

Komputerowa Analiza Danych Doświadczalnych

Prowadząca:
dr inż. Hanna Zbroszczyk

e-mail: gos@if.pw.edu.pl

tel: +48 22 234 58 51

konsultacje: poniedziałek: 10-11, środa: 11-12

www: <http://www.if.pw.edu.pl/~gos/students/kadd>

Politechnika Warszawska
Wydział Fizyki
Pok. 117b (wejście przez 115)

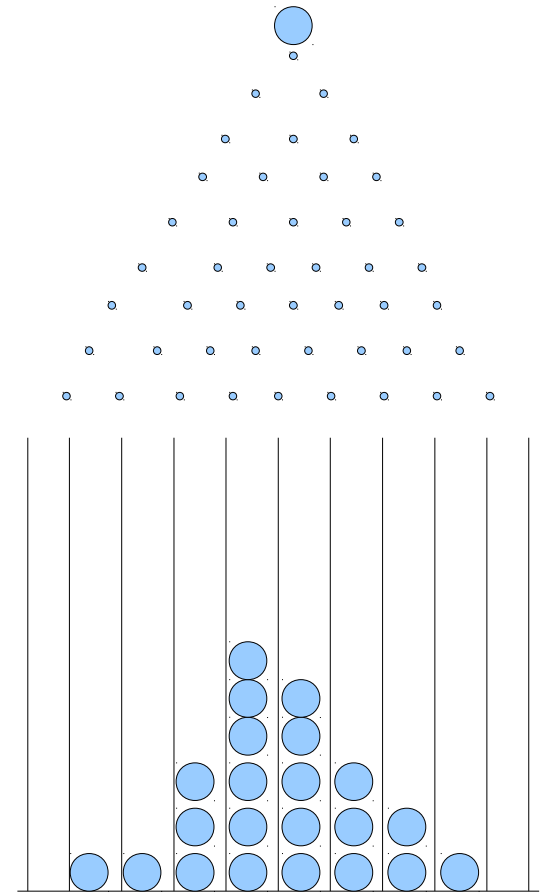
ROZKŁADY STATYSTYCZNE

Rozkład dwumianowy – Bernoulliego (schemat Bernoulliego)

- powtarzane n razy doświadczenie A (w tych samych warunkach),
- możliwe są do uzyskania 2 wyniki.
- prawdopodobieństwo wyniku pierwszego – p
- prawdopodobieństwo wyniku drugiego – $q = 1-p$
- $p+q = 1$
- podczas n prób, k razy uzyskany został wynik pierwszy
- $n-k$ – ilość prób z wynikiem drugim

Przykład: Tablica Galtona

- n rzędów kołeczków,
- kuleczka może przesunąć się w lewo
(z prawdopodobieństwem $p = 0.5$) lub
-w prawo ($q=0.5$).
- przestrzeń zdarzeń elementarnych to $E = L + P$.
- tablica nachylona → prawdopodobieństwo przemieszczenia się kuleczki w lewo i w prawo są różne, ale $p + q = 1$.



Rozkład dwumianowy – Bernoulliego (schemat Bernoulliego)

- kuleczka przesunie się k razy w lewo oraz $n-k$ w prawo.
- zdarzenia są niezależne,
- prawdopodobieństwo: $p_n(k) \sim p^k q^{n-k}$
- przesunięcia mogą zachodzić w różnych konfiguracjach.
- 1 możliwość przesunięcia się n razy w lewo (lub w prawo)
- podobna ilość przesunięć w lewo i prawo – bardziej prawdopodobna
- liczba konfiguracji: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$
- prawdopodobieństwo: $p_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$
- zmienna losowa x ma rozkład dwumianowy,
- jeśli $x = \{0, 1, 2, \dots, n\}$; $n \geq 1$
- prawdopodobieństwo (powyżej):
- $0 < p < 1$
- $k = 0, 1, 2, \dots, n$

Rozkład dwumianowy – Bernoulliego (schemat Bernoulliego)

- prawdopodobieństwo: $p_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$

- k sukcesów w n niezależnych próbach (w identycznych warunkach)

- p – prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie

- q = 1-p – prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie

- wartość oczekiwana w pojedynczej próbie:

$$E(x_i) = 1 p + 0 q = p$$

- wariancja w pojedynczej próbie:

$$\text{var}(x_i) = E\{(x_i - p)^2\} = (1 - p)^2 p + (0 - p)^2 q = pq$$

-wartość oczekiwana:

$$E(x) = np$$

-wariancja:

$$\text{var}(x) = npq$$

-odchylenie standardowe:

$$\sigma(x) = \sqrt{\text{var}(x)} = \sqrt{npq}$$

Przykłady z życia codziennego rozkładu dwumianowego

$$p_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

- 1) n - Ilość osób na 3 roku
p – prawdopodobieństwo zaliczenia KADD
k – ilość osób, które zaliczyły

- 2) n – liczba urodzonych dzieci w 2014 roku
p – prawdopodobieństwo, że urodzi się dziewczynka (p = 1/2)
k – ilość urodzonych dziewczynek

- 3) n- krotny rzut monetą
p- prawdopodobieństwo wyrzucenia orła (p = 1/2)
k – ilość wyrzuconych orłów

- 4) ...

Rozkład wielomianowy

- do uzyskania **z** możliwych wyników,
- każdy o prawdopodobieństwie wystąpienia **p**.
- przestrzeń zdarzeń elementarnych: $E = A_1 + A_2 + \dots + A_z$

$$P(A_1) = p_1$$

$$P(A_2) = p_2$$

...

$$P(A_z) = p_z$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_z = 1 \quad \sum_{i=1}^z p_i = 1$$

$$p_n(k) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^z (k_i)!} \prod_{i=1}^z p_i^{k_i} \quad \sum_{i=1}^z k_i = n$$

$Z = 2 \rightarrow$ rozkład dwumianowy.

