

# **Fizyka** statystyczna w wysokoenergetycznych zderzeniach **jądrowych II**

**Viktor Begun**

**UJK, Kielce, Polska (8)**

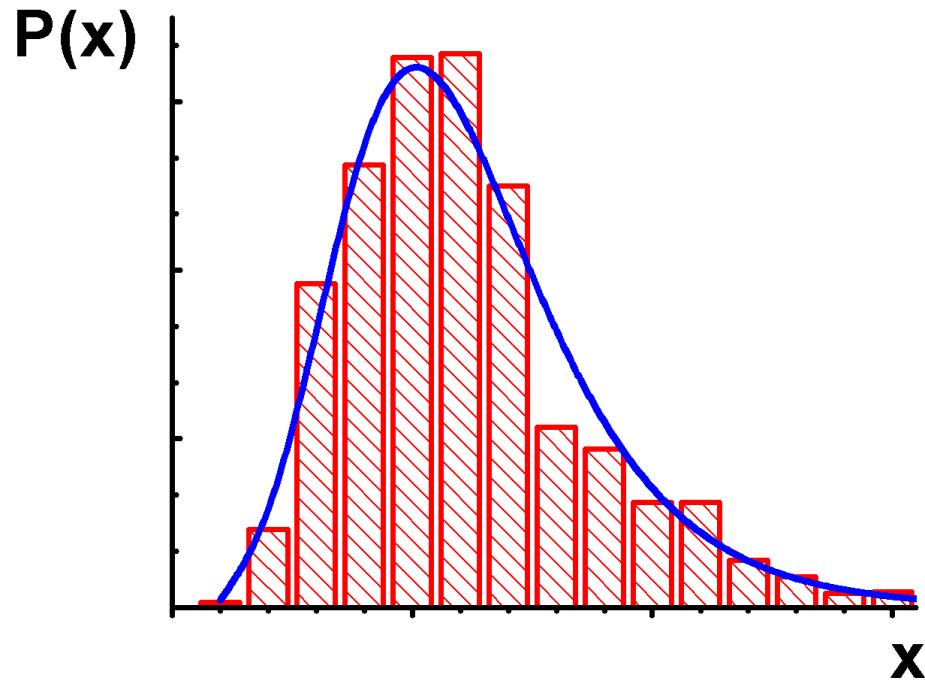
Enrico Fermi Ctr., Włochy (2)

FIAS, Frankfurt, Niemcy (8)

BITP, Kijów, Ukraina (37)

# **Podstawy teorii prawdopodobieństwa**

# Numeryczne charakterystyki rozkładu prawdopodobieństwa



Średnia  $\langle x \rangle = \int x \cdot P(x) dx$

Moment Centralny

$$m_n = \langle (x - \langle x \rangle)^n \rangle$$
$$= \int (x - \langle x \rangle)^n \cdot P(x) dx$$

Normowana Wariancja

$$\omega = \frac{m_2}{\langle x \rangle} = \frac{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}{\langle x \rangle} = \frac{\sigma^2}{\langle x \rangle}$$

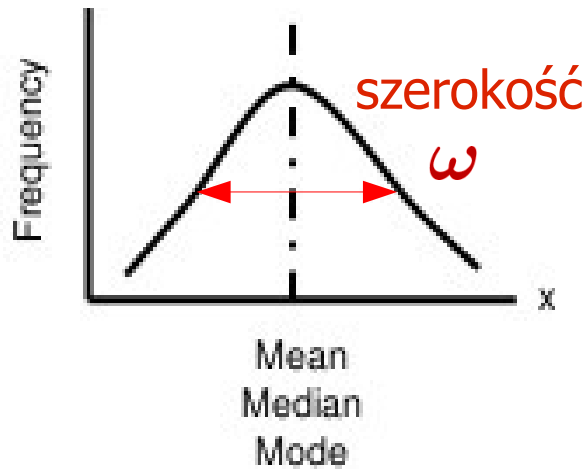
Normowana  
Skośność

$$S \cdot \sigma = \frac{m_3}{m_2}$$

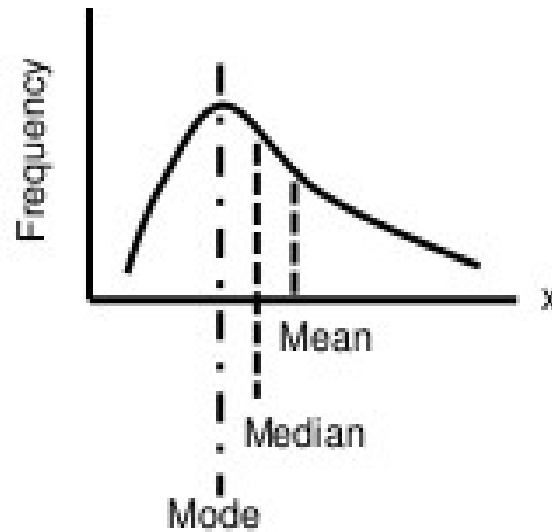
Normowana  
Kurtoza

$$\kappa \cdot \sigma^2 = \frac{m_4}{m_2}$$

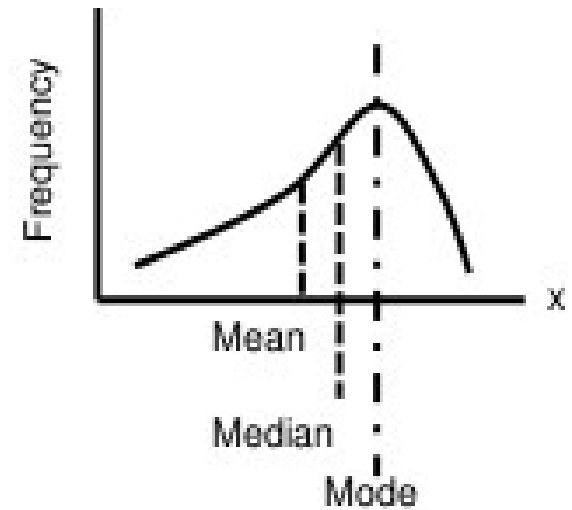
# Kształty rozkładów



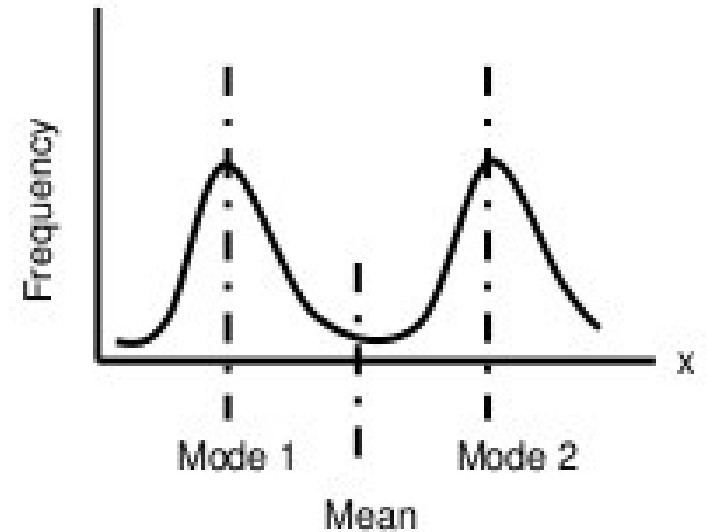
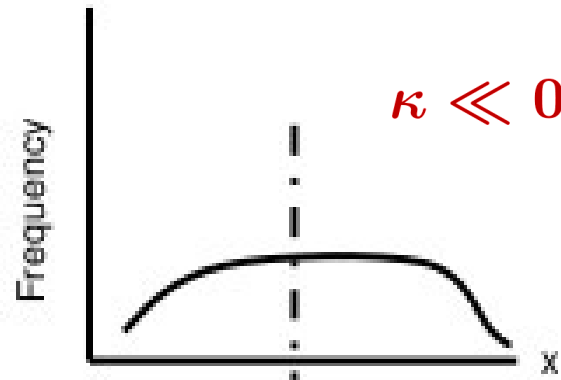
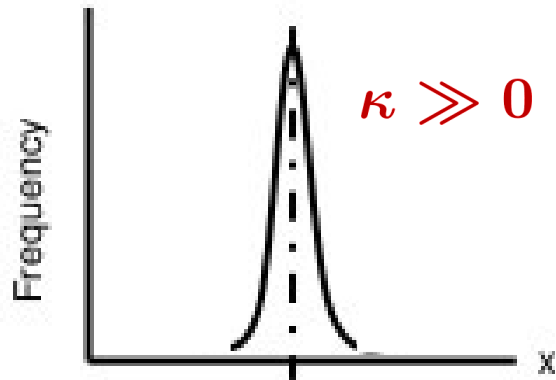
$$S, \kappa \sim 0$$



$$S > 0$$

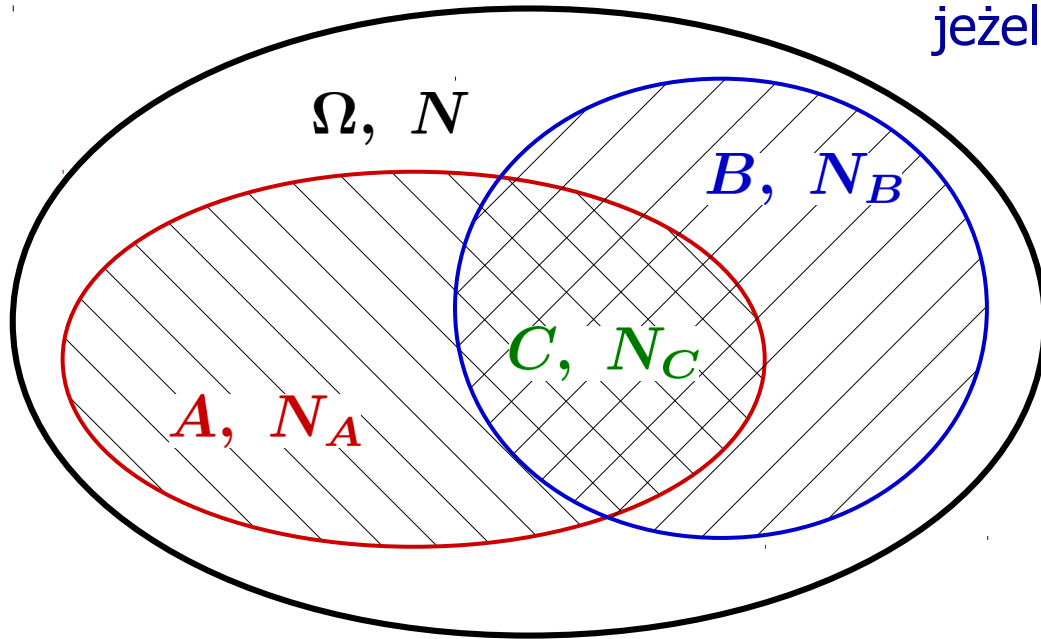


$$S < 0$$



# Rozkład warunkowy

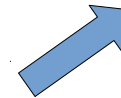
jeżeli każde zdarzenie w  $\Omega$  jest „równocenne”



