

Komputerowa Analiza Danych Doświadczalnych

Prowadząca:
dr inż. Hanna Zbroszczyk

e-mail: *gos@if.pw.edu.pl*

tel: +48 22 234 58 51

konsultacje: poniedziałek: 10-11, środa: 11-12

www: <http://www.if.pw.edu.pl/~gos/students/kadd>

Politechnika Warszawska
Wydział Fizyki
Pok. 117b (wejście przez 115)

ZAMIANA ZMIENNYCH

Zamiana zmiennych

- Dowolna funkcja zmiennej losowej to także zmienna losową $y = y(x)$

- Znana $f(x)$, szukana $g(y)$

- Równość prawdopodobieństw:

$$f(x) dx = g(y) dy$$

$$dy = \left| \frac{dy}{dx} \right| dx$$

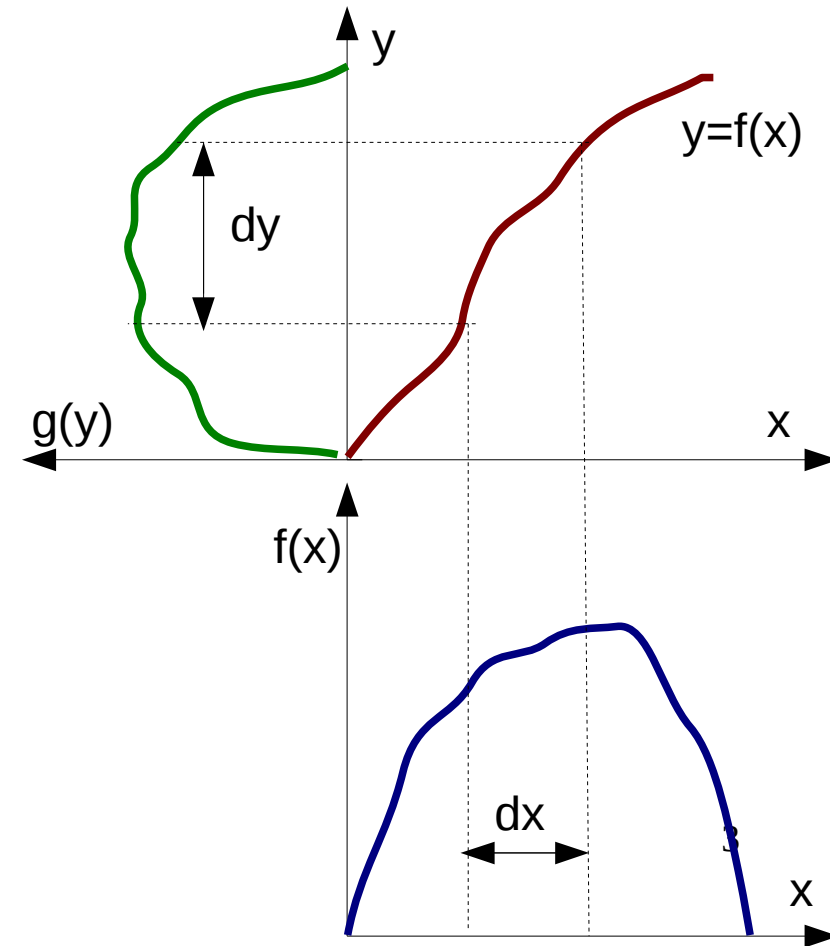
$$dx = \left| \frac{dx}{dy} \right| dy$$

- Funkcja $g(y)$ dobrze określona: $y = y(x)$ jednoznaczna.

- Funkcje wieloznaczne, np: $y = \sqrt{x}$ rozpatrujemy oddzielnie

- Normalizacja rozkładów prawdopodobieństwa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$



Zamiana zmiennych

Jaka jest gęstość prawdopodobieństwa $g(y)$, jeśli znana jest gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$?

Równość prawdopodobieństw:

$$f(x) dx = g(y) dy \quad f(x) = 1 \quad x \in [0, 1]$$

$$dx = g(y) dy = dG(y)$$

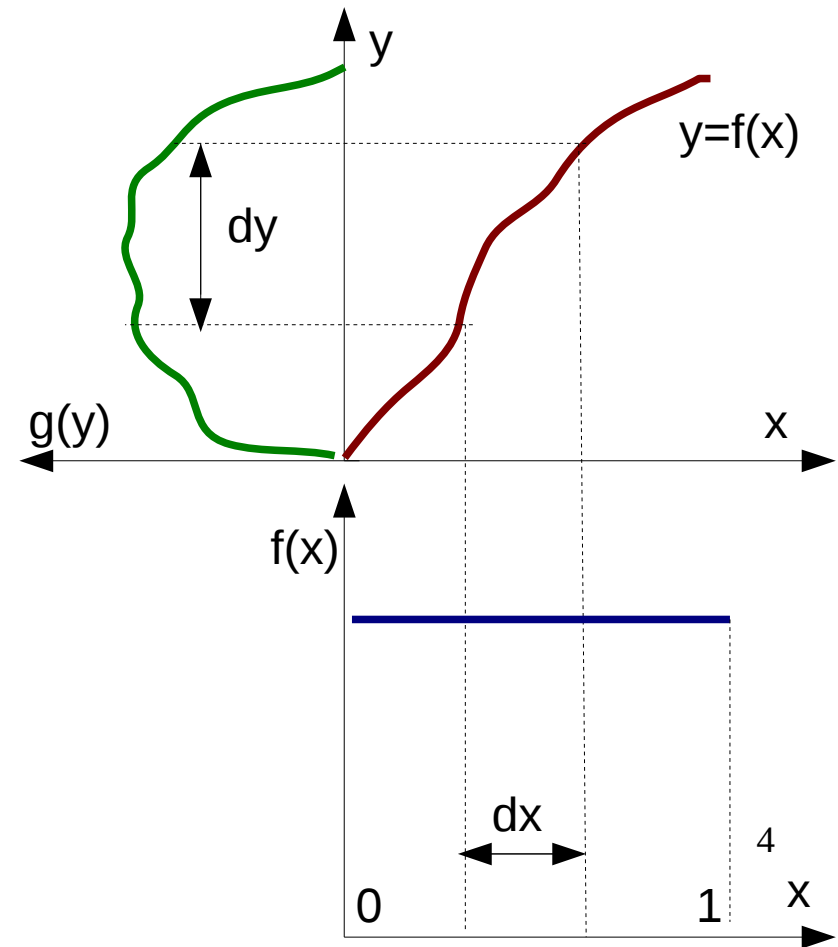
$$\int dx = \int dG(y)$$

$$x = G(y)$$

$$y = G^{-1}(x)$$

$$y_{\min} = G^{-1}(0)$$

$$y_{\max} = G^{-1}(1)$$



Zamiana zmiennych

Zamiana dwóch zmiennych: $u = u(x,y)$ $v = v(x,y)$

Funkcja J, która połączy funkcje gęstości prawdopodobieństwa: $f(x,y)$ oraz $g(u,v)$