Rozkład Poissona

- rozkład dwumianowy:

$$p_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

- przy założeniu, że $n \rightarrow \infty$ oraz $p \rightarrow 0$ iloczyn np ma być stały i wynosić $\lambda = np$

$$W_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$W_k^n = \frac{\lambda^k}{k! n^k} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$W_k^n = \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_k^n = f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Rozkład Poissona

$$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- unormowanie: $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots \right) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

- wartość oczekiwana:

$$\begin{aligned} E(k) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \lambda^{k-1} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

$$E(k) = \lambda$$

Rozkład Poissona

$$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad E(k) = \lambda$$

-wariancja: $var(k) = E(k^2) - (E(k))^2$

$$E(k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$$

$$E(k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$$

$$E(k^2) = \lambda \left(\sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} + 1 \right)$$

$$E(k^2) = \lambda(\lambda + 1)$$

$$var(k) = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda$$

- odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{var(k)} = \sqrt{\lambda}$

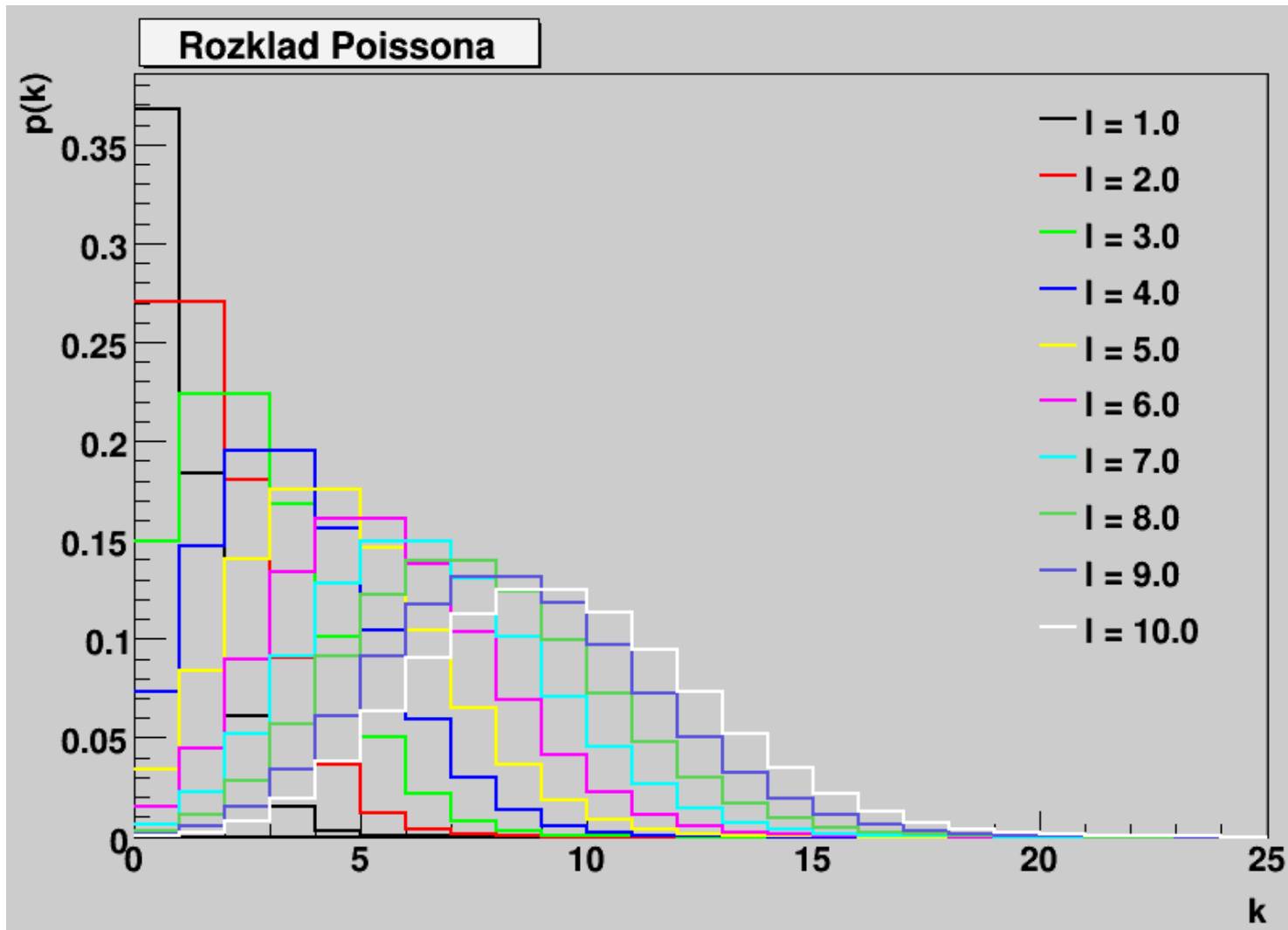
Rozkład Poissona

$$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad E(k) = \lambda \quad \text{var}(k) = \lambda \quad \sigma = \sqrt{\lambda}$$

-skośność: $\mu_3 = E\{(k - \hat{k})^3\} = \lambda$

-współczynnik asymetrii:

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\lambda}{\lambda^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$



Rozkład jednostajny

- gęstość prawdopodobieństwa:

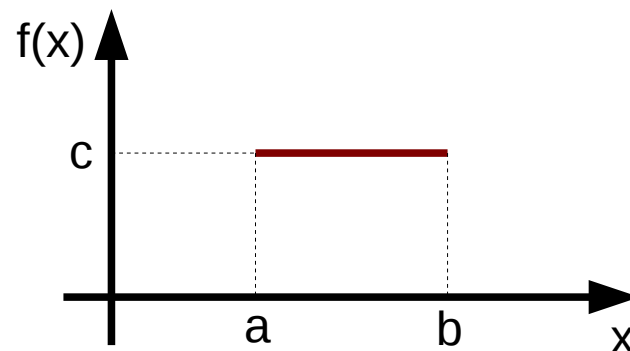
$$f(x) = c; x \in (a, b)$$

$$f(x) = 0; x \notin (a, b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c \int_a^b dx = c(b-a) = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}; x \in (a, b)$$

$$f(x) = 0; x \notin (a, b)$$

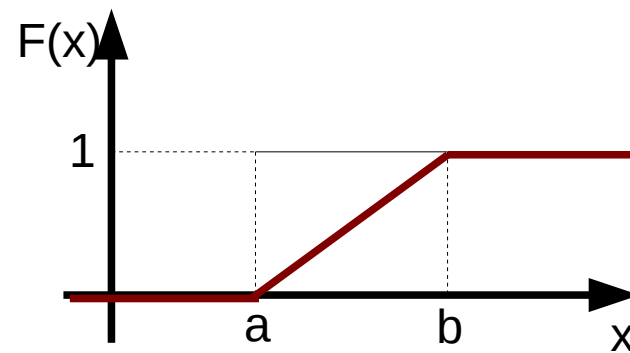


- dystrybuanta:

$$F(x) = 0; x \leq a$$

$$F(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^x dx = \frac{x-a}{b-a}; x \in (a, b)$$

$$F(x) = 1; x \geq b$$



- wartość oczekiwana:

$$E(x) = \hat{x} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{2} \frac{1}{b-a} (b^2 - a^2) = \frac{b+a}{2}$$

- wariancja:

$$\sigma^2(x) = \int_a^b (x - \hat{x})^2 f(x) dx = \int_a^b (x - \frac{b+a}{2})^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x - \frac{b+a}{2})^2 dx$$

$$\sigma^2(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Rozkład wykładniczy

- gęstość prawdopodobieństwa: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}; x \geq 0; \lambda > 0$

$$f(x) = 0; x < 0$$

- dystrybuanta: $F(x) = 0; x < 0$

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x'} dx' = \left[\frac{-\lambda}{\lambda} e^{-\lambda x'} \right]_0^x$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}; x \geq 0$$