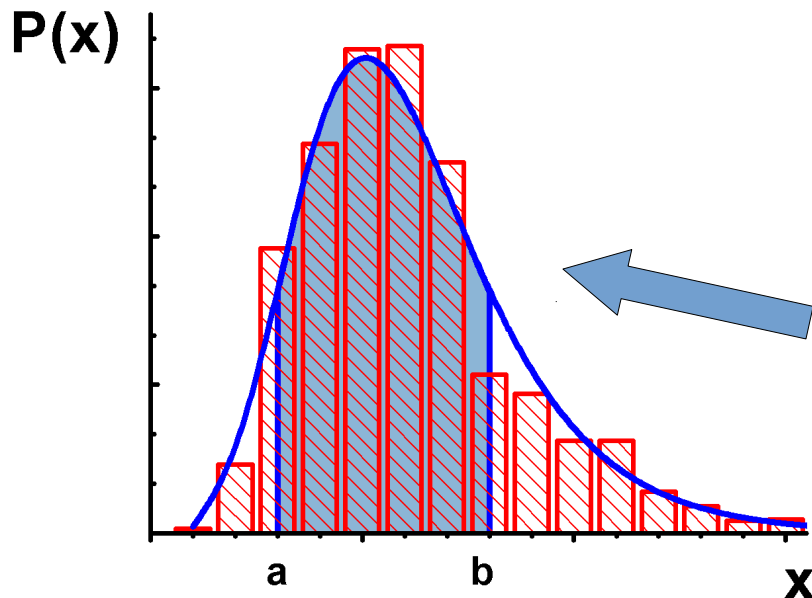
$$P(A) = \frac{N_A}{N} \quad P(B) = \frac{N_B}{N}$$

$$P(C) = P(A \cap B) = \frac{N_C}{N}$$

$$= \frac{N_C}{N_B} \frac{N_B}{N} = P(A|B) P(B)$$



Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego **A**  
**pod warunkiem** wystąpienia zdarzenia **B**



Prawdopodobieństwo trafienia zmiennej  
losowej  $x$  w  
przedział  $[a, b]$   $P_{a,b} = \int_a^b P(x) dx$

średnie  $\langle x \rangle_{a,b} = \int_a^b x \cdot P(x) dx$

# Rozkład Bernoulliego (dwumianowy)

- Liczba **sukcesów**  $n$  w ciągu  $N$  niezależnych **prób**, z których każda ma stałe **prawdopodobieństwo** sukcesu równe  $q$ . To jest najprostszy **model** dla opisu **nie idealnego detektora**.

$$P_{acc}(n) = q^n (1 - q)^{N-n} \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$N$  - liczba emitowanych cząstek  
 $n$  - liczba zmierzonych cząstek

$0 < q < 1$  - prawdopodobieństwo trafienia do detektora

- Średnie muszą być obliczone przez **podwójne uśrednienie** – za rozkładem **źródła** i za rozkładem prawdopodobieństwo trafienia do **detektora**.

# Rozkład Bernoulliego (dwumianowy)

- Liczba **sukcesów**  $n$  w ciągu  $N$  niezależnych **prób**, z których każda ma stałe **prawdopodobieństwo** sukcesu równe  $q$ . To jest najprostszy **model** dla opisu **nie idealnego detektora**.
 
$$P_{acc}(n) = q^n (1 - q)^{N-n} \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$N$  - liczba emitowanych cząstek       $0 < q < 1$  - prawdopodobieństwo trafienia do detektora  
 $n$  - liczba zmierzonych cząstek

- Średnie muszą być obliczone przez **podwójne uśrednienie** – za rozkładem **źródła** i za rozkładem prawdopodobieństwo trafienia do **detektora**.

- Dla dowolnego rozkładu źródła  $P_S(N)$  mamy

$$\langle \langle n \rangle_{acc} \rangle_S = \sum_{N=0}^{\infty} P_S(N) \sum_{n=0}^{\infty} n P_{acc}(n) = q \sum_{N=0}^{\infty} N P_S(N) = q \langle N \rangle_S$$

- wprost można otrzymać  $\omega_{acc} = 1 + q(\omega_S - 1)$       V. Begun, arXiv: 1603.02254

$$(S \cdot \sigma)_{acc} \simeq 1 + 2q(\omega_S - 1) \quad (\kappa \cdot \sigma^2)_{acc} \simeq 1 + 6q(\omega_S - 1)$$

# Rozkład Poissona i Gaussa (normalny)

- Rozkład **Poissona** wyraża prawdopodobieństwo szeregu **niezależnych zdarzeń** ze znaną średnią częstotliwością
- Może być stosowany do systemów z dużą liczbą możliwych zdarzeń, z których każde jest bardzo rzadkie, na przykład – do rozpadu jąder atomowych

$$P(N) = \exp[-\langle N \rangle] \frac{\langle N \rangle^N}{N!} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle N \rangle}} \exp\left[-\frac{(N - \langle N \rangle)^2}{2\langle N \rangle}\right]$$

$$\omega = S \cdot \sigma = \kappa \cdot \sigma^2 = 1$$

- Rozkład **Gaussa** najczęściej występuje w naturze, ponieważ jeżeli jakaś wielkość jest sumą bardzo wielu losowych czynników, to **niezależnie od rozkładu każdego** z tych czynników jej rozkład będzie **zbliżony do normalnego** (centralne twierdzenie graniczne)

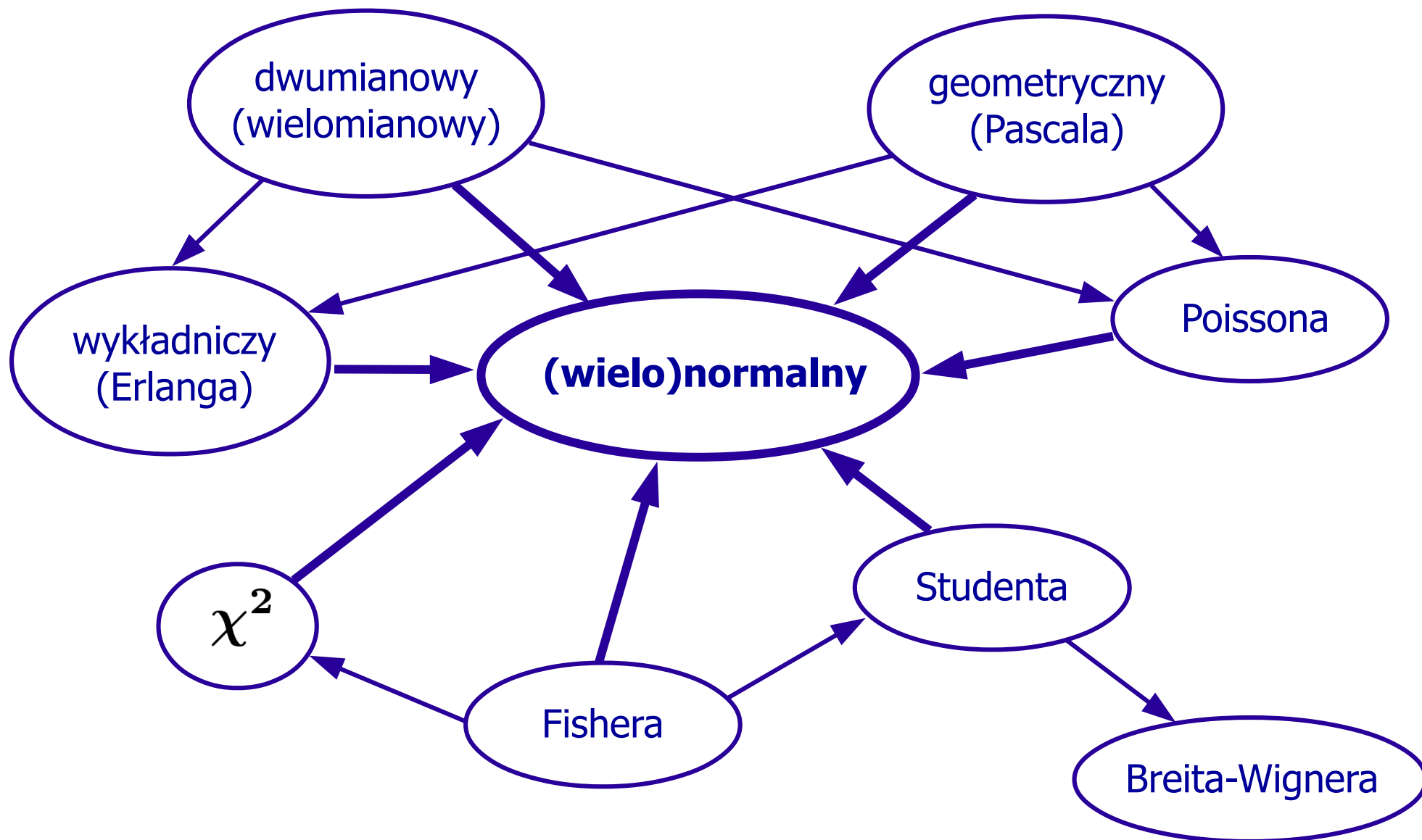
$$P(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle N \rangle \omega}} \exp\left[-\frac{(N - \langle N \rangle)^2}{2\langle N \rangle \omega}\right] \quad \omega - \text{parametr}$$