$$g(u, v) = f(x, y) \left| J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) \right|$$

$$x_a = x(u, v); y_a = y(u, v)$$

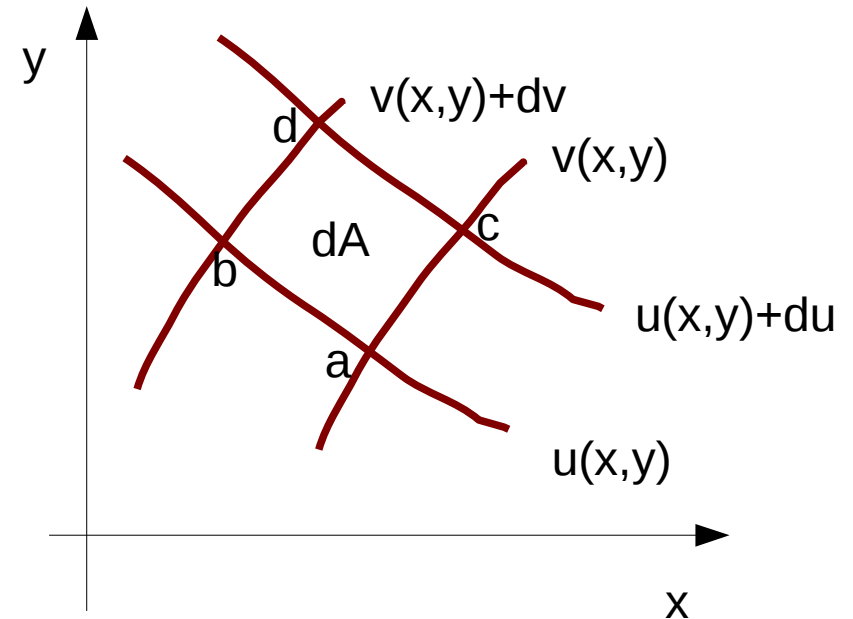
$$x_b = x(u, v + dv); y_b = y(u, v + dv)$$

$$x_c = x(u + du, v); y_c = y(u + du, v)$$

Szereg Taylora:

$$x_b = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v} dv; y_b = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

$$x_c = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} du; y_c = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} du$$



Powierzchnia równoległoboku:

$$dA = \begin{vmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv = J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) du dv$$

Zamiana zmiennych

$$J\left(\begin{matrix} \mathbf{x}, \mathbf{y} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{v}} \end{vmatrix} \quad \text{Jakobian transformacji}$$

Przypadek ogólny: n zmiennych $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Transformacje: $y_1 = y_1(\mathbf{x}), y_2 = y_2(\mathbf{x}), \dots, y_n = y_n(\mathbf{x})$

Gęstość prawdopodobieństwa zmiennych \mathbf{y} wynosi:

$$g(\mathbf{y}) = \left| J\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right) \right| f(\mathbf{x})$$

Jakobian:

$$J\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right) = J\left(\frac{x_1, x_2, \dots, x_n}{y_1, y_2, \dots, y_n}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Warunkiem istnienia funkcji $g(\mathbf{y})$ jest jednoznaczność wszystkich pochodnych cząstkowych.

Zamiana zmiennych

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi R}, \sqrt{x^2 + y^2} < R$$

Zamiana zmiennych do współrzędnych biegunowych:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} & x &= r \cos \phi \\ \phi &= \arctg \frac{y}{x} & y &= r \sin \phi \end{aligned}$$

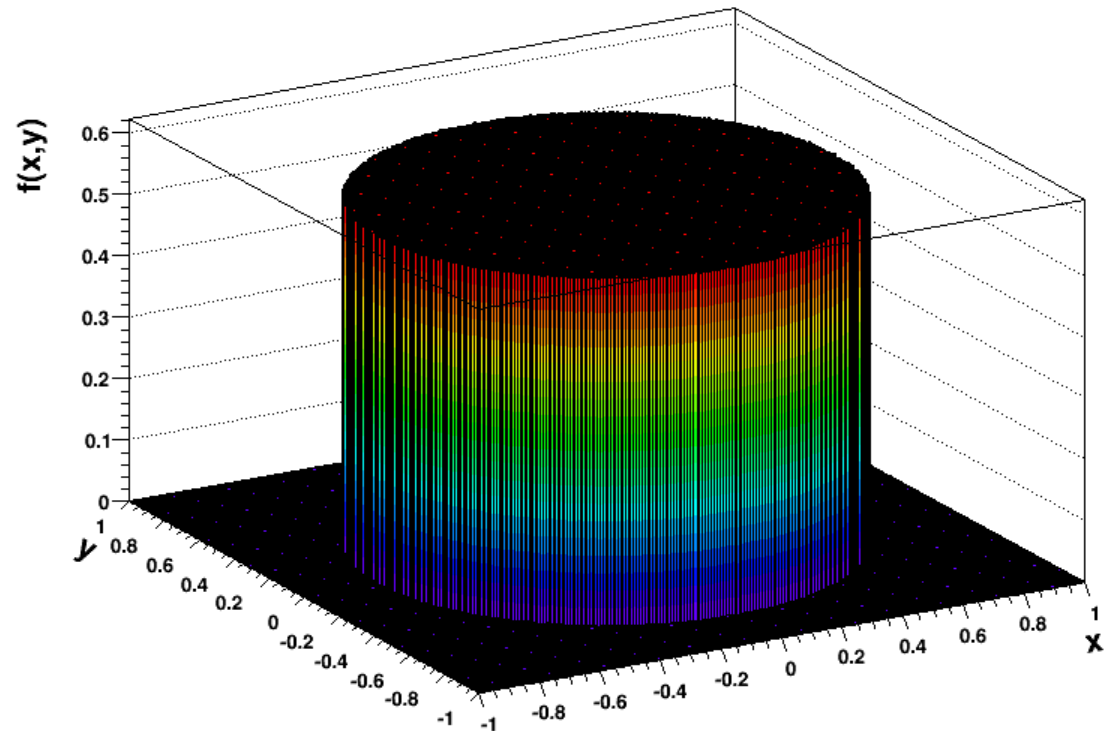
Jakobian:

$$J\left(\begin{matrix} r, \phi \\ x, y \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{vmatrix}$$

$$J\left(\begin{matrix} r, \phi \\ x, y \end{matrix}\right) = \frac{x}{r} \frac{x}{r^2} - \frac{y}{r} \left(-\frac{y}{r^2}\right) = \frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3} = \frac{x^2 + y^2}{r^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

$$g(r, \phi) = f(x, y) J\left(\begin{matrix} r, \phi \\ x, y \end{matrix}\right)$$

$$g(r, \phi) = \frac{1}{\pi R r}$$



PROPAGACJE BŁĘDÓW

Transformacje liniowe i ortogonalne. Propagacja błędów

Transformacje liniowe – bo łatwo się nimi posługiwać

Inne transformacje aproksymujemy transformacjami liniowymi (rozwinięcie w szereg Taylora)