- wartość oczekiwana:

$$E(x) = \hat{x} = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x dx = \frac{1}{\lambda}$$

- wariancja:

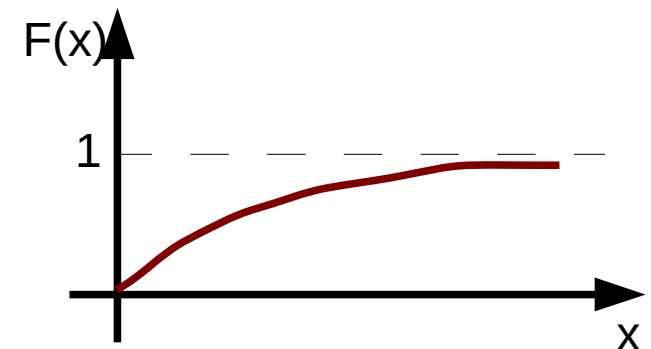
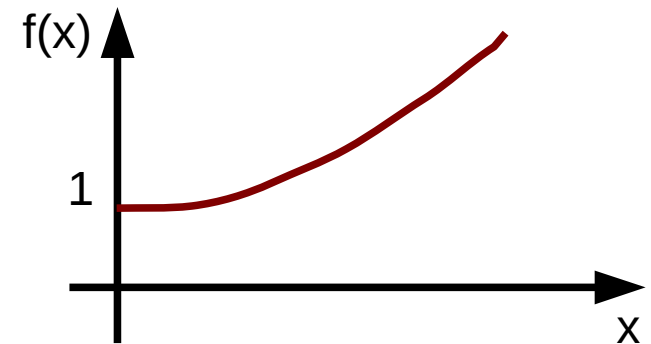
$$\sigma^2(x) = \int_0^{\infty} (x - \hat{x})^2 f(x) dx$$

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

- odchylenie standardowe: $\sigma(x) = \sqrt{(\sigma^2(x))} = \frac{1}{\lambda}$



**FUNKCJA
CHARAKTERYSTYCZNA**

Funkcja charakterystyczna rozkładu

$$z = x + i y$$

- wartość oczekiwana:

$$E(z) = E(x) + i E(y)$$

- zespolone zmienne losowe są niezależne, kiedy części rzeczywiste i urojone są niezależne.

- dystrybuanta i gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej rzeczywistej:

$$F(x) = P(x < x) \quad f(x)$$

- funkcja charakterystyczna to wartość oczekiwana wyrażenia $\exp(itx)$

- dla zmiennej ciągłej :
$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) f(x) dx$$

(transformata Fouriera gęstości prawdopodobieństwa)

- dla zmiennej skokowej:
$$\varphi(t) = \sum_i \exp(itx_i) P(x = x_i)$$

Funkcja charakterystyczna rozkładu

- momenty zmiennej losowej x względem początku układu:

$$\lambda_n = E(x^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

- λ_n można uzyskać poprzez n -krotne różniczkowanie funkcji charakterystycznej w punkcie $t=0$

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} = i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp(itx) f(x) dx$$
$$\varphi^{(n)}(0) = i^n \lambda_n$$

- przy przesunięciu układu współrzędnych (początek znajduje się w):

\hat{x}

$$y = x - \hat{x}$$

$$\varphi_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{it(x - \hat{x})\} f(x) dx = \varphi(t) \exp(it\hat{x})$$

- n -ta pochodna to n -ty moment zmiennej x względem wartości oczekiwanej:

$$\varphi_y^{(n)}(t) = i^n \mu_n = i^n E\{(x - \hat{x})^n\}$$

$$\sigma^2(x) = -\varphi_y''(0)$$

Funkcja charakterystyczna rozkładu

-odwracając transformatę Fouriera z funkcji charakterystycznej mamy gęstość prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx) \varphi(t) dt$$

- dystrybuanta wyznaczona jednoznacznie poprzez swoją funkcję charakterystyczną:

$$F(b) - F(a) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(itb) - \exp(ita)}{t} \varphi(t) dt$$

- suma 2 niezależnych zmiennych losowych $w = x+y$

- funkcja charakterystyczna:

$$\varphi_w(e) = E \{ \exp[it(x+y)] \} = E \{ \exp(itx) \exp(ity) \}$$

$$\varphi_w(e) = E \{ \exp(itx) \exp(ity) \} = \varphi_x(t) \varphi_y(t)$$

Funkcja charakterystyczna rozkładu sumy dwóch zmiennych niezależnych zmiennych losowych jest równa iloczynowi ich funkcji charakterystycznych.

Funkcja charakterystyczna rozkładu

- suma dwóch zmiennych mających rozkład Poissona:

- funkcja charakterystyczna dla rozkładu Poissona:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(itk) \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$$

$$\varphi(t) = \exp(-\lambda) \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda \exp(it)^k}{k!}$$

$$\varphi(t) = \exp(-\lambda) \exp(\lambda e^{it}) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$$

- funkcja charakterystyczna dla sumy dwóch niezależnych rozkładów Poissona:

$$\varphi_{P_1+P_2}(t) = \exp\{\lambda_1(e^{it} - 1)\} \exp\{\lambda_2(e^{it} - 1)\}$$

$$\varphi_{P_1+P_2}(t) = \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^{it} - 1)\}$$

- rozkład dwóch niezależnych rozkładów Poissona jest rozkładem Poissona,

jego wartość średnia to suma wartości średnich dla poszczególnych rozkładów.

ROZKŁAD NORMALNY

Rozkład normalny - standardowy

- gęstość prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Ponieważ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ jest unormowana.

Wartość oczekiwana (funkcja $f(x)$ jest nieparzysta), więc

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2} dx = 0$$

-wariancja: $var(x) = \sigma^2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx$

$$var(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[-x e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right\} = 1$$