$$S \cdot \sigma = \kappa \cdot \sigma^2 = 0 \quad !!!$$

rozkłady **Gaussa** i **Poissona** **różnią się dla wyższych momentów**



# Związki między rozkładami



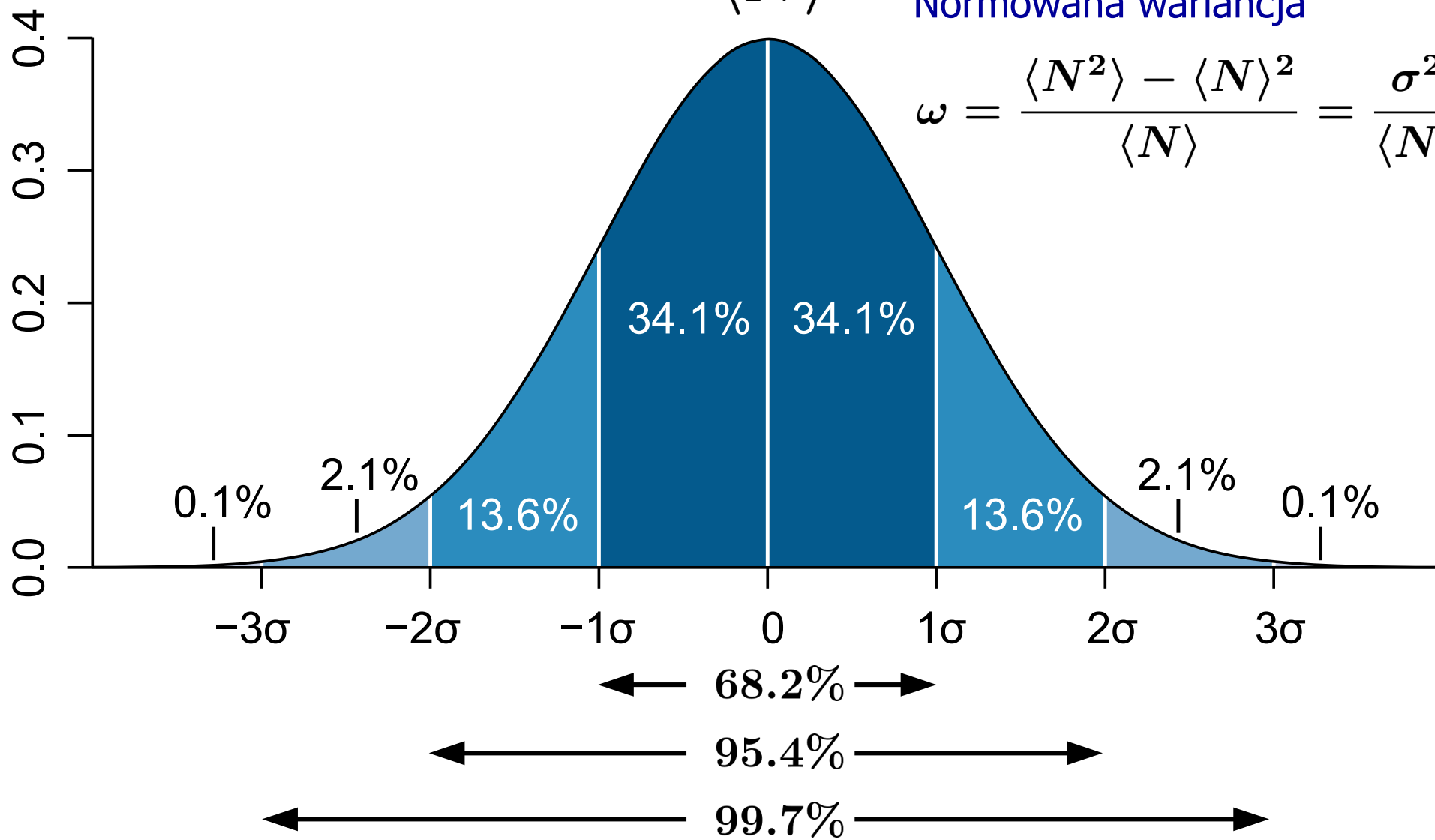
rozkład normalny jest granicznym rozkładem dla większości innych rozkładów

# Własności rozkładu Gaussa

Średnia -  $\langle N \rangle$

Normowana wariancja

$$\omega = \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle} = \frac{\sigma^2}{\langle N \rangle}$$



procent danych w odpowiednim odchyleniu od średniej

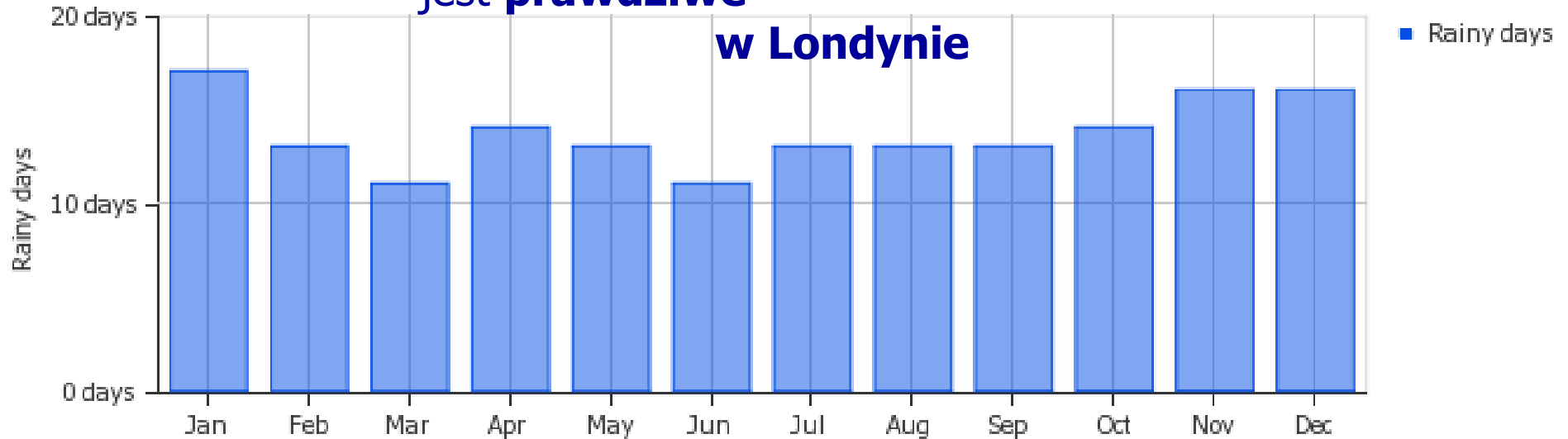
# **Zaskakujące znaczenie w realnym życiu**

# Czy będzie padać?

Zwykłe powiedzenie - **albo tak, albo nie**, czyli z prawdopodobieństwem **50%**

- jest **prawdziwe**

**w Londynie**



Average rainy days (rain/snow) in London, United Kingdom Copyright © 2015 www.weather-and-climate.com

**ale nie na Ibizie**



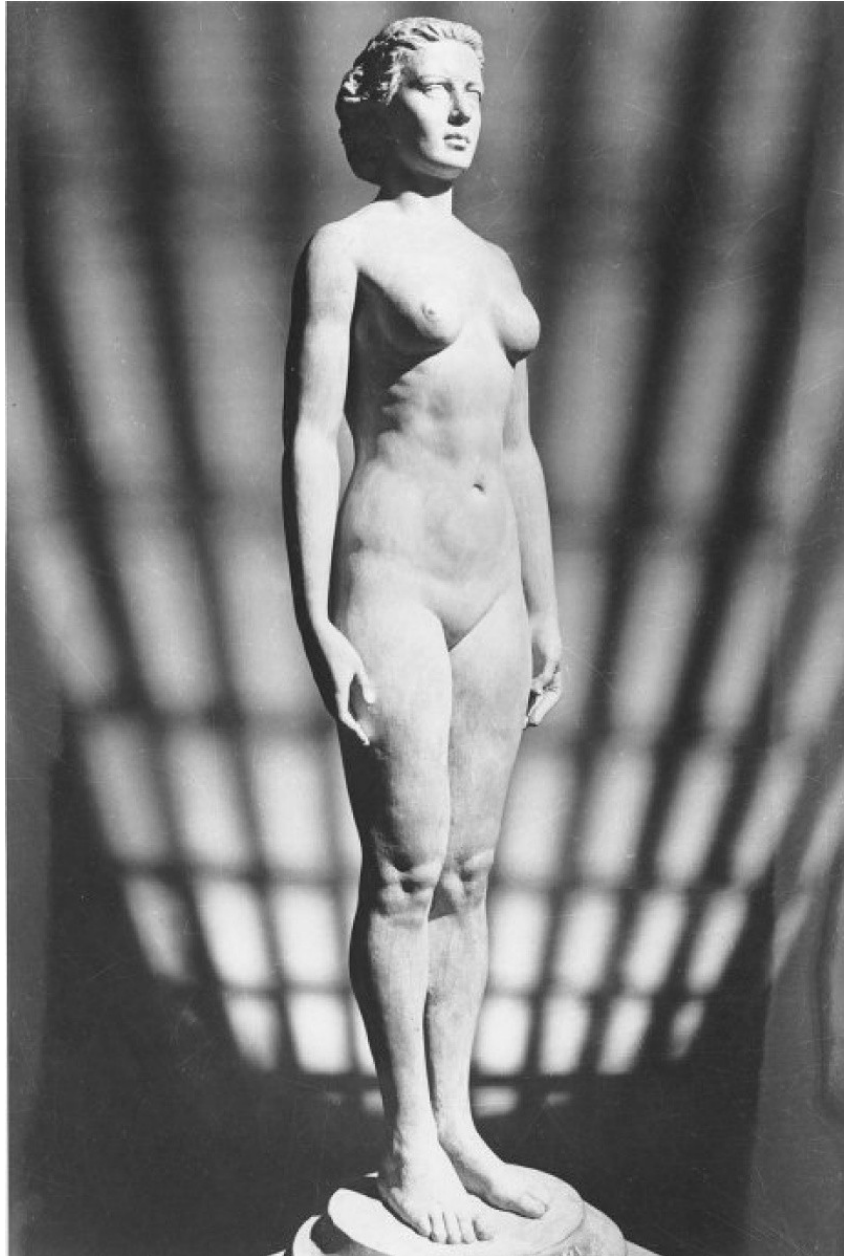
Average rainy days (rain/snow) in Ibiza, Spain Copyright © 2015 www.weather-and-climate.com

# Przeciętny pilot

- Pod koniec 1940-tych, w wojskach lotniczych USA zaobserwowano poważny problem: **wielu pilotów nie mogło utrzymać kontroli nad samolotem.** W najgorszym dniu rozbiło się 17 pilotów.
- Badania pokazały, że **problem** znajduje się **w kabinie** pilota. Wielkość i kształt siedzenia, odległość od pedałów, wysokość przedniej szyby, i nawet kształt hełmów zostały zbudowane zgodnie ze średnimi wymiarami zrobionymi w 1926 roku.
- Nowe badanie rozmiarów ciała **4.063** pilotów pokazało, że tylko **3,5%** z nich ma **3 z 10** parametrów **odbiegające od średniego** o mniej niż **30% !**
- **Do 10 parametrów nie pasował żaden!** Chociaż piloci zostali **wstępnie wybrani** jako posiadający średnie rozmiary ciała.
- Jeśli kabina pilota została zaprojektowana tak aby pasować do przeciętnego pilota, to nie będzie pasować nikomu, bo **przeciętny pilot** (przeciętny kierowca, **idealny mężczyzna...**) **nie istnieje.**