Funkcje $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ to liniowymi funkcje zmiennych $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$y_1 = a_1 + t_{11} x_1 + t_{12} x_2 + \dots + t_{1n} x_n$$

$$y_2 = a_2 + t_{21} x_1 + t_{22} x_2 + \dots + t_{2n} x_n$$

...

$$y_r = a_r + t_{r1} x_1 + t_{r2} x_2 + \dots + t_{rn} x_n$$

Zapis macierzowy:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

Wartość oczekiwana zmiennej \mathbf{y} :

$$E(\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{a}$$

Transformacje liniowe, propagacja błędów

Macierz kowariancji:

$$C_y = E\{(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T\}$$

$$C_y = E\{(\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{a} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{a})(\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{a} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{a})^T\}$$

$$C_y = E\{\mathbf{T}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{T}^T\}$$

$$C_y = \mathbf{T} E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T\} \mathbf{T}^T$$

$$C_y = \mathbf{T} C_x \mathbf{T}^T$$

Prawo propagacji błędów:

- Znane są wartości oczekiwane zmiennych x_i , ich odchylenia standardowe (błędy) i kowariancje.
- Chcemy wyznaczyć błędy funkcji $\mathbf{y}(\mathbf{x})$
- Jeśli błędy zmiennej \mathbf{x} będą małe, to gęstość prawdopodobieństwa będzie różna od zera jedynie w okolicy punktu $\hat{\mathbf{x}}$.

Transformacje liniowe, propagacja błędów

Rozwijamy w szereg Taylora:

$$y_i = y_i(\hat{\mathbf{x}}) + \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} (x_1 - \hat{x}_1) + \dots + \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\right)_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} (x_n - \hat{x}_n) + \text{wyrazy wyzszego rzędu}$$

W notacji macierzowej:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{T}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \text{wyrazy wyzszego rzędu}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_r}{\partial x_1} & \frac{\partial y_r}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}$$

Do wzoru opisującego prawo propagacji błędów należy wstawić macierz \mathbf{T} przy jednoczesnym zaniedbaniu wyrazów nieliniowych.

Błędy zmiennej y (elementy diagonalne macierzy \mathbf{C}_y) zależą od:

- błędów zmiennej x

- od elementów pozadiagonalnych macierzy kowariancji \mathbf{C}_x .

Transformacje liniowe, propagacja błędów.

- Zmienne x niezależne \rightarrow można nie uwzględniać macierzy kowariancji (jest równa 0).

- Elementy diagonalne macierzy C_y mają postać:

$$\sigma^2(y_i) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{x=\hat{x}}^2 \sigma^2(x_j)$$

- Odchylenie standardowe:

$$\Delta(y_i) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{x=\hat{x}}^2 \Delta(x_j)^2}$$

Propagacja błędów, kowariancja

W układzie kartezjańskim mierzone współrzędne punktu (x, y) .

Pomiar daje trzykrotnie większe błędy przy współrzędnej y niż x . Pomiar x, y są niezależne.

Macierz kowariancji:

$$C_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Współrzędne biegunowe:} \quad r &= \sqrt{x^2 + y^2} & \phi &= \arctg \frac{y}{x} \\ x &= r \cos \phi & y &= r \sin \phi \end{aligned}$$

Macierz transformacji T w punkcie $(1,1)$ – dla prostoty obliczeń:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C_{r\phi} = T C_{xy} T^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Propagacja błędów, kowariancja

Współrzędne biegunowe: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \arctg \frac{y}{x}$

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi$$

$$C_{r\phi} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ -\sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{xy} = T' C_{r\phi} T'^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C_{xy} = T' C_{r\phi} T'^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Pozadiagonalne elementy macierzy kowariancji są **BARDZO WAŻNE!**

GENERACJA LICZB PSEUDOLOSOWYCH

Generacja liczb (pseudo)losowych

- 1) Zapis liczb w komputerze
- 2) Generator liczb pseudolosowych
 - a) generator liniowy kongruentny (LCG)
 - b) generator liniowy multiplikatywny kongruentny (MLCG)
- 3) Jakość generatorów – test widmowy
- 4) Generowanie liczb pseudolosowych o dowolnym rozkładzie
 - a) transformacja rozkładu jednostajnego
 - b) metoda von Neumanna (akceptacji i odrzucania)
 - c) metoda von Neumanna z funkcją pomocniczą
- 5) Całkowanie Monte Carlo

Liczby (pseudo)losowe

Dotychczas zajmowaliśmy się opisem zmiennych losowych. Nie było rozważane w jaki sposób się je otrzymuje. Często bardzo użyteczne jest posługiwanie się ciągiem zmiennych losowych. Z uwagi na konieczność przeprowadzania wielu operacji na takich ciągach- wykorzystujemy komputery. Metoda ich generacja powinna być oparta na odpowiednim procesie statystycznym (np. pomiar czasu pomiędzy rozpadami zachodzącymi w próbce z materiałem promieniotwórczym). Z uwagi na deterministyczny charakter metody generacji- komputery nie dają nam liczb losowych (przypadkowych)- są to **liczby pseudolosowe**. Metoda analizy danych oparta na wykorzystaniu liczb (pseudo)losowych w programach komputerowych jest metodą **Monte Carlo**.

Zapis liczb w komputerze

Najmniejszą jednostką informacji – *bit* (0 lub 1).

Zapisując k bitów, na $k-1$ bitów- tylko wartość bezwzględną kodowanej liczby,
1 bit do zapisu jej znaku.

$$a = a^{(k-2)}2^{k-2} + a^{(k-3)}2^{k-3} + \dots + a^{(1)}2^1 + a^{(0)}2^0$$

współczynniki $a^{(i)}$: 0 lub 1.

Postać binarna liczb nieujemnych:

$$00\dots000 = 0$$

$$00\dots001 = 1$$

$$00\dots010 = 2$$

$$00\dots011 = 3$$

Zapis liczb w komputerze

Np: 213 (dziesiętnie) =

$$1*1 + 0*2 + 1*4 + 0*8 + 1*16 + 0*32 + 1*64 + 1*128 =$$

011010101 (binarnie)

W przypadku liczb ujemnych na pierwszym bicie zapisywana jest 1.