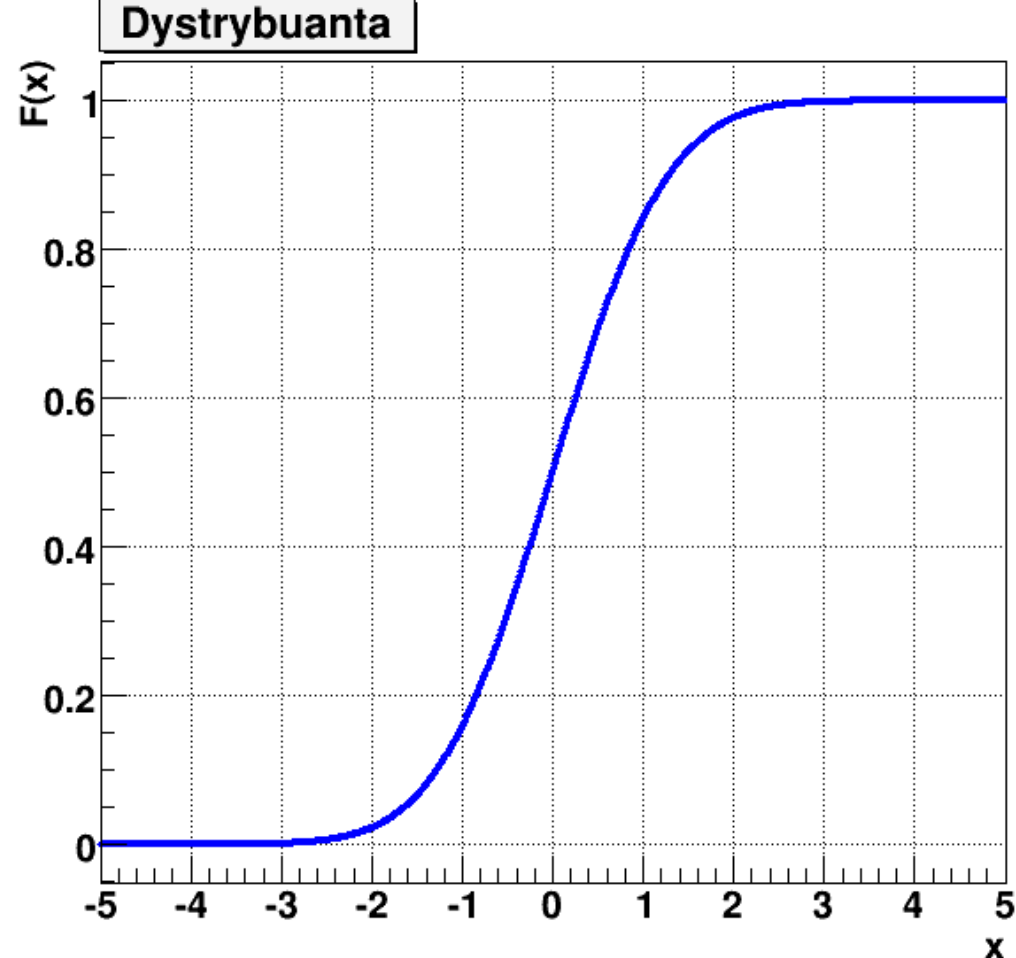
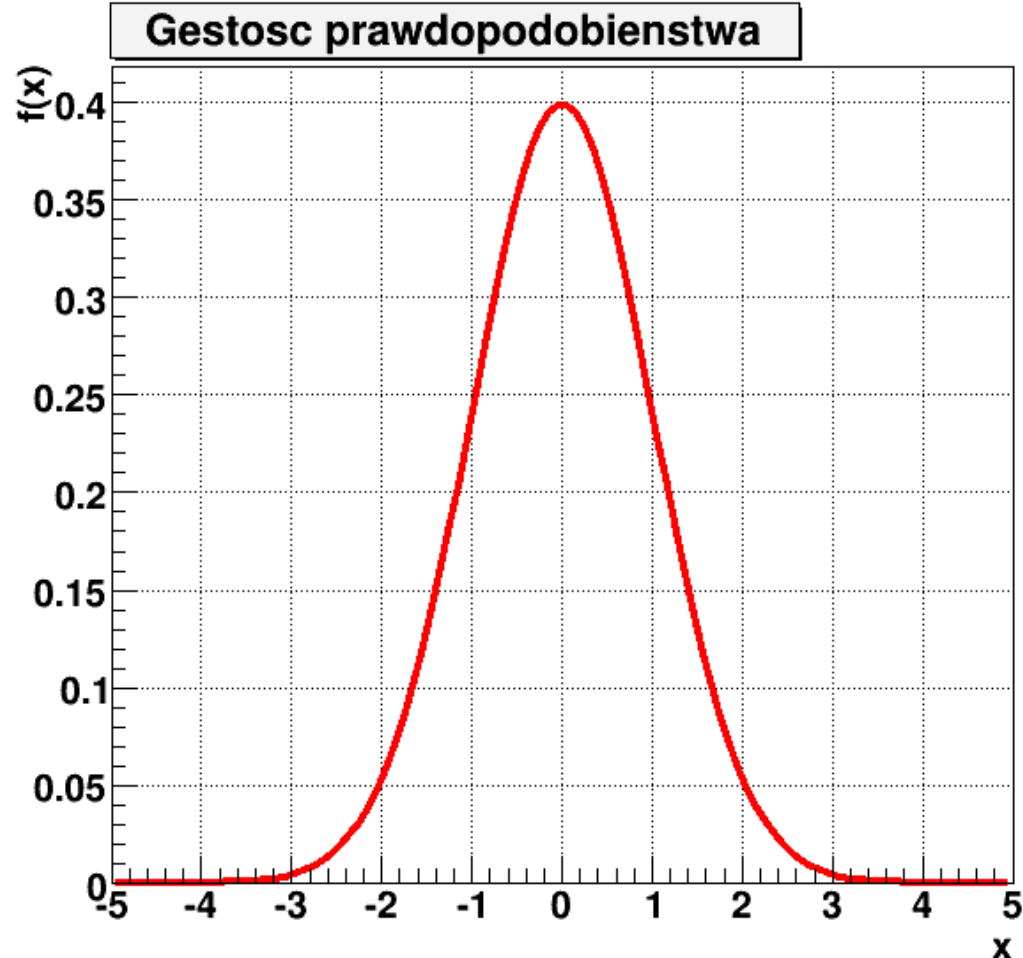
- odchylenie standardowe: $\sigma(x) = \sqrt{var(x)} = 1$

Rozkład normalny - standardowy

Dystrybuanta:

$$F(x) = \Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

Funkcji tej nie można zapisać w postaci analitycznej, jej wartości są stabelaryzowane.



Rozkład normalny - Gaussa

-gęstość prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right)$$

- wartość oczekiwana:

$$E(x) = a$$

- wariancja:

$$\text{var}(x) = b^2$$

- odchylenie standardowe:

$$\sigma^2(x) = b$$

- funkcja charakterystyczna:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right) dx$$