# Błędny ideał



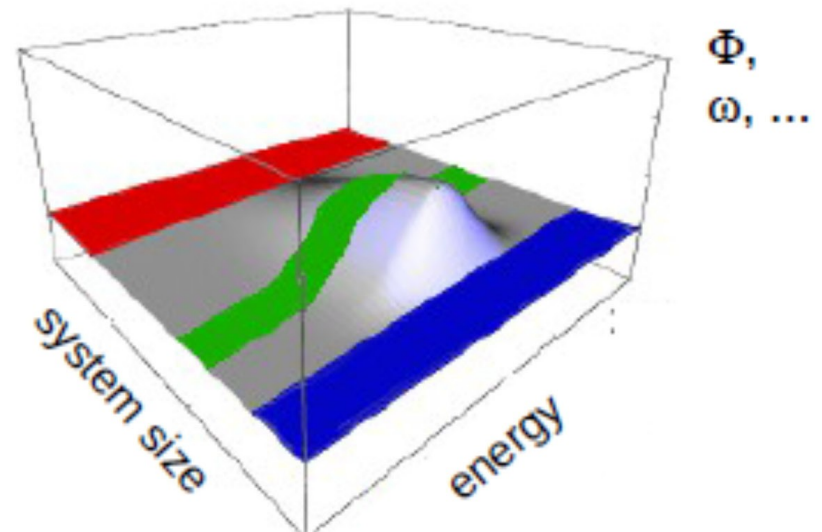
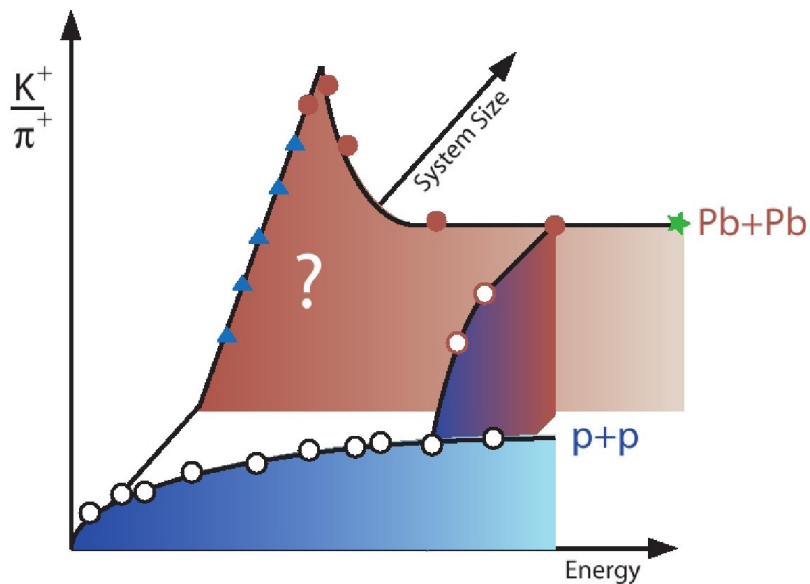
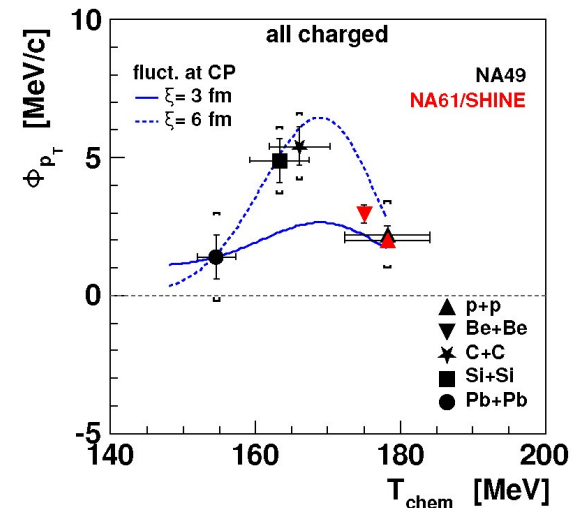
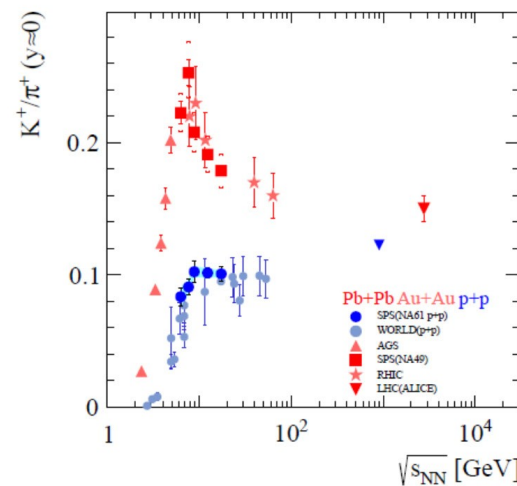
- Rzeźba ta nazywa się **Norma** i miała prezentować **"idealny"** kształt ciała **kobiety**. To jest **średni rezultat** pomiarów ciała **15.000** młodych dorosłych **kobiet** przez znanego ginekologa z USA Dr. Roberta L. Dickinsona, i jego współautora Abrama Belskie. Można ją zobaczyć w **Cleveland Health Museum**
- Został ogłoszony **konkurs** żeby **znaleźć kobietę, która dopasuje** się do "ideału". Norma była wyróżniona w czasopiśmie **Time**, w bajkach, gazetach, w serialu CBS...
- Z **3.864** kobiet, biorących udział w konkursie tylko **40** miało **5 z 9** wymiarów zbliżonych do średnich. **Nikt**, nawet zwycięzca - Martha Skidmore, **nie miała 9 z 9!**
- **Idealna kobieta** „przeciętnego rozmiaru” **nie istnieje!**

# Zastosowanie dla poszukiwania QGP

# Program skanowania NA61

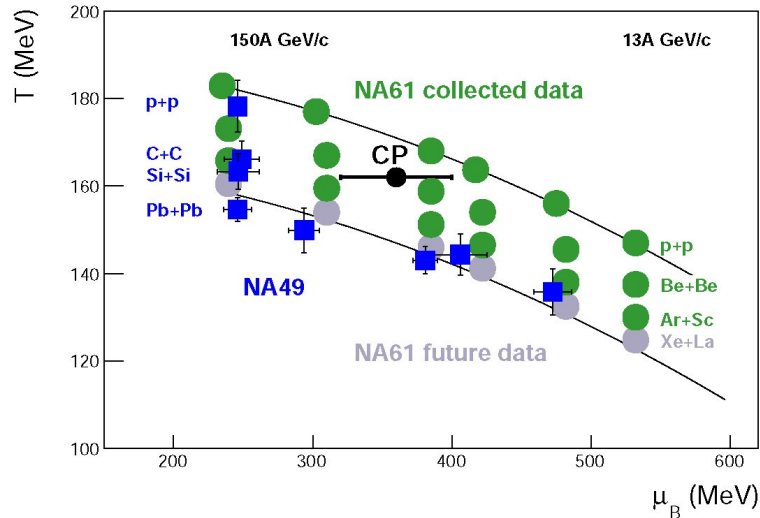
The most interesting region of the phase diagram is accessible at the SPS:

- the onset of deconfinement at  $\sqrt{s_{NN}} = 7.6$  GeV
- indications of the critical point located at  $\sqrt{s_{NN}} = 17.3$  GeV





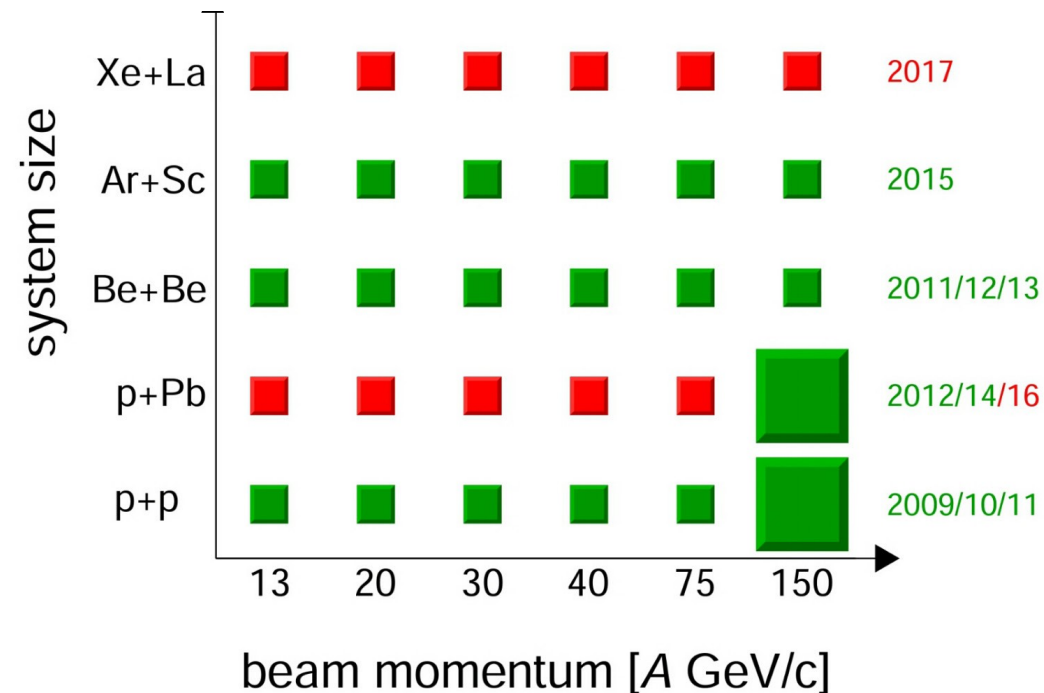
# Program skanowania NA61



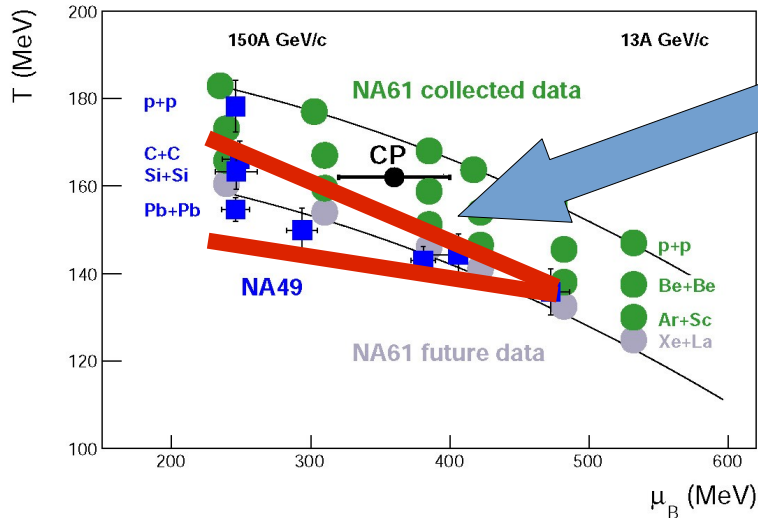
Estimated (NA49) and expected (NA61) chemical freeze-out points PRC 73, 044905

The NA61/SHINE experiment performs comprehensive scan with light and intermediate mass nuclei in energy range 13A-158A GeV

Data taking schedule for the strong interactions program and its proposed extension (in gray)