Posługujemy się *bajtami*- jednostkami 8-bitowymi

Współczesne komputery pracują na liczbach (16), 32, 64-bitowych

Liczby bez znaku przyjmują wartości od 0 do 2^k , liczby ze znakiem -2^{k-1} do $2^{k-1}-1$,
gdzie k to ilość bitów użytych do zapisania liczby

Liczbę zmiennoprzecinkową zapisujemy jako: $x = M * R^E$

M to mantysa, R to podstawa, E to wykładnik

Komputery zapisują liczbę z $R=2$, notacja naukowa to $R=10$

Zapis liczb: $x = M10^E$; $x = M2^E$

**GENERATOR LINIOWY
KONGRUENTNY**

Generatory liniowe kongruentne

- Działanie komputera ma charakter deterministyczny.
- Nie ma możliwości uzyskać generatora liczb pseudolosowych.
- Komputer działa deterministycznie (kolejna generowana liczba jest funkcją liczb poprzednio generowanych).
- Generator liniowy kongruentny **LCG**:

$$x[j+1] = (a*x[j] + c) \bmod m$$

- Maksymalny okres generatora - m .
- $c=0$ - generatorem **MLCG**- multiplikatywny generator liniowy kongruentny.

Generatory liniowe kongruentne

Generatory *MLCG* są:

- szybsze niż *LCG*
- nie generują 0
- mają krótsze okresy.

Wartość początkowa $x[0]$ definiuje cały ciąg.

Ciąg jest okresowy.

Okres zależy od doboru parametrów i warunków:

* c, m nie mają wspólnych dzielników

* $b = a - 1$ jest wielokrotnością każdej liczby pierwszej p ,
która jest dzielnikiem liczby m

* b jest wielokrotnością 4 jeśli m też jest wielokrotnością 4.

Generatory liniowe kongruentne – testowanie jakości

Wykonujemy *test widmowy*: (x_i, x_{i+1})

Obsadzamy m z m^2 węzłów

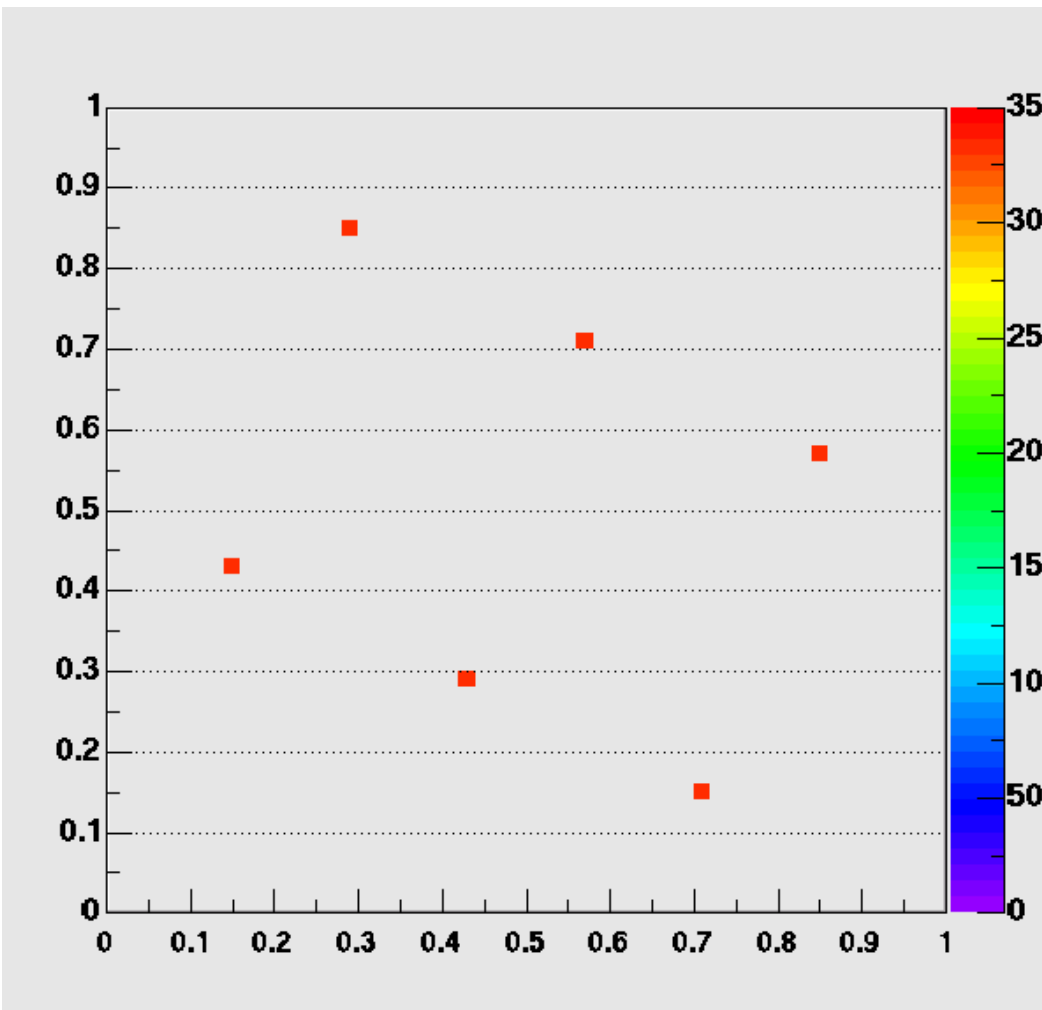
Szukamy prostych łączących obsadzone węzły sieci,
wybieramy największą z odległości między nimi

Dla rozkładów jednostajnych: odległość $\sim m^{-1/2}$
(przestrzeń jest równomiernie wypełniona)