- można dowieść, że:

$$\varphi(t) = \exp(ita) \exp\left(-\frac{1}{2} b^2 t^2\right)$$

Rozkład normalny - Gaussa

$$\varphi(t) = \exp(ita) \exp\left(-\frac{1}{2} b^2 t^2\right)$$

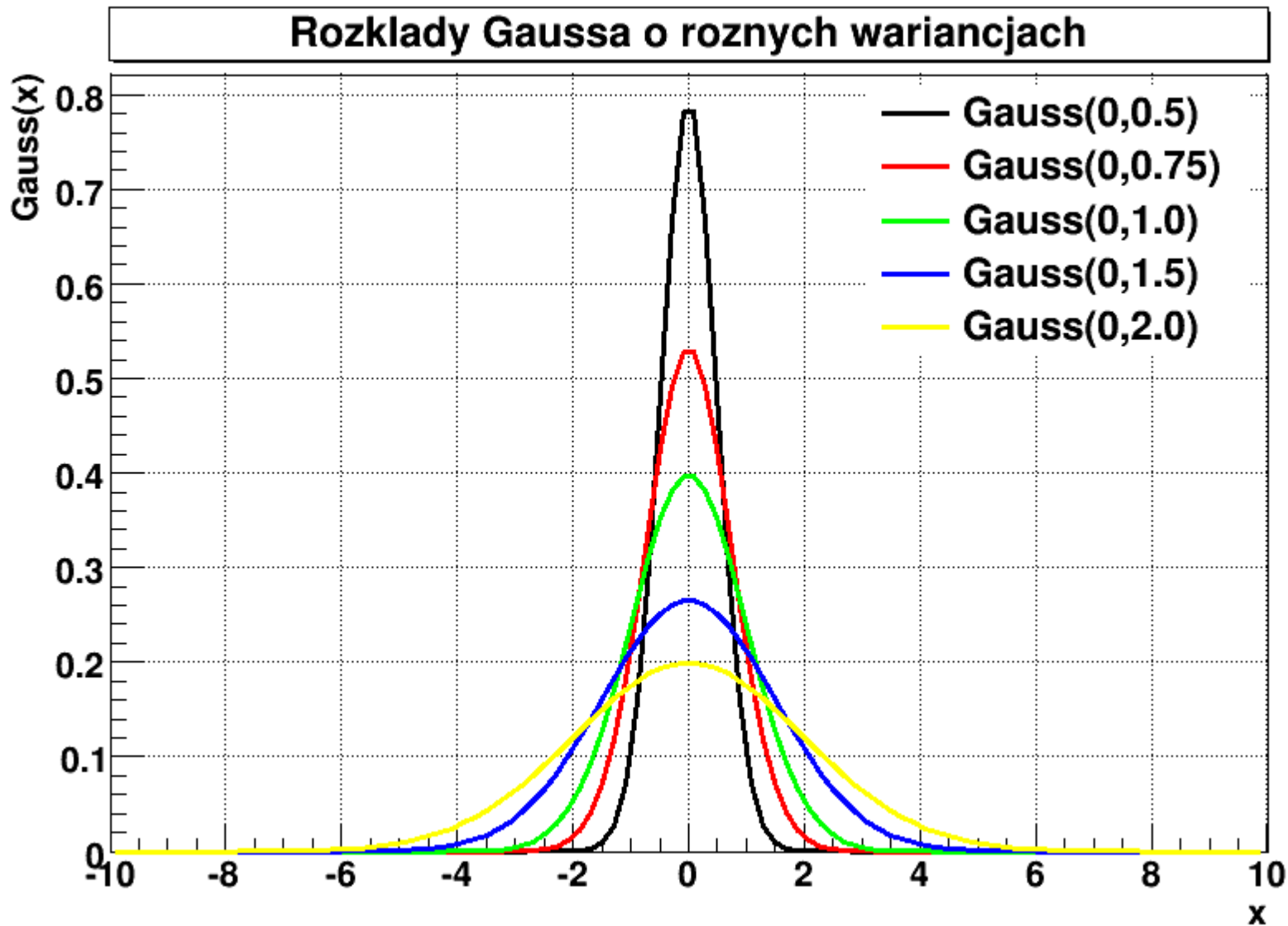
Kiedy $a = 0$

Twierdzenie:

Funkcja charakterystyczna rozkładu normalnego o wartości średniej równej zero ma postać (z dokładnością co do czynnika normalizacyjnego) gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego. Iloczyn wariancji obu rozkładów jest równy jedności.

Rozkład normalny - Gaussa

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp \frac{-(x-a)^2}{2b^2}$$



Własności rozkładu normalnego - standardowego

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp \frac{-(x-a)^2}{2b^2}$$

1) Rozkład normalny ma punkty przegięcia dla $x = a \pm b$

2) Dystrybuanta określa prawdopodobieństwo wystąpienia wartości zmiennej losowej x mniejszej niż x $\Psi(x) = P(x < x)$

3) Dla $a = 0$ oraz $b = 1$, ze względu na symetrię rozkładu gęstości prawdopodobieństwa:

$$P(|x| > x) = 2 \Psi_0(-|x|) = 2[1 - \Psi_0(|x|)]$$

4) .. a także: prawdopodobieństwo obserwacji zmiennej losowej x wewnątrz przedziału o szerokości $2x$, wokół wartości oczekiwanej równej 0 wynosi:

$$P(|x| < x) = 2 \Psi_0(-|x|) - 1$$

Wartości tych prawdopodobieństw są stabelaryzowane.

Własności rozkładu normalnego - standardowego

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp \frac{-(x-a)^2}{2b^2}$$

5) W przypadku rozkładu Gaussa, uogólniamy: $\psi(x) = \psi_0\left(\frac{x-a}{b}\right)$

6) Prawdopodobieństwo wystąpienia zmiennej losowej w granicach będących wielokrotnościami odchylenia standardowego

$$P(|x-a| \leq n\sigma) = 2\psi_0\left(\frac{nb}{b}\right) - 1 = 2\psi_0(n) - 1$$