# Program skanowania NA61

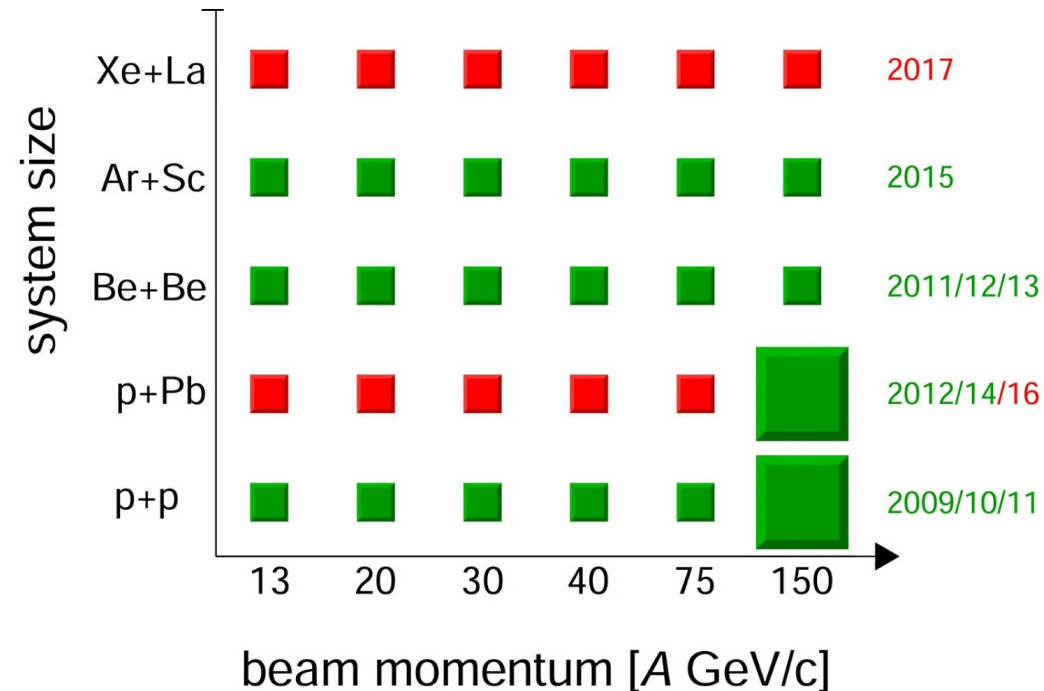


Begun, Vovchenko, Gorenstein, arXiv:1512.08025

The NA61/SHINE experiment performs comprehensive scan with light and intermediate mass nuclei in energy range 13A-158A GeV

Estimated (NA49) and expected (NA61) chemical freeze-out points PRC 73, 044905

Data taking schedule for the strong interactions program and its proposed extension (in gray)





# **Ustawienie tła**

# Zespoły statystyczne

## Mikro-kanoniczny (MCE)

$$E, N$$

Stała **energia**,  
**krotność** cząstek



## Kanoniczny (CE)

$$E \rightarrow T, N$$

Stała **temperatura**,  
**krotność** cząstek



## Wielki Kanoniczny (GCE)

$$E \rightarrow T, N \rightarrow \mu$$

Stała **temperatura**,  
**potencjał chemiczny**



- W zderzeniach **relatywistycznych** cząstki mogą być tworzone i unicestwione, ale **zachowuje** się **ładunek**  $Q = N_Q^+ - N_Q^-$  – różnica pomiędzy cząstkami i antycząstkami, co zmienia definicje zespołów statystycznych

## MCE

$$E, Q$$

Stała **energia**,  
**ładunek**

## CE

$$E \rightarrow T, Q$$

Stała **temperatura**,  
**ładunek**

## GCE

$$E \rightarrow T, Q \rightarrow \mu_Q$$

Stała **temperatura**,  
**potencjał chemiczny**

# Zespoły statystyczne

**Mikro-kanoniczny (MCE)**

$$E, Q$$

Stała **energia**,  
**ładunek**



**Kanoniczny (CE)**

$$E \rightarrow T, Q$$

Stała **temperatura**,  
**ładunek**



**Wielki Kanoniczny (GCE)**

$$E \rightarrow T, Q \rightarrow \mu_Q$$

Stała **temperatura**,  
**potencjał chemiczny**



- Dobrze wiadoma **ekwiwalentność zespołów statystycznych**

**nie rozszerza** się na **fluktuacje**

Begun, Gazdzicki, Gorenstein, Phys. Rev. C (2005)

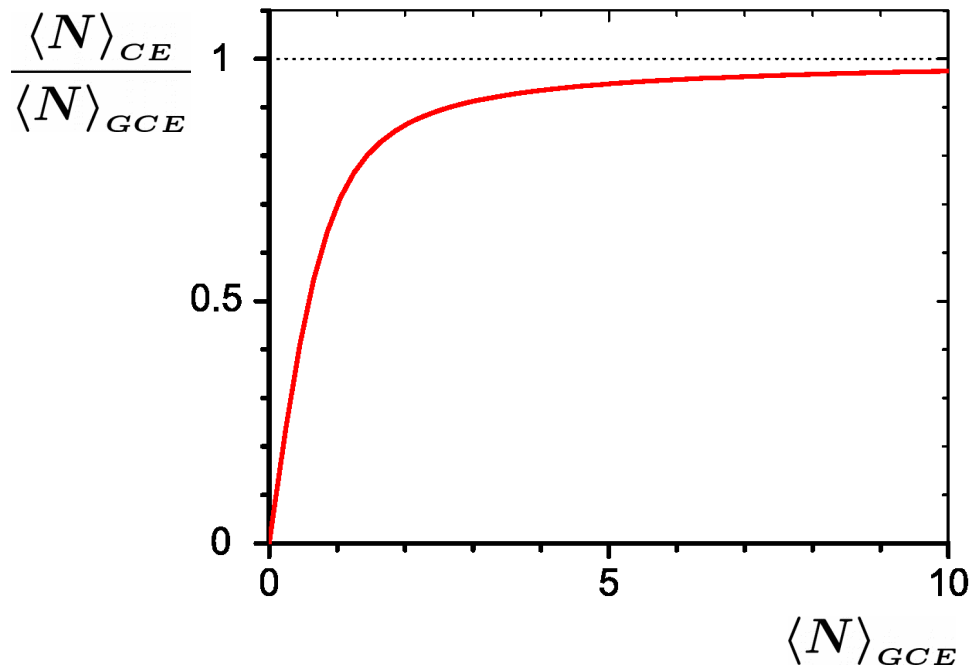
$$\langle N \rangle_{MCE} \simeq \langle N \rangle_{CE} \simeq \langle N \rangle_{GCE}$$

$$\langle N \rangle_{MCE}, \langle N \rangle_{CE} \neq const$$

**ale**  $\omega_{MCE} \neq \omega_{CE} \neq \omega_{GCE}$

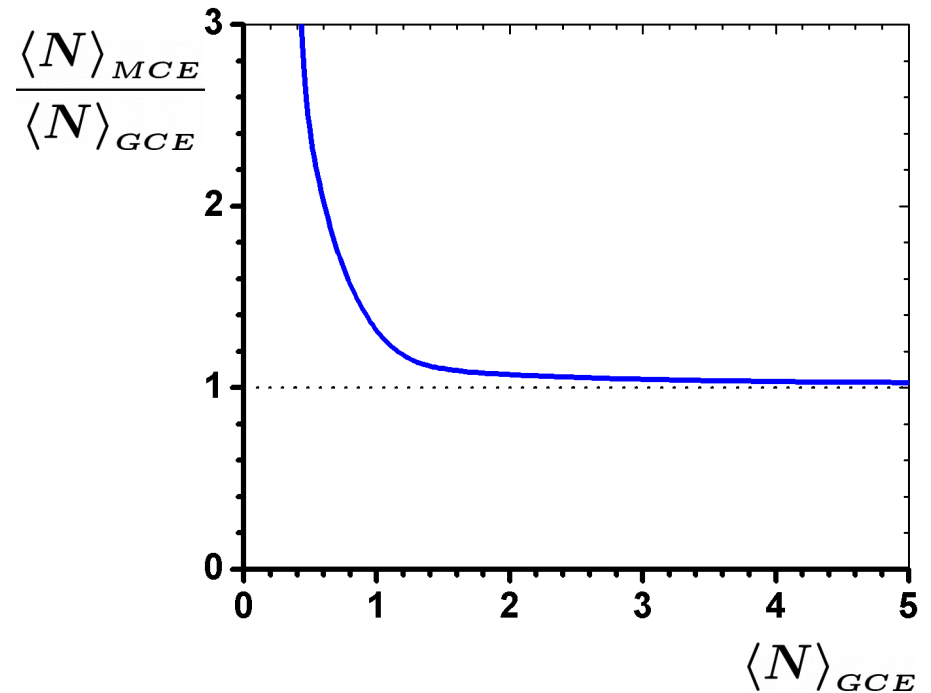
$$\omega_{MCE}, \omega_{CE} \neq 0$$

# Średnie w MCE, CE i GCE



Rafelski, Danos, Phys. Lett. B (1980)

...  
Gorenstein, Gaździcki, Greiner,  
Phys. Lett. B (2000)



Werner, Aichelin, Phys. Rev. C (1995)

...  
Becattini, Ferroni, Eur. Phys. J. (2004)

- Średnia ilość cząstek obliczona w CE jest mniejsza niż w GCE (**canonical suppression**)  $\langle N \rangle_{CE} \ll \langle N \rangle_{GCE}$ ,  $\langle N \rangle_{GCE} \rightarrow 0$
- W **MCE** z założenia ma być **przynajmniej jedna cząstka**  $\langle N \rangle_{MCE} \geq 1$
- **Równowaga** termodynamiczna jest osiągnięta już **dla 5-10 cząstek**