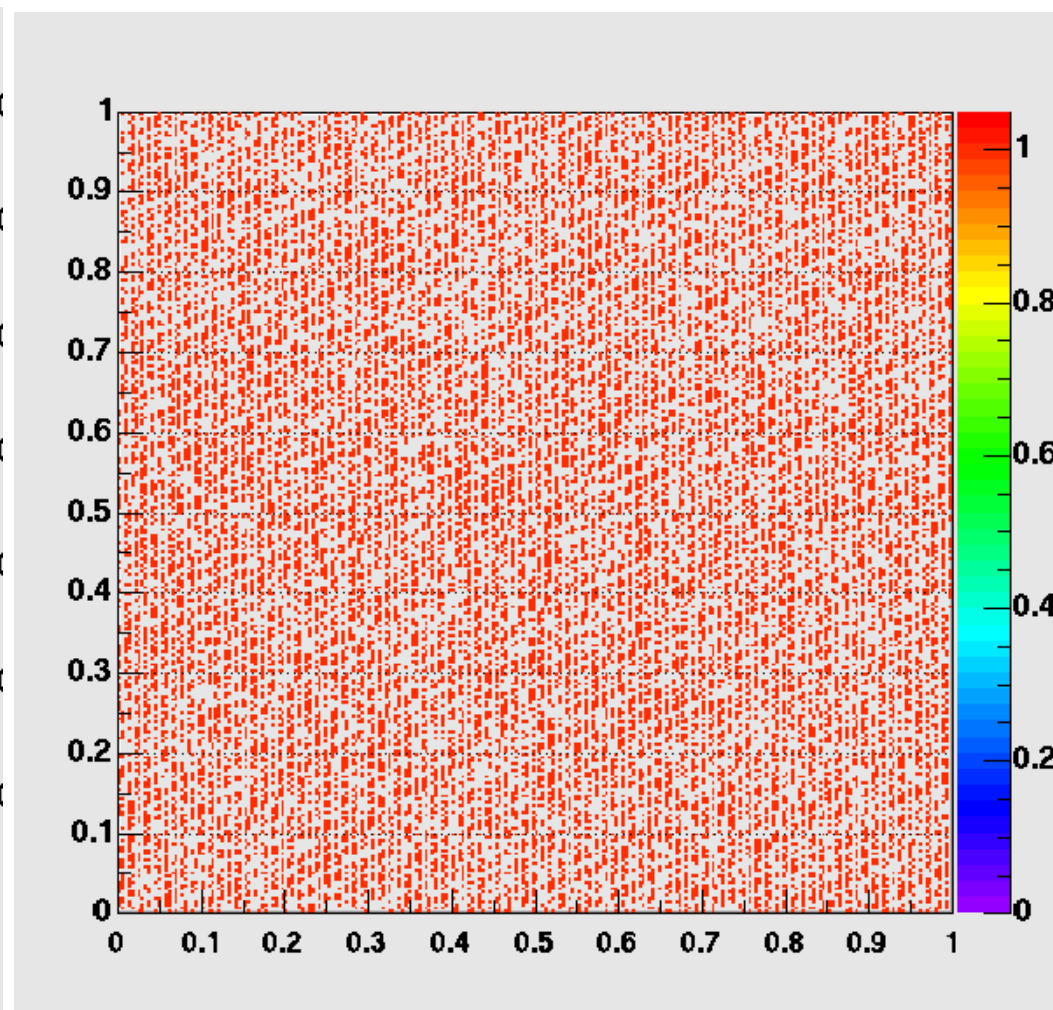
Dla rozkładów niejednostajnych odległość $\ll m^{-1/2}$

Najlepsze wyniki uzyskuje się łącząc ze sobą kilka generatorów liniowych

Generatory liniowe kongruentne



$c=0$
 $a=157$
 $m=32363$



$c=0$
 $a=157$
 $m=32363$

**GENERACJA LICZB METODĄ
TRANSFORMATY LICZB Z
INNEGO ROZKŁADU**

Generowanie liczb losowych o dowolnym rozkładzie

Metoda oparta na transformacji liczb wygenerowanych z rozkładu jednostajnego.

x : zmienna losowa o rozkładzie jednostajnym:

$$f(x) = 1, x \text{ in } [0,1]; f(x) = 0, x \text{ in } [0,1]$$

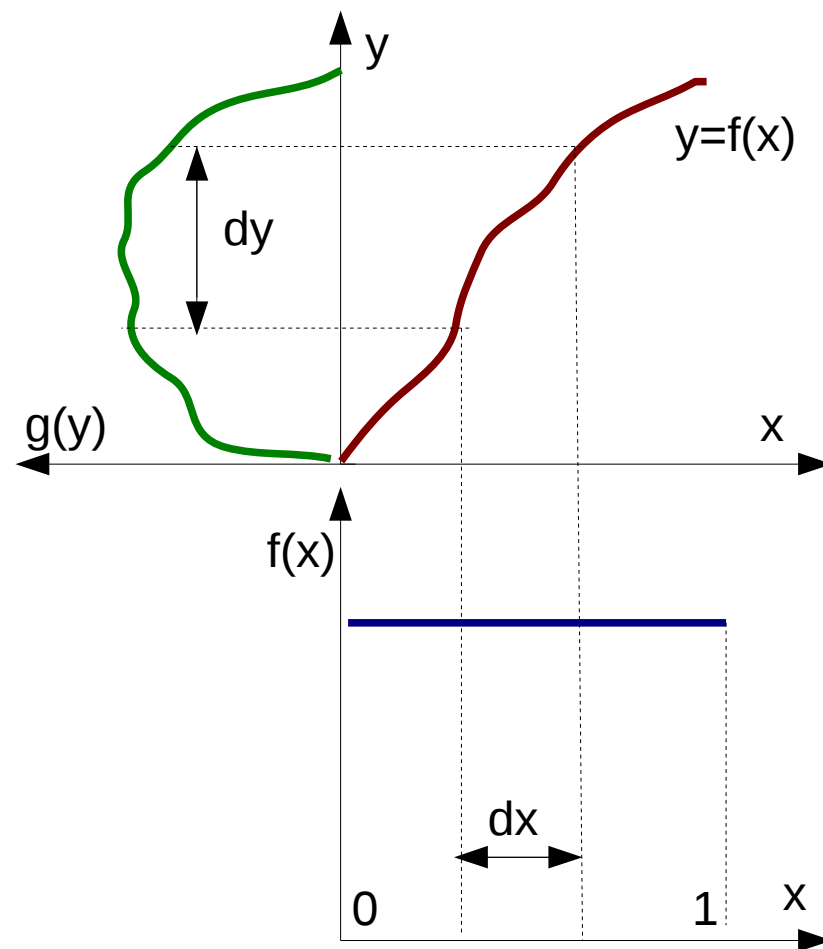
y : zmienną losową opisaną

gęstością prawdopodobieństwa $g(y)$:

$$f(x)dx = g(y)dy$$

$$dx = g(y)dy = dG(y)$$

po zcałkowaniu: $x = G(y)$.



Zmienna losowa x ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$,

znana jest funkcja odwrotna: $y = G^{-1}(x)$,

funkcja $g(y)$ opisuje gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej y .