a) $P(|x-a| \leq \sigma) = 68.3/100$ $P(|x-a| > \sigma) = 31.7/100$

b) $P(|x-a| \leq 2\sigma) = 95.4/100$ $P(|x-a| > 2\sigma) = 4.6/100$

c) $P(|x-a| \leq 3\sigma) = 99.8/100$ $P(|x-a| > 3\sigma) = 0.2/100$

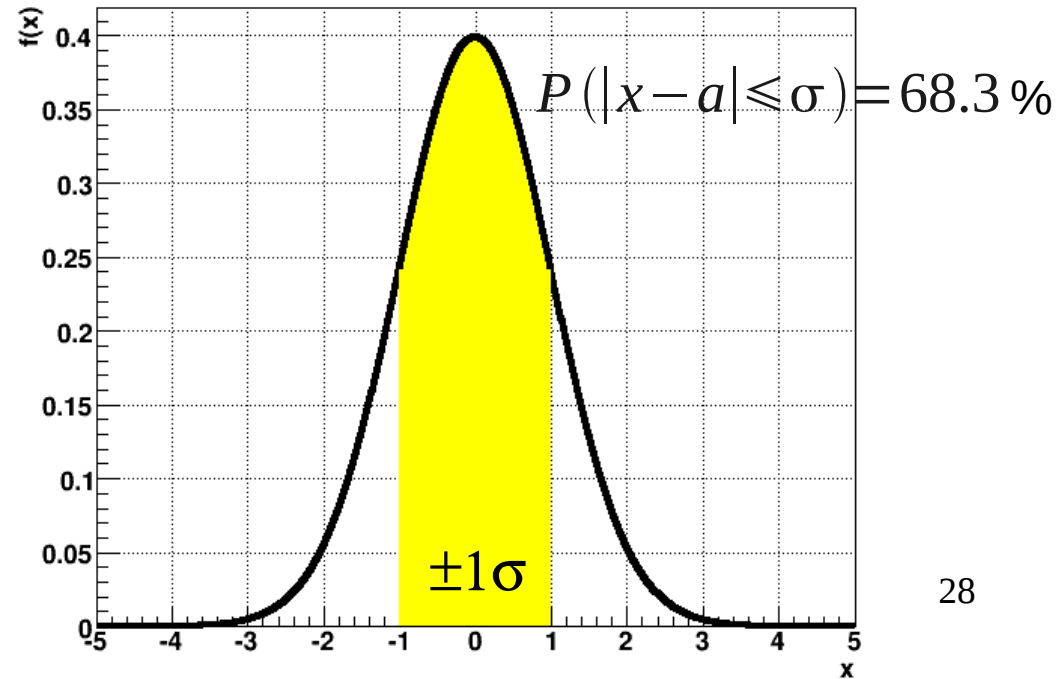
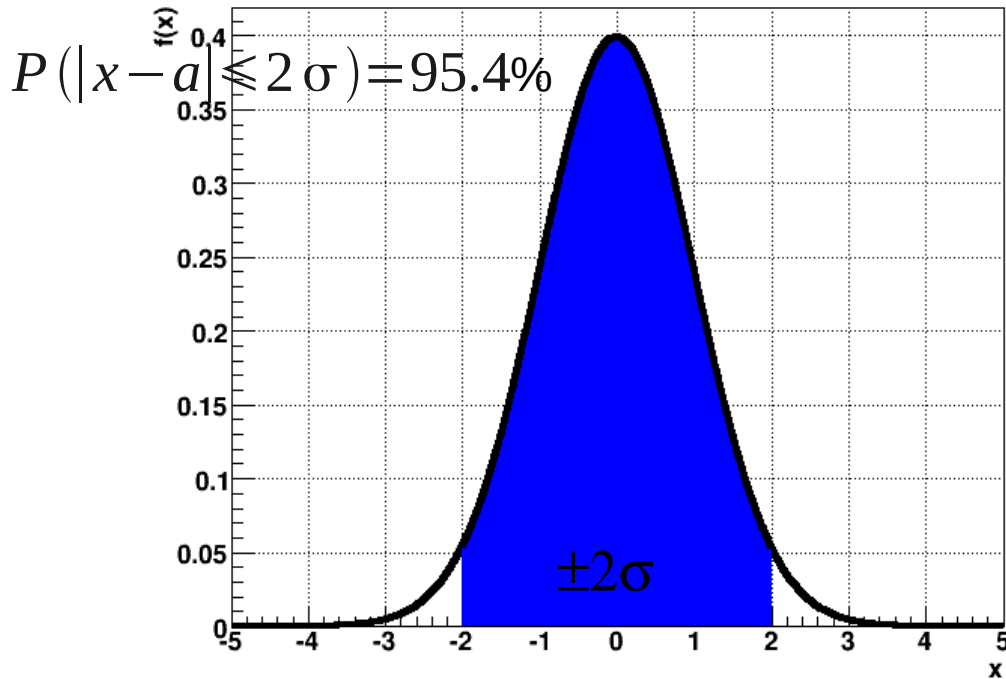
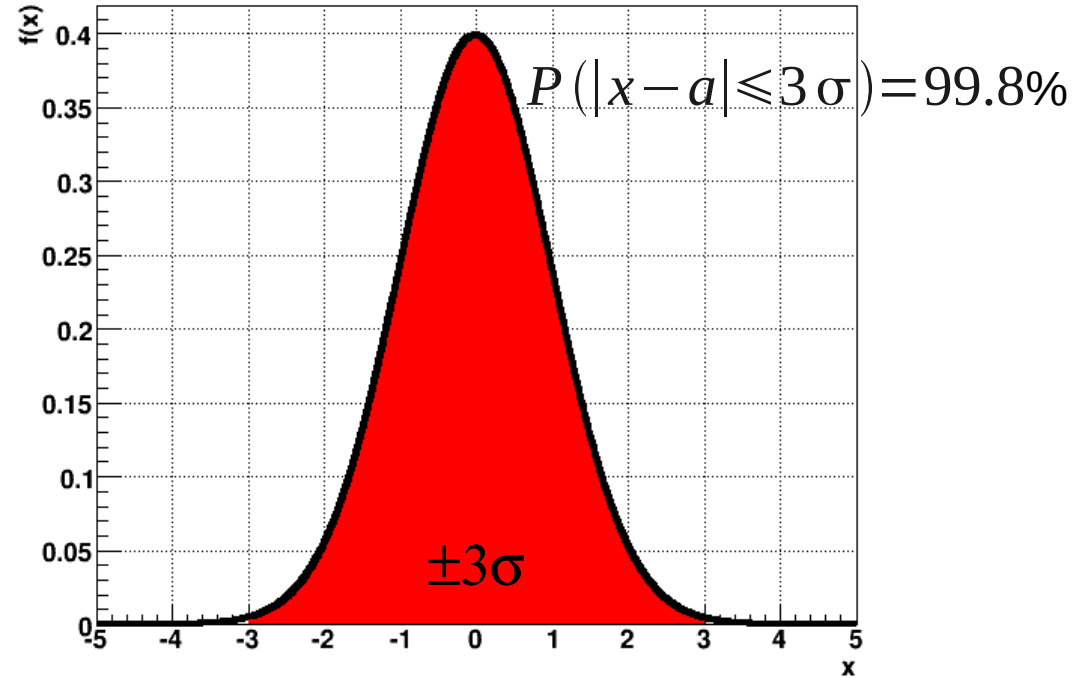
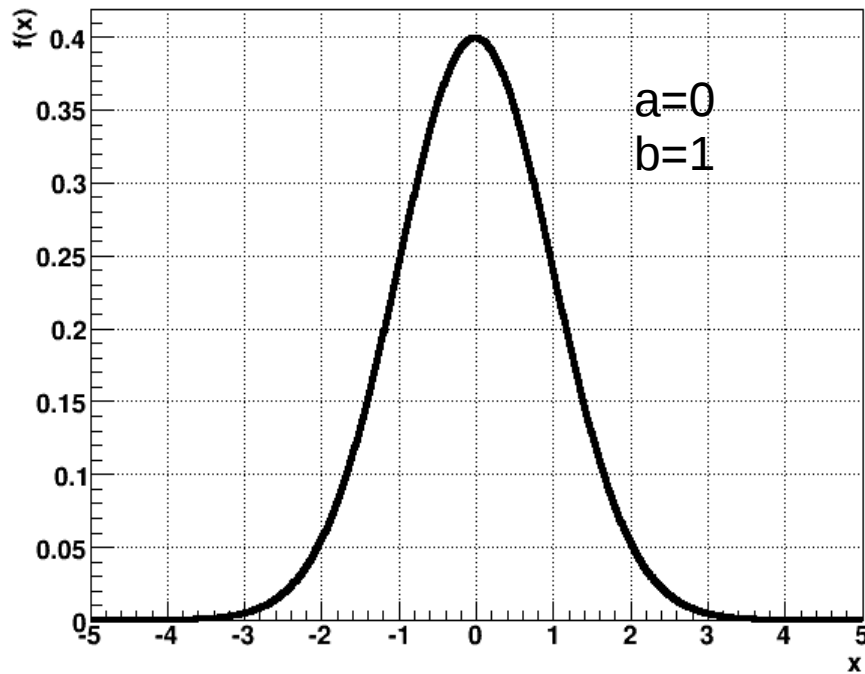
Własności rozkładu normalnego - standardowego