# Fluktuacje w CE i GCE

Suma statystyczna  $Z = \sum_N Z_N$

Prawdopodobieństwo obserwacji  $N$  cząstek  $P(N) = \frac{Z_N}{Z}$

Średnia  $\langle N^k \rangle = \sum_N N^k P(N)$

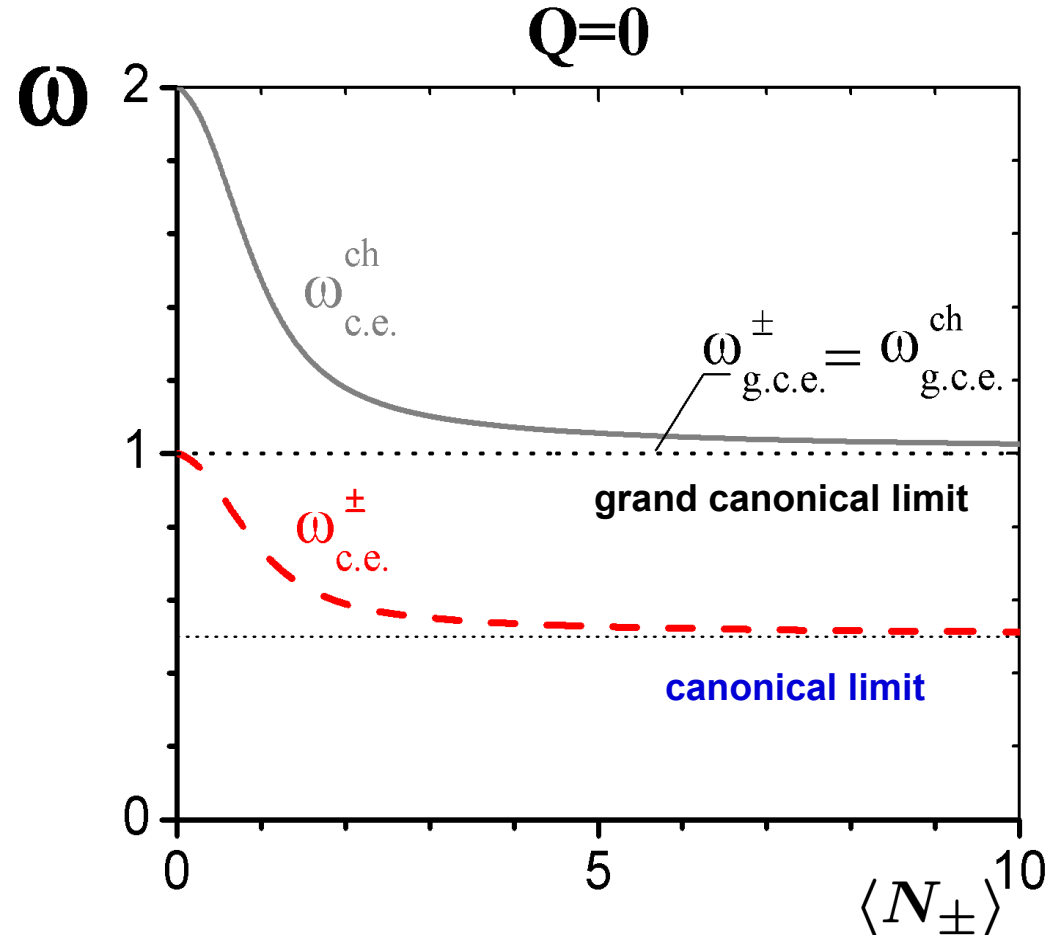
$$\sum_N P(N) = 1$$

$$Z_{GCE} = \sum_{N_+=0}^{\infty} \sum_{N_-=0}^{\infty} \frac{\langle N_+ \rangle^{N_+}}{N_+!} \frac{\langle N_- \rangle^{N_-}}{N_-!}$$

$$= \exp [ 2 \langle N_{\pm} \rangle ]$$

$$Z_{CE} = \sum_{N_+=0}^{\infty} \sum_{N_-=0}^{\infty} \frac{\langle N_+ \rangle^{N_+}}{N_+!} \frac{\langle N_- \rangle^{N_-}}{N_-!} \delta(N_+ - N_-)$$

$$= I_0 [ 2 \langle N_{\pm} \rangle ] \leftarrow \text{funkcja Bessela}$$



Begun, Gaździcki, Gorenstein, Zozulya, Phys. Rev. C (2004)

$\delta(N_+ - N_-)$   
 Delta funkcja Diraka  
 zapewnia zachowanie  
 ładunku

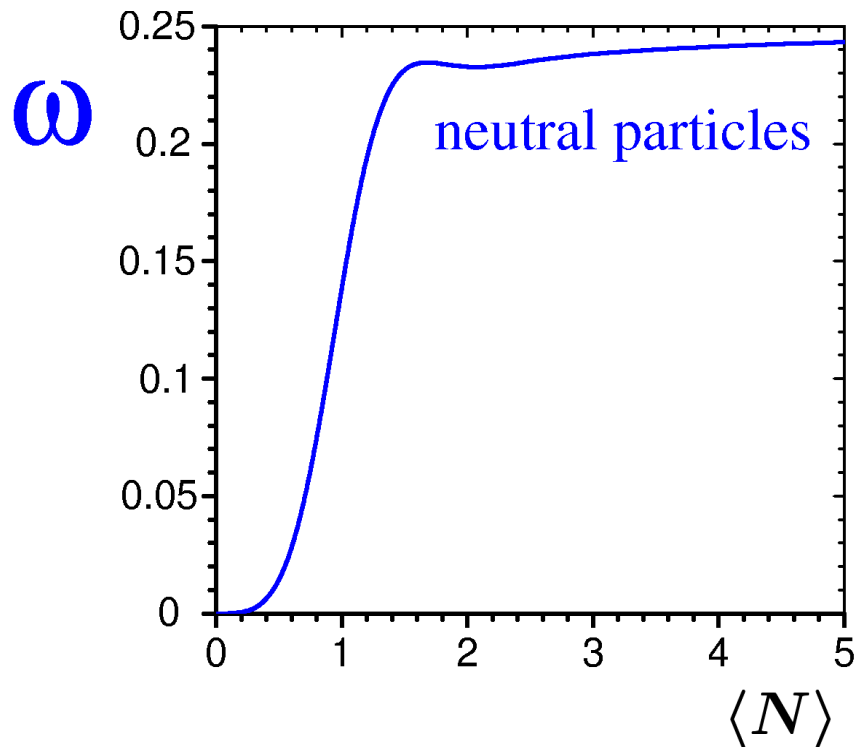
**Fluktuacje są tłumione w CE**



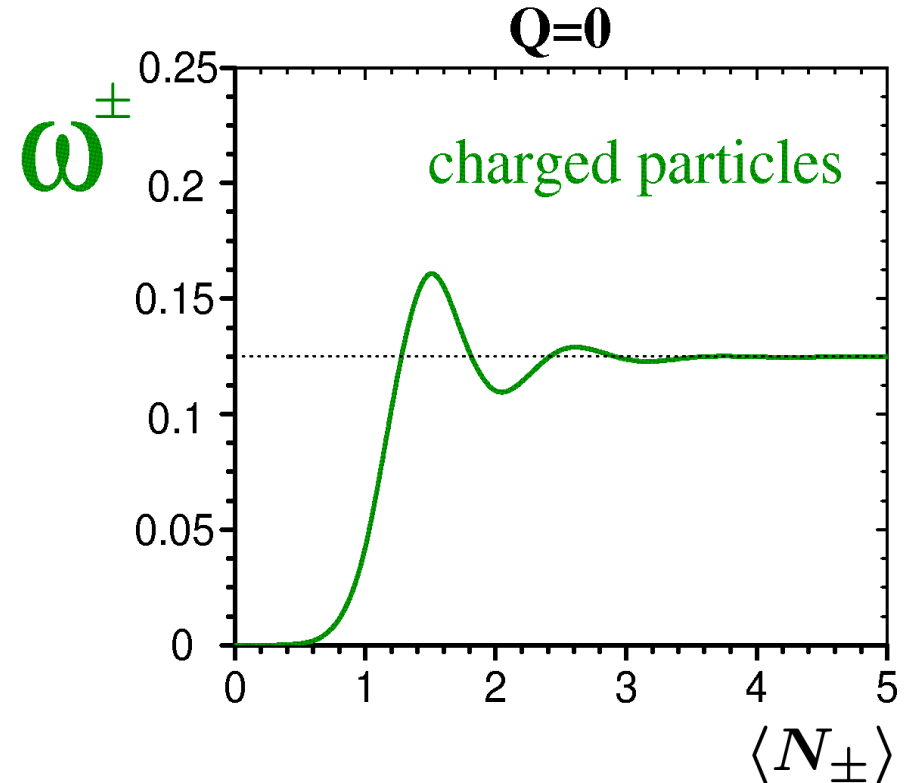
# Fluktuacje w MCE ( $m=0, Q=0$ )

$$Z_N(E, V) = \frac{1}{N!} \left( \frac{gV}{2\pi^2} \right)^N \int_0^\infty p_1^2 dp_1 \dots \int_0^\infty p_N^2 dp_N \delta \left[ E - \sum_{j=1}^N p_j \right]$$

$$= \frac{1}{N!} \left( \frac{gV}{\pi^2} \right)^N \frac{E^{3N-1}}{(3N-1)!}$$



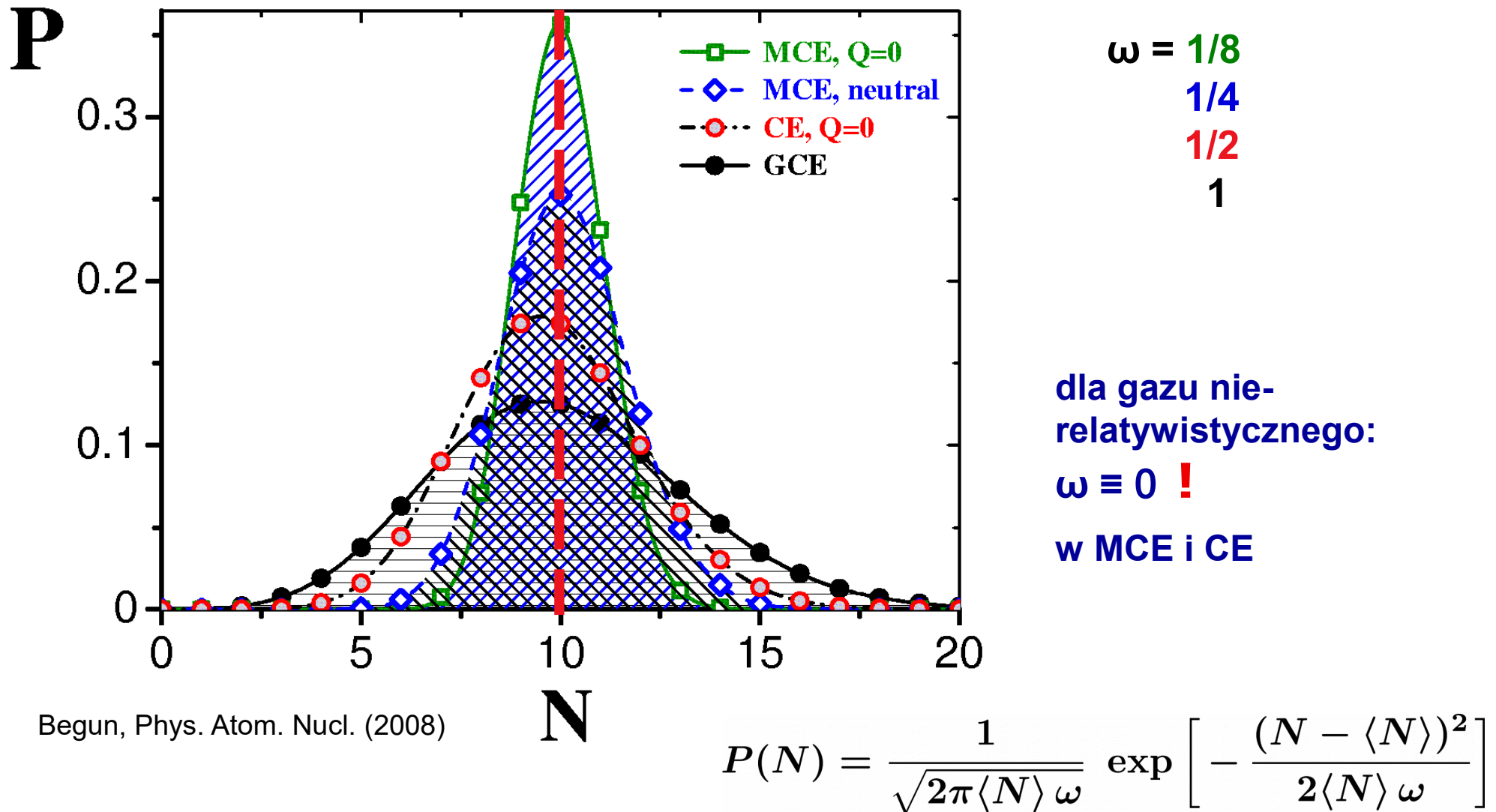
$$\omega_{MCE} \simeq \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{8\langle N \rangle} + \dots \right),$$



$$\omega_{MCE}^\pm \simeq \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{49}{1152\langle N_\pm \rangle^2} + \dots \right)$$