Generowanie liczb mających rozkład Breita-Wigner'a

$$g(y) = \frac{2}{(\pi \Gamma)} \frac{\Gamma^2}{(4(y-a)^2 + \Gamma^2)}$$

$$x = G(y) = \int_{-\infty}^y g(y) dy = \frac{2}{(\pi \Gamma)} \int_{-\infty}^y \left(\frac{\Gamma^2}{(4(y-a)^2 + \Gamma^2)} dy \right)$$

po zamianie zmiennych:

$$u = 2 \frac{(y-a)}{\Gamma} \quad du = \frac{2}{\Gamma} dy$$

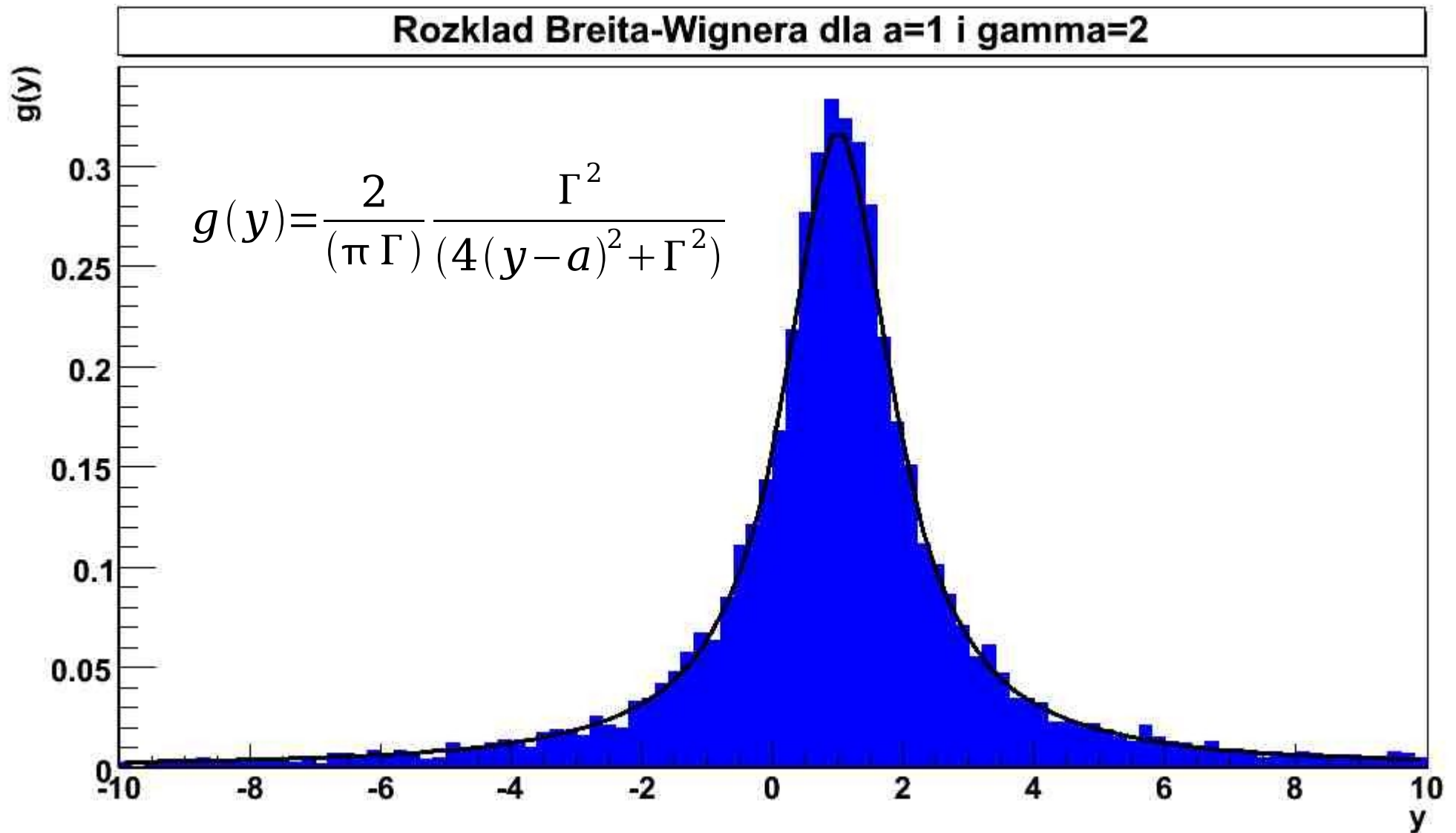
$$x = G(y) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=-\infty}^{(\theta=2(y-a)/\Gamma)} \left(\frac{1}{(1+u^2)} du \right) = \frac{1}{\pi} [\arctg u]_{(-\infty)}^{(2(y-a)/\Gamma)} = \arctg 2 \frac{(y-a)/\Gamma}{\pi} + \frac{1}{2}$$

a konkretnie:

$$y = a + \frac{\Gamma}{2} \operatorname{tg} \left(\pi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right)$$

Liczby losowe x jednostajnie rozłożone na przedziale $[0,1]$,
to liczby losowe y mają rozkład Breita- Wigner'a.

Generowanie liczb mających rozkład Breita-Wigner'a



GENERACJA LICZB METODĄ VON NEUMANNA

Generacja liczb losowych metodą von Neumann'a (akceptacji i odrzucania)

Standardowa metoda generacji liczb losowych ma ograniczone zastosowanie.

Dystrybuanta jest znana, możliwe jest znalezienie jej funkcji odwrotnej.

Gdy znana jest tylko gęstość prawdopodobieństwa: metoda von Neumanna.

Chcemy wygenerować liczby z rozkładu w kształcie półokręgu.

Rozkład gęstości jest opisany wzorem:

$$g(y) = \frac{2}{(\pi R^2)} \sqrt{R^2 - y^2} |y| \leq R$$

Generujemy N razy pary liczb (y,u).

Generacja liczb losowych metodą von Neumann'a (akceptacji i odrzucania)

Składowa (y): rozkład jednostajny w przedziale zmienności $[-R,R]$,

Składowa (u): rozkład jednostajny na przedziale wartości, jakie przyjmuje $g(y)$, czyli $[0,R]$.