- Niepewności pomiarowe danej wielkości podlegają rozkładowi Gaussa wokół jej wartości prawdziwej a: prawdopodobieństwo uzyskania w wyniku pomiaru wartości z przedziału x oraz $x+dx$:

$$P(x \leq x < x + dx) = \phi(x) dx$$

- Dyspersja rozkładu $\phi(x)$ to odchylenie standardowe (lub niepewności standardowa).
- Jeśli znana jest niepewność standardowa przyrządu pomiarowego, to przeprowadzając pojedynczy pomiar, **prawdopodobieństwo uzyskania wyniku pomiaru w granicach 1 odchylenia standardowego od wartości prawdziwej: 68.3%**.
- Rozpatrywane jest często nie 1 lecz 3 odchylenia standardowe, co daje już prawdopodobieństwo 99.8%.
- Zawsze należy podkreślić, jeśli rozważane jest nie 1 odchylenie standardowe.

Własności rozkładu normalnego - standardowego



**CENTRALNE
TWIERDZENIE
GRANICZNE**

Centralne twierdzenie graniczne

Jeśli zmienne losowe x_i to zmienne niezależne o wartościach średnich a oraz wariancjach b^2 ,

to zmienna $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i$ ma rozkład normalny określony przez

$$E(x) = na \quad \sigma^2(x) = nb^2$$

Zmienna $y = \frac{1}{n} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Ma rozkład normalny z $E(y) = a \quad \sigma^2(y) = \frac{b^2}{n}$

Rozkład dwumianowy – przypomnienie

-prawdopodobieństwo: $p_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$

- k sukcesów w n niezależnych próbach (w identycznych warunkach)

- p – prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie

- q = 1-p – prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie

- wartość oczekiwana w pojedynczej próbie:

$$E(x_i) = 1p + 0q = 1p + 0(1-p) = p$$

- wariancja w pojedynczej próbie:

$$\text{var}(x_i) = E\{(x_i - p)^2\} = (1-p)^2 p + (0-p)^2 q = pq = p(1-p)$$

- wartość oczekiwana:

$$E(x) = np$$

- wariancja:

$$\text{var}(x) = npq = np(1-p)$$

- odchylenie standardowe:

$$\sigma(x) = \sqrt{\text{var}(x)} = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$$

Rozkład normalny jako przypadek graniczny rozkładu dwumianowego

Wprowadzamy zmienną: $x^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i$

Ma rozkład dwumianowy.

Wprowadzamy zmienną: $u^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \sum_{i=1}^n (x_i - np)$

$$P(x=k) = P\left(u^{(n)} = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Wraz ze zwiększaniem liczby zmiennych n sąsiednie wartości $u^{(n)}$ leżą coraz bliżej siebie.