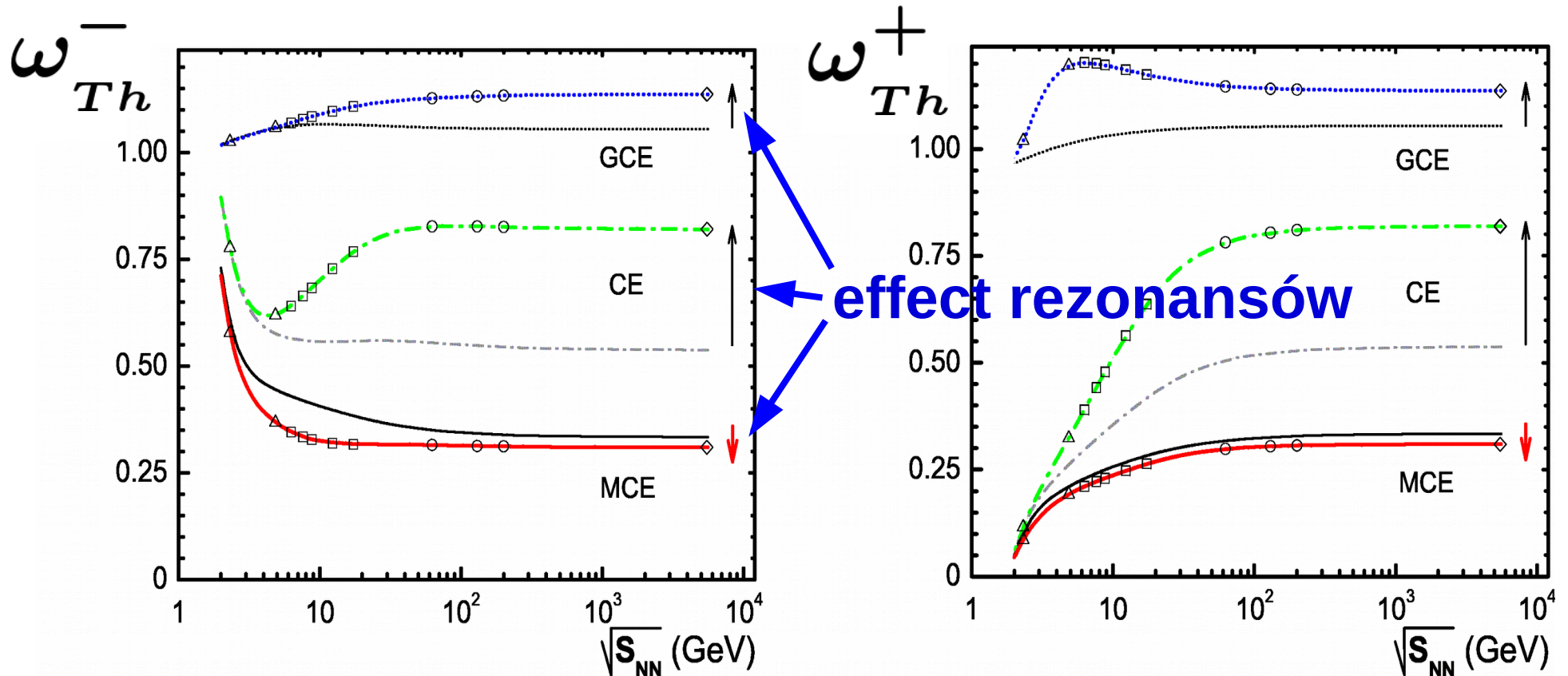
**Fluktuacje są jeszcze bardziej tłumione w MCE**

# Rozkłady prawdopodobieństwa



- Już dla 10 cząstek **wszystkie** zespoły **tworzą** rozkład **Gaussa**, **ale o różnej szerokości**

# Przewidywanie fluktuacji w modelu gazu hadronowego



$$\omega_{Th}^{\pm} = \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle}$$

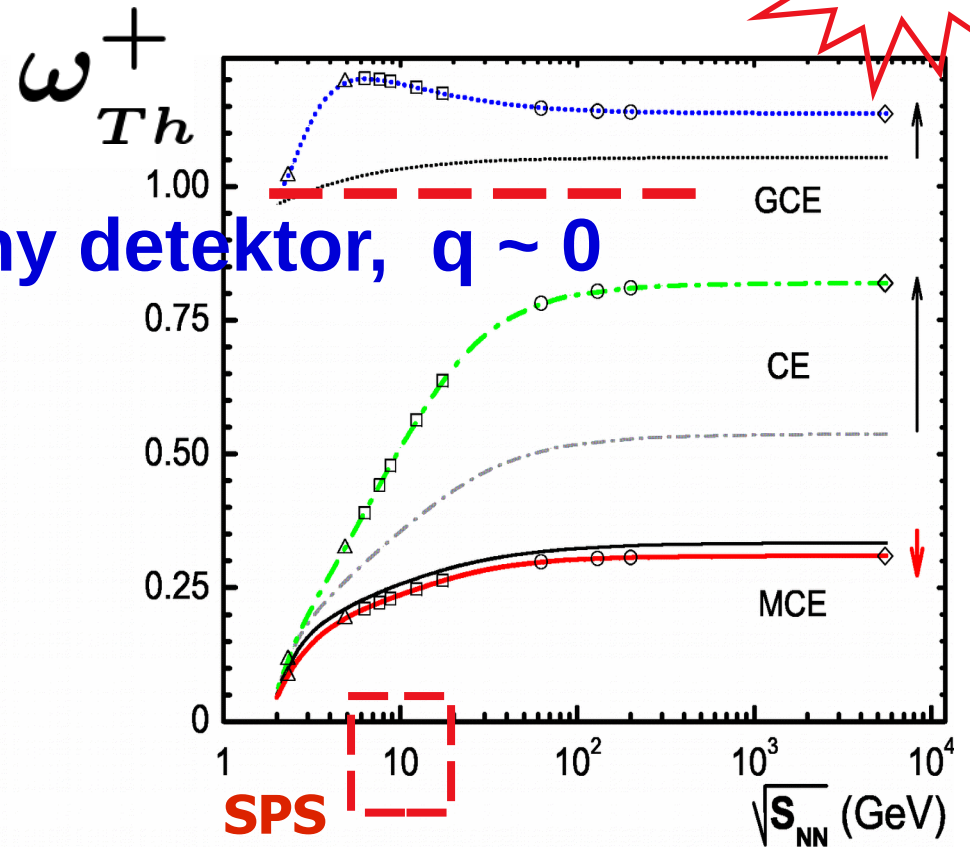
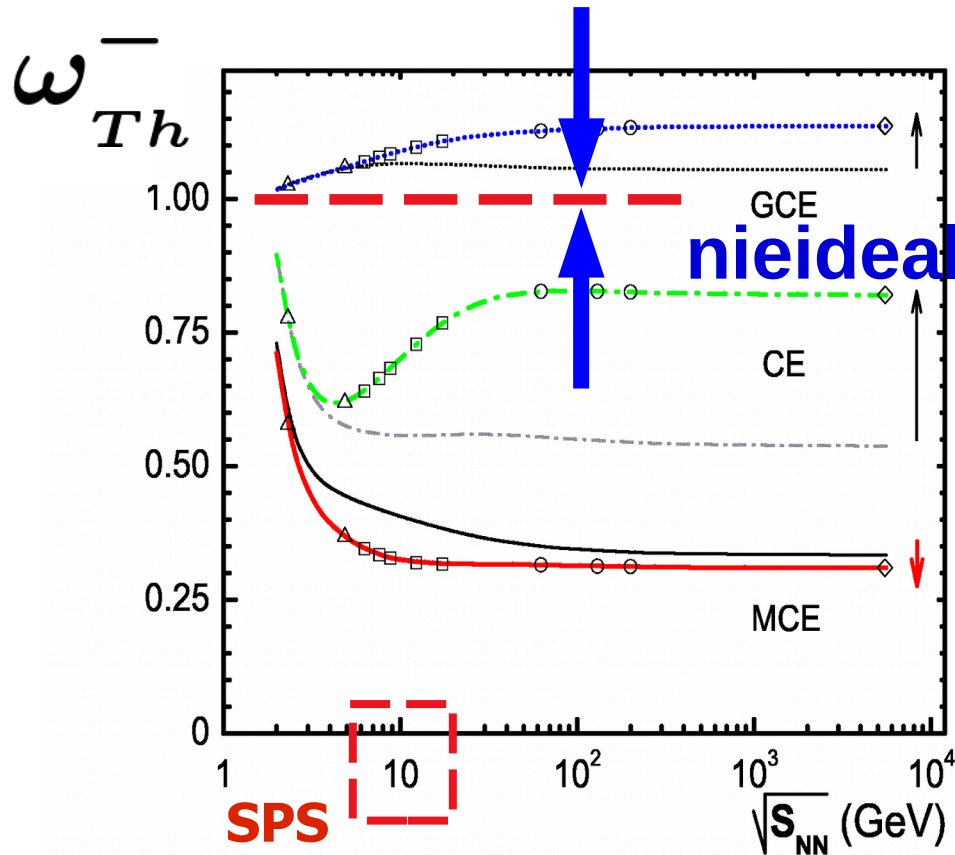
Teoretycznie obliczona normowana wariancja

Begun, Gazdzicki, Gorenstein, Hauer, Konchakovski, Lungwitz, Phys. Rev. C (2006)

- **Rozpady rezonansów** powodują **niemonotoniczne zmiany** fluktuacji **z energią**
- W **GCE** i **CE** **zwiększają** fluktuacje, a w **MCE** – **zmniejszają!**

# Przewidywanie fluktuacji w modelu gazu hadronowego

< 1 ?!