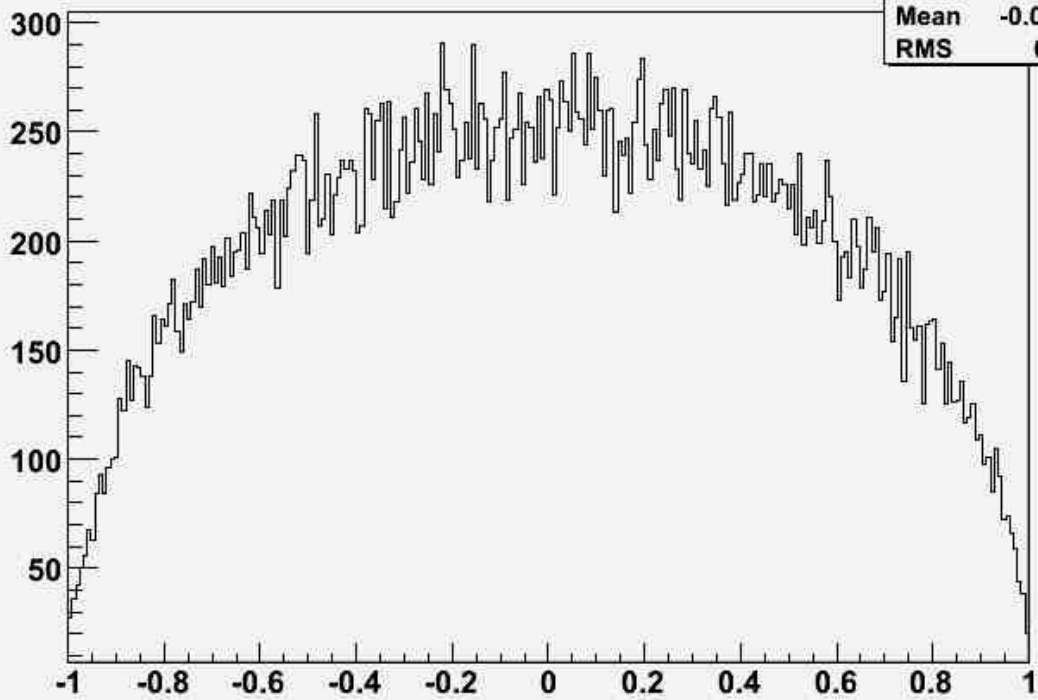
Dla każdej pary sprawdzany warunek: $u < g(y)$.

Spełniony? Akceptujemy liczbę y jako podlegającą rozkładowi $g(y)$

Wydajność metody jest równa ilorazowi par zaakceptowanych do wszystkich par

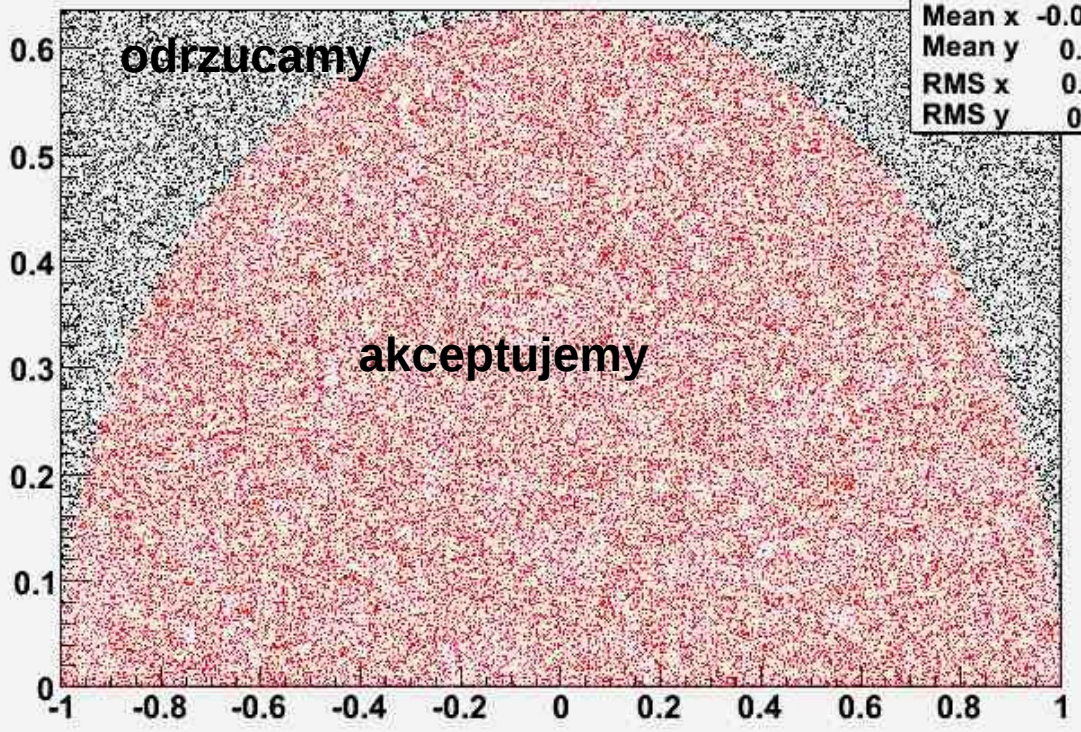
polkole

polkole	
Entries	50000
Mean	-0.002431
RMS	0.4992



**Wydajność metody jest równa
ilorazowi par zaakceptowanych
do wszystkich par**

pary_odrzucone	
Entries	13801
Mean x	-0.00749
Mean y	0.4964
RMS x	0.7977
RMS y	0.1181



Wydajność metody von Neumann'a

$$E = \frac{\int_a^b g(y) dy}{((b-a)u_{max})}$$

Metodę von Neumann'a można uogólnić na przypadek wielowymiarowy,
czyli na funkcję dowolnej liczby zmiennych losowych

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Generujemy zestawy liczb $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, u^i)$

Sprawdzamy warunek $u^i < f(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$

Akceptujemy (lub odrzucamy) cały zestaw zmiennych

**GENERACJA LICZB METODĄ
VON NEUMANNA Z FUNKCJĄ
POMOCNICZĄ**

Generacja liczb losowych metodą von Neumann'a (akceptacji i odrzucania) z funkcją pomocniczą

Wydajność metody można poprawić: uogólniona metoda von Neumanna:

[a] Wybieramy gęstość prawdopodobieństwa $s(y)$, którą możemy wygenerować przy pomocy metody odwrotnej transformaty. Najlepiej, żeby była to zmienna, której rozkład gęstości prawdopodobieństwa był podobny do rozkładu zmiennej, którą chcemy generować.

[b] Wybieramy stałą skalowania c taką, żeby: $cs(y)=g(y) \geq f(y)$

Funkcję $s(y)$ (lub jej przeskalowanie) $g(y)$ nazywamy *funkcją pomocniczą*.

$f(y)$ to nasz szukany rozkład

Generacja liczb losowych metodą von Neumann'a (akceptacji i odrzucania) z funkcją pomocniczą

[c)] Generujemy jedną liczbę losową y podlegającą wybranemu rozkładowi w przedziale oraz drugą liczbę losową u (*liczbę testową*) rozłożoną jednostajnie w przedziale $[0,1]$.