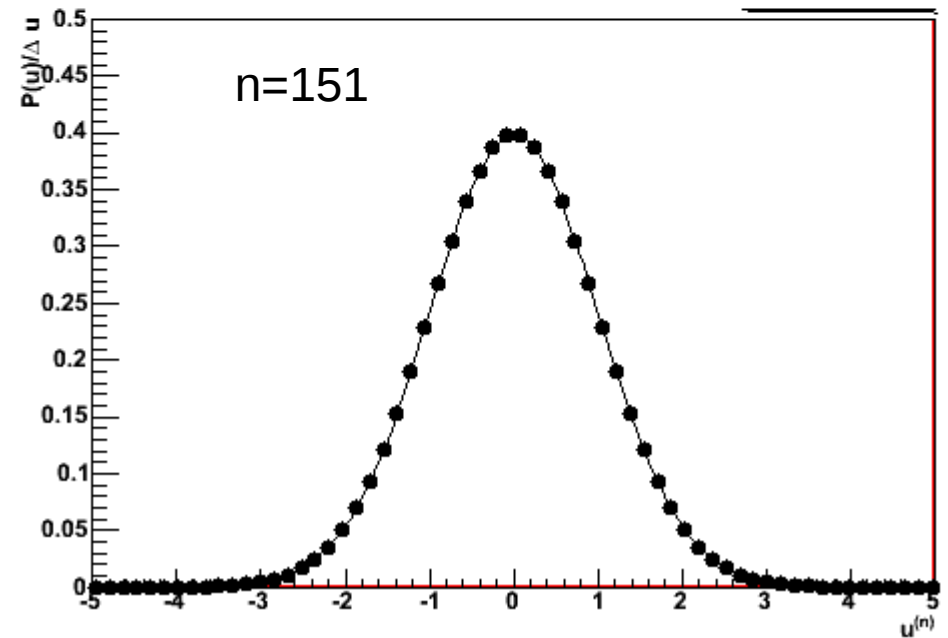
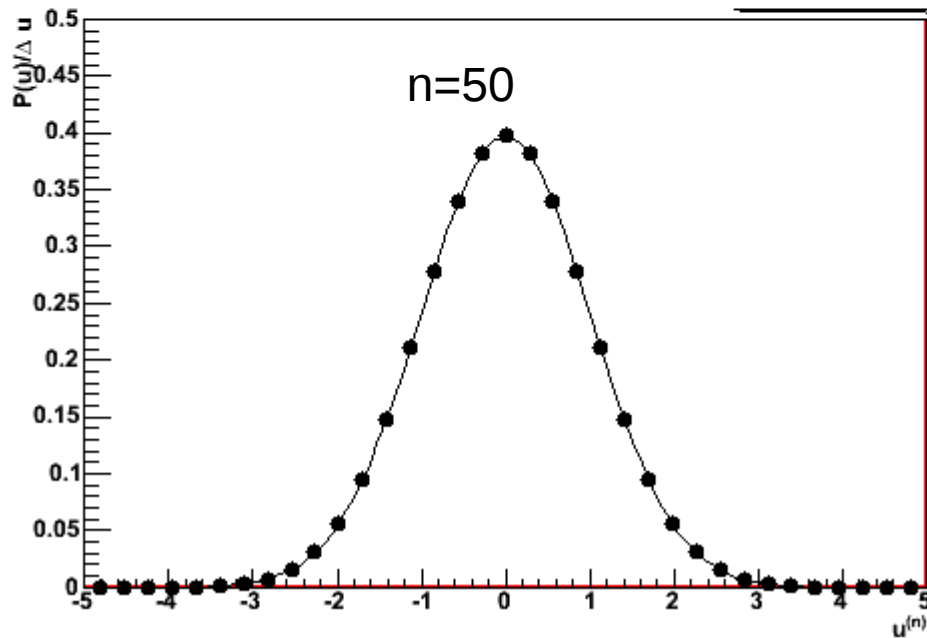
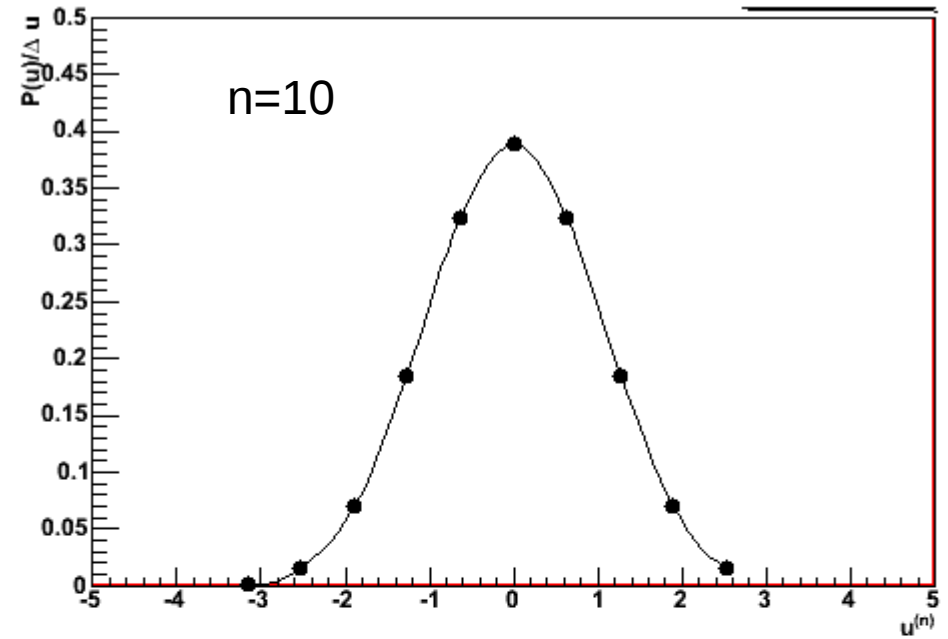
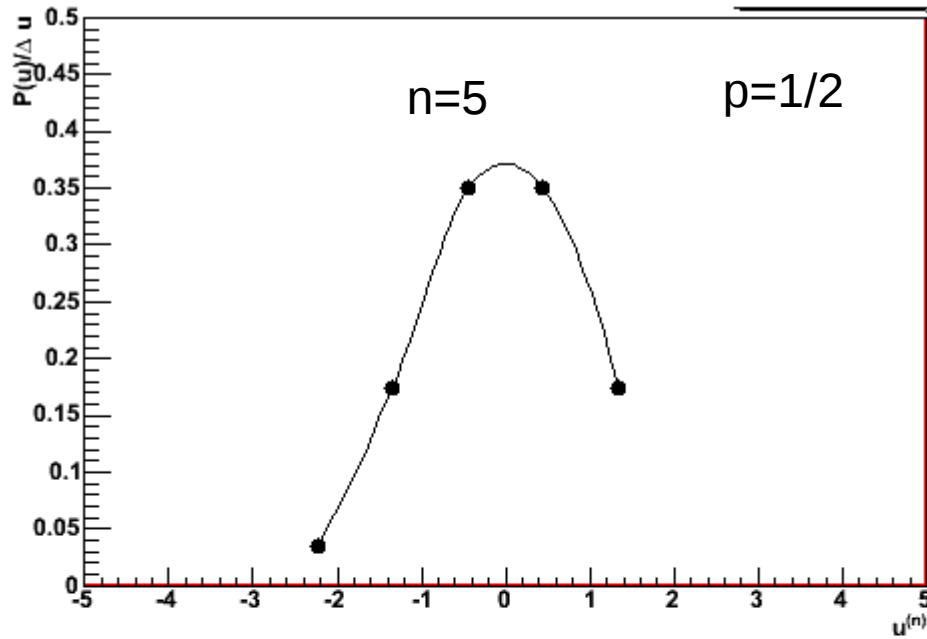
• $u^{(n)}$ to odległość między nimi,

w granicach dużych n rozkład zmiennej skokowej $P(u^{(n)}) / \Delta u^{(n)}$

jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej ciągłej.

Zgodnie z CTG to rozkład normalny.

Rozkład normalny jako przypadek graniczny rozkładu dwumianowego



MODEL LAPLACE'A

Model Laplace'a dla błędów pomiarowych

- Pochodzi z 1783 r.
- m_0 - prawdziwą wartością mierzonej wielkości.
- Pomiar zakłócany przez dużą liczbę n niezależnych czynników, każdy powoduje odchylenie mierzonej wielkości o ε .
- Równe prawdopodobieństwo zakłócenia pomiaru o wartość $+\varepsilon$, $-\varepsilon$.
- Całkowita niepewność pomiarowa to suma poszczególnych zakłóceń.
- Rozkład niepewności pomiarowych dany jest rozkładem dwumianowym.

Liczba zakłóceń	Odchylenie od wartości prawdziwej						
	-3ε	-2ε	$-\varepsilon$	0	ε	2ε	3ε
0				1			
1			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		
2		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	
3	$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$

Model Laplace'a dla błędów pomiarowych

- Brak zakłóceń - dostajemy pożądaną wartość m_0 .
- 1 zakłócenie - prawdopodobieństwo dzieli się po równo między $m_0 - \epsilon$, $m_0 + \epsilon$.
- Tak samo przy każdym następnym zakłóceniu.
- Prawdopodobieństwa prowadzące do tej samej wartości pomiarowej muszą być dodane.
- Wartości liczb w każdym wierszu są związane z rozkładem dwumianowym dla $p = q = 1/2$.

- Jeśli rozkład zostanie pomnożony przez $\frac{1}{p^k q^{n-k}} = 2^n$ to mamy trójkąt Pascala.

- Kiedy $p=1/2$ oraz $n \rightarrow \infty$, to $u^{(n)} = \frac{2 \left(\sum_{i=1}^n \epsilon x_i - n \frac{\epsilon}{2} \right)}{\sqrt{n} \epsilon}$

ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną równą zero oraz odchyleniem standardowym

$$\sqrt{n} \frac{\epsilon}{2}$$

Niepewności pomiarowe opisane rozkładem Gaussa są wynikiem wielu małych zakłóceń. 36

**KONIEC
WYKŁADU 5**