta}{f_{ob}}$$

$$M = -\frac{m_{ob} X}{f_{ok}}\frac{250mm}{X} = -\frac{250mm\Delta}{f_{ob} f_{ok}} = -50$$

$$M = 250mm \cdot \frac{X\Phi}{X} = -50$$

3. Osoba dalekowzroczna widzi wyraźnie przedmioty odległe dopiero od 125 cm. Jakiej mocy optycznej szkła kontaktowe umożliwią jej czytanie w odległości 25 cm? Znaleźć moc optyczną okularów adekwatnych do działania powyższych szkieł kontaktowych, zakładając odległość szkieł okularów od rogówki oka równą 16 mm.



$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \Phi$$

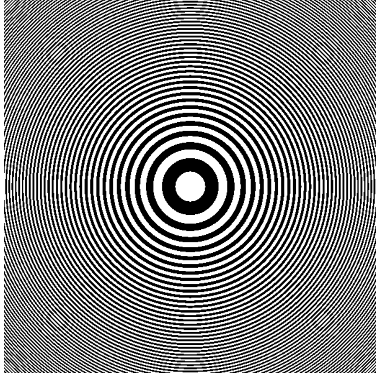
$$\frac{1}{0{,}25m} + \frac{1}{-1{,}25m} = \Phi$$

$$\Phi = 3{,}2D$$

$$\frac{1}{p - d} + \frac{1}{o + d} = \Phi$$

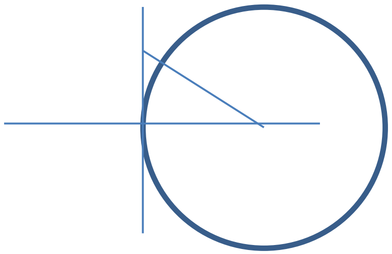
$$\Phi = 3{,}46D$$

Strefy Fresnela



1. Wykazać, że skupiająca soczewka cienka o ogniskowej f ma w przybliżeniu transmitancję: $T(r) = \exp\left(-\frac{ikr^2}{2f}\right)$

Wskazówka: zapisać w formie przyosiowej sferyczną falę zbieżną o promieniu krzywizny f



$$const_1 + T(r) + k\sqrt{f^2 + r^2} = const_2$$

$$T(r) = const_3 - k\sqrt{f^2 + r^2} = const_3 - kf\sqrt{1 + \frac{r^2}{f^2}} \cong const_3 - kf\left(1 + \frac{r^2}{2f^2}\right) = const_4 - \frac{kr^2}{2f}$$

2. Wykazać, że płytka strefowa Fresnela o promieniach $R_n = \sqrt{n\lambda f}$

n=1, 2, 3..., jest równoważna zbiorowi soczewek skupiających i rozpraszających. Wyznaczyć ogniskowe tych soczewek oraz ich wydajności dyfrakcyjne.

Wskazówka: zauważyć, że w odpowiednich współrzędnych transmitancja płytki strefowej Fresnela jest funkcją okresową.

$$f(r^2) = \begin{cases} 1 & dla\,(2n-2)\lambda f < r^2 < (2n-1)\lambda f \\ 0 & dla\,(2n-1)\lambda f < r^2 < 2n\lambda f \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{2\lambda f}\int_{(2k-2)\lambda f}^{(2k-1)\lambda f} e^{-\frac{ik\pi}{\lambda f}t}dt = \frac{i}{2k\pi}\left(e^{-ik\pi(2k-1)} - e^{-ik\pi(2k-2)}\right) = \frac{i}{2k\pi}e^{-ik\pi(2k-1)}\left(1 - e^{-ik\pi}\right)$$

$$|c_k|^2 = \frac{1}{4k^2\pi^2}\left(1 - e^{-ik\pi}\right)\left(1 - e^{ik\pi}\right) = \frac{1}{4k^2\pi^2}\left(2 - e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}\right) = \frac{1 - \cos k\pi}{2k^2\pi^2} = \frac{1 - 1 + 2\sin^2\frac{k\pi}{2}}{2k^2\pi^2} = \frac{\sin^2\frac{k\pi}{2}}{k^2\pi^2} = \begin{cases} \frac{1}{4} & dla\,k = 0 \\ 0 & dla\,k = 2m \quad (m = \pm1, \pm2, \pm3...) \\ \frac{1}{k^2\pi^2} & dla\,k = 2m-1 \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}} f(t)e^{-ik\omega_0 t}dt$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{\lambda f}r^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{r^2}{2\frac{f}{k}}} \longrightarrow zbiór\ soczewek\ o\ ogniskowych\ \frac{f}{2m-1}$$

Rozdzielczość obrazowania

1. Załóżmy, że laser He-Ne (λ=633 nm) emituje wiązkę światła o średnicy 2 mm. Jaka będzie średnica plamki laserowej na powierzchni Księżyca odległej o 384000 km. Pominąć zaburzenia spowodowane atmosferą Ziemi.