[d)] Akceptujemy liczbę y , jeżeli jest spełniony warunek:

$$u < \frac{f(y)}{g(y)}$$

Wydajność metody:

$$E = \frac{\int_a^b g(y) dy}{\int_a^b f(y) dy}$$

Generacja liczb losowych metodą von Neumann'a (akceptacji i odrzucania) z funkcją pomocniczą

$$f(y) = I_0(y); y > 0, y < a$$

$$g(y) = \alpha y + 1 \quad \alpha = \frac{(I_0(a) - a)}{\alpha}$$

$$I_0(a) = \alpha a + 1$$

$$G(y) = \frac{1}{2} \alpha y^2 + y = x$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\frac{1}{2} \alpha y^2 + y - x = 0 \quad \Delta = 1 + 2 \alpha x \quad y = \frac{(1 + \sqrt{1 + 2 \alpha x})}{\alpha}$$

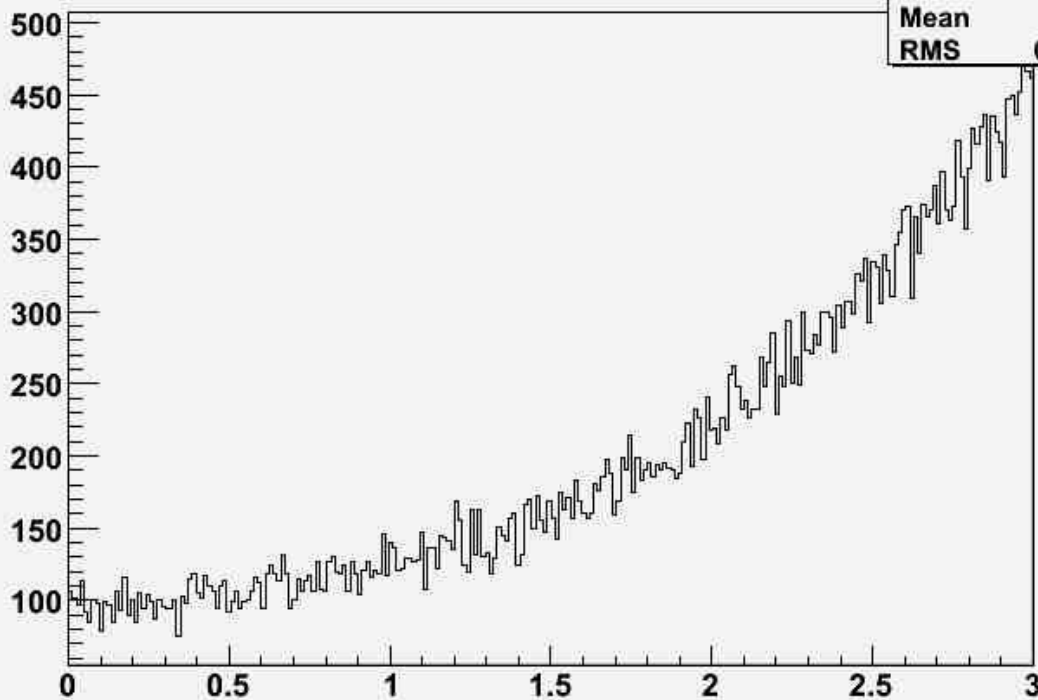
x jest generowany z rozkładu jednostajnego $[G(y_{\min}), G(y_{\max})] = [0, G(a)]$

u jest generowane z rozkładu jednostajnego $[0, 1]$

Sprawdzamy warunek:

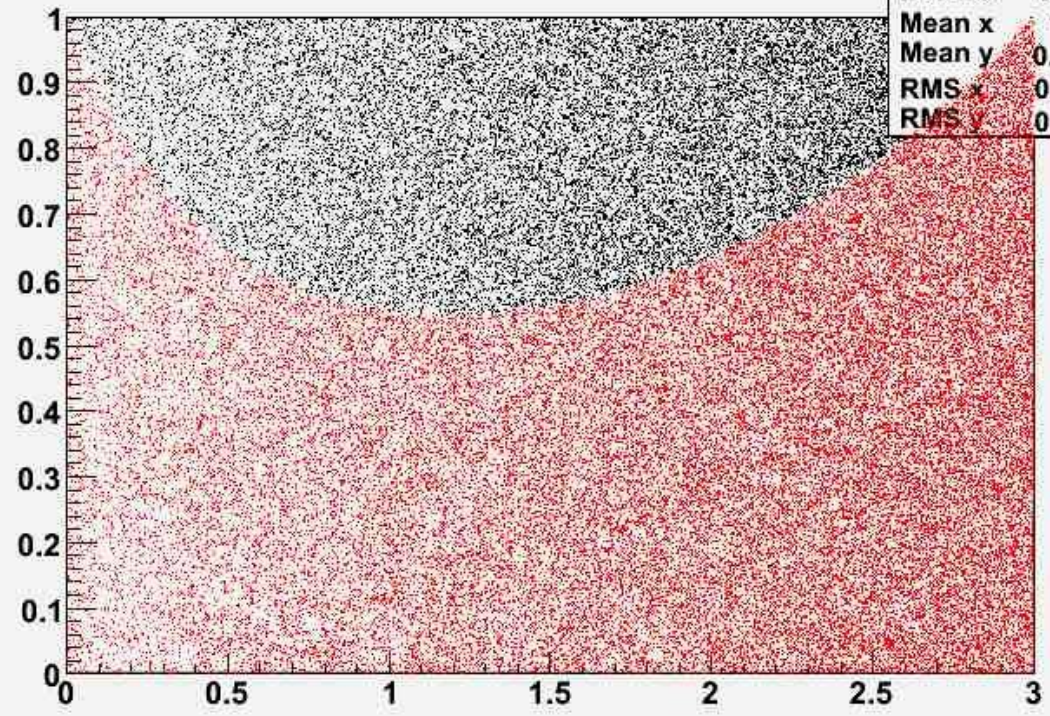
$$u < \frac{(f(y))}{(g(y))}$$

bessel



bessel
Entries 50000
Mean 1.92
RMS 0.8329

pary_odrzucone
Entries 21992
Mean x 1.614
Mean y 0.8204
RMS x 0.6739
RMS y 0.1184



CALKOWANIE MONTE-CARLO

Całkowanie Monte Carlo

Korzystamy z metody von Neumanna ich akceptacji i odrzucaniu.

Wyjdźmy ze wzoru na wydajność metody

$$E = \frac{\int_a^b g(y) dy}{((b-a)u_{max})} = \frac{n}{N}$$

Przyjmuje się, że N par liczb losowych (y_i, u_i) , $i=1, \dots, N$ zostało wygenerowanych zgodnie z tą metodą oraz, że w wyniku spełnienia warunku (von Neumanna). $N-n$ par zostało odrzuconych.

Całkowanie Monte Carlo

Czyli nasza poszukiwana całka:

$$I = \int_a^b g(y) dy = ((b-a) u_{max}) \frac{n}{N}$$

Możliwe jest obliczenie DOWOLNEJ całki oznaczonej poprzez bardzo prostą generację liczb z rozkładu jednostajnego! :-)

Można przykład rozszerzyć na przypadek wielu zmiennych

Dokładność metody

$$\frac{(\Delta I)}{I} = \frac{1}{(\sqrt{N_{zakceptowane}})}$$

KONIEC WYKŁADU 4