nieidealny detektor,  $q \sim 0$

$$\omega_{Th}^{\pm} = \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle}$$

teoretycznie obliczona

$$\omega_{Exp}^{\pm} = 1 + q (\omega_{Th}^{\pm} - 1)$$

eksperymentalnie zmierzona

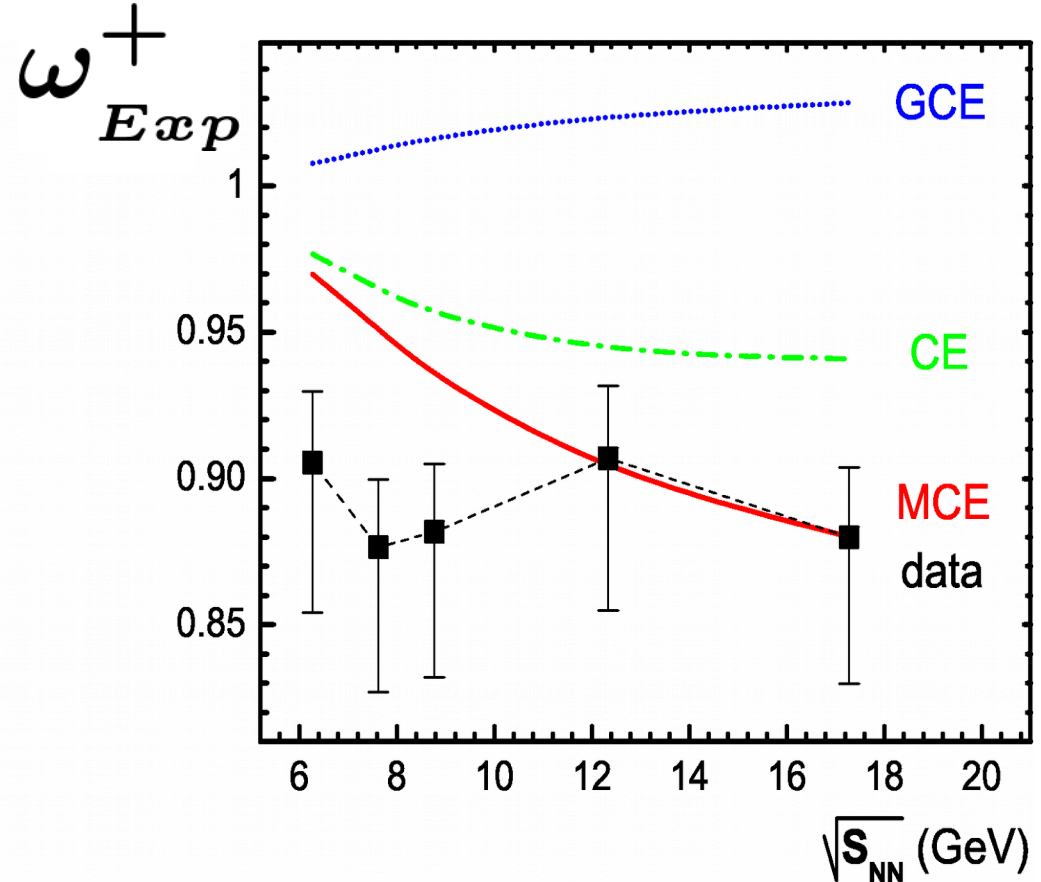
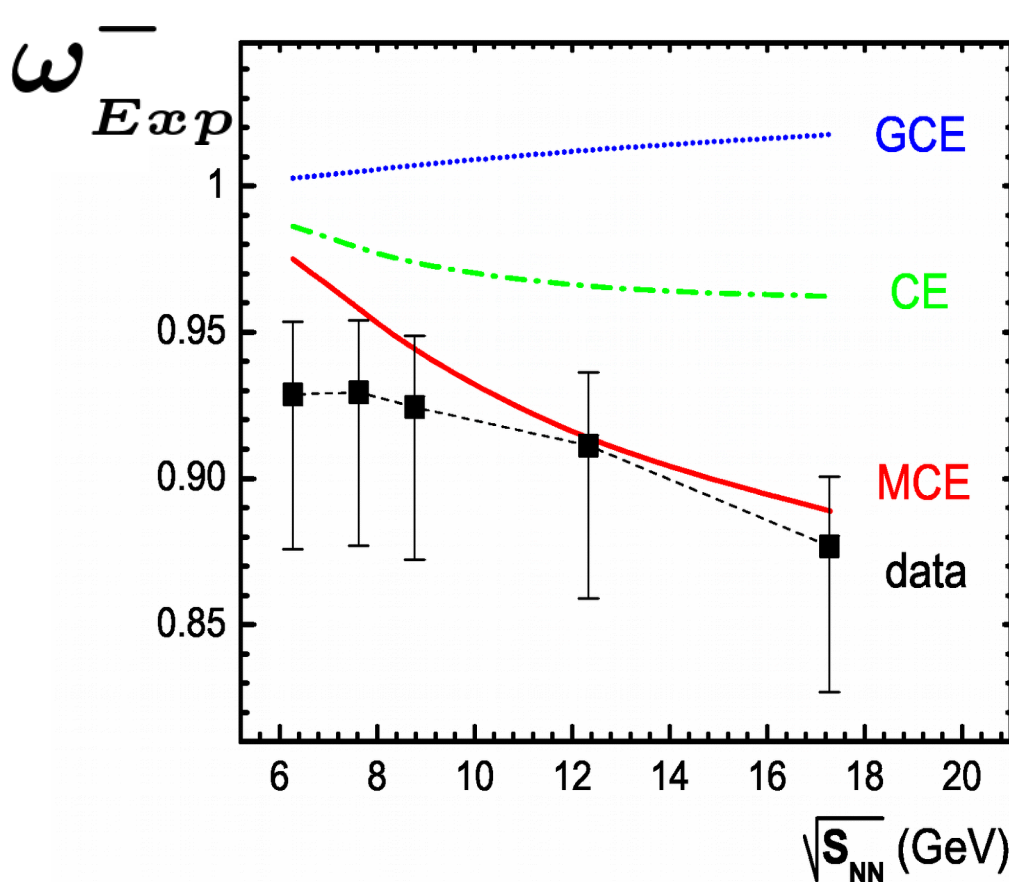
prawdopodobieństwo trafienia do detektora

$$0 < q < 1$$

Begun, Gazdzicki, Gorenstein, Hauer, Konchakovski, Lungwitz, Phys. Rev. C (2006)

# **Eksperyment**

# Porównanie HRG z danymi NA49

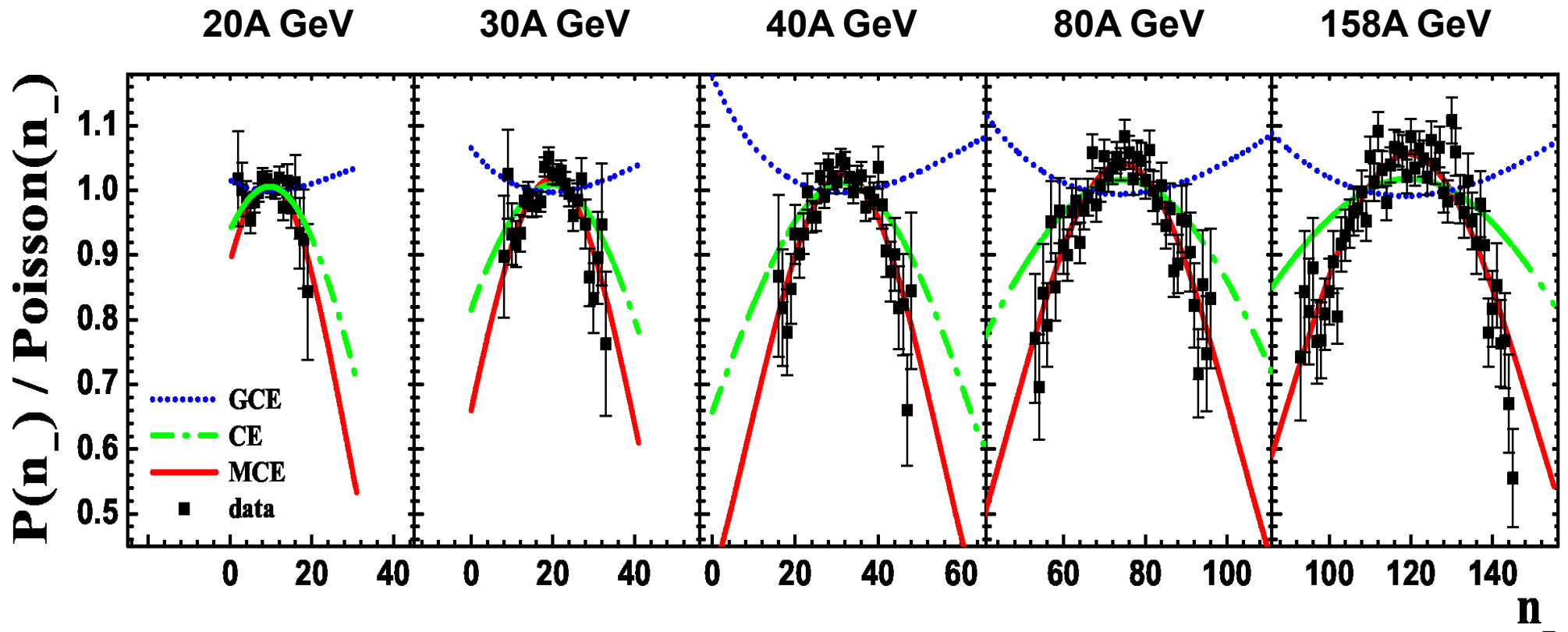


$$\omega_{Exp}^{\pm} = 1 + q (\omega_{Th}^{\pm} - 1) \quad q = 0.038, 0.063, 0.085, 0.131, 0.163$$

- **Eksperyment faworyzuje MCE** i wskazuje na jeszcze **mniejsze fluktuacje**
- **Badania fluktuacji wymagają bardziej precyzyjnego detektora**

# Eksperymentalnie zmierzony rozkład, podzielony na rozkład Poissona

NA49, Pb+Pb, < 1% of most central events



- W eksperymencie CE i MCE mają wypukły kształt, a GCE – wklęsły
- Rozkłady prawdopodobieństwa faworyzują nawet bardziej MCE

**Wyższe momenty w CE, MCE?**

**...**

**jeszcze nie policzone!**



# Podsumowanie

- **Kształt rozkładu** prawdopodobieństwa jest **wyznaczony przez 4** pierwsze momenty – **średnią, wariancję, skośność i kurtozę**
- Dobrze wiadoma **ekwiwalentność zespołów statystycznych** **nie** rozszerza się na **fluktuacje**
- **Rozpady rezonansów** powodują **niemonotoniczne zmiany** fluktuacji z energią
- **Badania fluktuacji** wymagają precyzyjnego **detektora**

**Dziękuję za uwagę!**