2. Oszacować rozdzielczość ludzkiego oka wynikającą z kryterium Rayleigha.

$$\Delta\varphi = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

$$D = 3mm$$

$$\lambda = 780nm$$

$$f = 17{,}2mm$$

$$\Delta\varphi = 0{,}000317\,\mathrm{rad} = 1{,}1\,\mathrm{arcmin}$$

$$d = \Delta\varphi \cdot f = 5{,}46\,\mu\mathrm{m}$$

3. Neoimpresioniści stworzyli szkołę malowania zwaną pointylizmem. Obrazy składały się z wielkiej ilości jednokolorowych plamek o średnicy ok. 2,5 mm. Iluzja mieszania kolorów powstaje w oku obserwatora. Ocenić z jakiej co najmniej odległości należy obserwować obrazy tego typu.

4. Teleskop Mount Palomar posiada zwierciadlany obiektyw o średnicy 508 cm. Jak odległe od siebie obiekty pozwala on zaobserwowa Księżyca. Wyznaczyć analogiczną odległość na Księżycu przy obserwacji nieuzbrojonym, ludzkim okiem. Przyjąć:

Odległość Księżyc-Ziemia: 384000 km
Średnica źrenicy ludzkiego oka: 4 mm
Długość fali światła: 550 nm

Samoobrazowanie

1. Monochromatyczna wiązka Bessela o długości fali λ i rozkładzie poprzecznym amplitudy $J_0\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)$ pada prostopadle na cienką soczewkę skupiającą o ogniskowej 10 cm. Znaleźć promień okręgu sformowanego przez soczewkę w jej płaszczyźnie ogniskowej.

$$U(r) = 2\pi A \cdot J_0(k_\perp r)$$

$$k_\perp r = \frac{\pi r}{\lambda} \Rightarrow \frac{k_\perp}{k} = \frac{1}{2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + f^2}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3} f}{3} = 5{,}77 cm$$

2. Monochromatyczne pole o długości fali λ jest złożone z fali płaskiej i wiązki Bessela, propagujących się wzdłuż osi *OZ*. W płaszczyźnie z=0 amplituda fali płaskiej wynosi *A* a wiązki Bessela $J_0\left(\frac{5}{13}kr\right)$, gdzie $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Wyznaczyć odległości samoobrazowania dla takiego pola.

$$k_\perp r = \frac{5}{13} kr \Rightarrow k_\perp = \frac{5}{13} k \Rightarrow k_z = \sqrt{k^2 - \frac{25}{169} k^2} = \frac{12}{13} k$$

$$k_{fp} z = k_z z + 2\pi n \Rightarrow kz = \frac{12}{13} kz + 2\pi n \Rightarrow z = 13\lambda n$$

3. Pokazać, że w przybliżeniu przyosiowym Fresnela samoobrazują się obiekty periodyczne o sieci kwadratowej i stałej d (dwuwymiarowe siatki dyfrakcyjne), oświetlone falą płaską o długości λ. Wykazać, że najmniejsza odległość samoobrazowania wynosi 2d²/λ.
Wskazówka: rozwinąć transmitancję obiektu periodycznego w szereg Fouriera i zinterpretować go jako superpozycję fal płaskich.

$$T(x) = t(x - nd) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_k e^{im\omega x} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_n e^{im\frac{2\pi}{d}x}$$

$$k_x = \frac{2\pi m}{d} \qquad \frac{k_z}{k} = \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2}} \xrightarrow{k_x << k} \left(1 - \frac{k_x^2}{2k^2}\right) = \left(1 - \frac{m^2 \lambda^2}{2d^2}\right)$$

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{\pi \lambda m^2}{d^2} = \frac{2\pi d^2 - \pi \lambda^2 m^2}{\lambda d^2}$$

$$\forall_m \exists_N k_z z_0 = const + 2\pi N$$

$$\frac{2\pi d^2 - \pi \lambda^2 m^2}{\lambda d^2} z_0 = const + 2\pi N \xrightarrow{m=0, N=0} \frac{2\pi}{\lambda} z_0 = const$$

$$-\frac{\pi \lambda m^2}{d^2} z_0 = 2\pi N \xrightarrow{N=m^2} z_0 = \frac{2d^2}{\lambda} N$$