Komputerowa Analiza Danych Doświadczalnych

Prowadząca:
dr inż. Hanna Zbroszczyk

Konsultacje:
Poniedziałek: 10.15-11.00
Piątek: 11.15-12.00

e-mail: *gos@if.pw.edu.pl*
Tel: +48 22 234 58 51
Politechnika Warszawska
Wydział Fizyki
Pok. 117b (wejście przez 115)

www: http://www.if.pw.edu.pl/~gos/students/kadd

Regulamin przedmiotu

Przedmiot jest prowadzony przez dr inż. Hannę Zbroszczyk.

Laboratorium stanowi uzupełnienie wykładu pod tym samym tytułem.

Zajęcia trwają 15 tygodni (1 godzina wykładu, 2 godziny laboratorium tygodniowo).

Prowadzący zajęcia laboratoryjne:

dr inż. Maja Maćkowiak-Pawłowska (ROOT)

dr inż. Hanna Zbroszczyk (ROOT)

mgr inż. Grzegorz Siudem (MATLAB)

mgr inż. Tomasz Sobiech (MATLAB)

Regulamin przedmiotu

Organizacja zajęć laboratoryjnych:

- przewidzianych jest 15 zajęć laboratoryjnych (w tym 1 wstępne, 11 punktowanych, 2 kolokwia, 1 dodatkowe)
- zajęcia prowadzone będą w środowisku ROOT albo MATLAB
- obecność jest obowiązkowa (możliwe są maksymalnie 2 nieobecności);
- w przypadku osób, które uzyskały rejestrację na semestr w trakcie jego trwania – koniecznym warunkiem do zdobycia pozytywnej oceny z przedmiotu będzie zaliczenie pierwszego kolokwium w terminie;
- spóźnienie na zajęcia powyżej 15 minut automatycznie jest odnotowane jako nieobecność
- zajęcia trwają 90 minut, odbywają się bez przerwy;

Regulamin przedmiotu

Zasady oceniania na zajęciach punktowanych:

- zajęcia punktowane obejmują wykonanie 11 zadań o zróżnicowanym stopniu trudności
- dopuszczenie do wykonania zadania może być uwarunkowane zaliczeniem kolokwium wstępnego
- w trakcie pisania programu wolno korzystać z napisanych przez siebie programów oraz zasobów Internetu*
- napisany w trakcie trwania laboratorium program należy oddać na tych samych zajęciach
- za każde zadanie można otrzymać 0-5 pkt (zrozumienie zadania: 1pkt, wykorzystanie formalnych środków środowiska: 3 pkt, aspekty użytkowe oraz strona estetyczna: 1 pkt)

*) nie wolno korzystać z programów pocztowych (chyba, że prowadzący wyrazi zgodę), komunikatorów internetowych, serwisów społecznościowych (w celu komunikacji z innymi użytkownikami), ani z programów kolegów z grupy swojej, jak i żadnej innej; korzystanie z telefonów komórkowych (smartfonów, tabletów) jest także zabronione.

Regulamin przedmiotu

- <u>w przypadku nie skończenia programu na zajęciach</u> oceniony zostanie napisany, działający jego fragment; program należy skończyć we własnym zakresie i przedstawić prowadzącemu najpóźniej w kolejnym tygodniu zajęć (na zajęciach lub konsultacjach); za skończenie programu po zajęciach możliwe będzie zdobycie dodatkowego 1 pkt- ale tylko w przypadku przedstawienia w pełni działającego programu; suma zdobytych punktów za program skończony poza zajęciami nie może być większa niż 4; poprawa polega na zademonstrowaniu działającego programu oraz dyskusji z prowadzącym (co w przypadku prezentacji na kolejnych zajęciach skraca czas pisania programu dedykowanego dla tych konkretnych zajęć); nie dokończenie programu może skutkować niedopuszczeniem do kolejnych zajęć;

Regulamin przedmiotu

- w przypadku nieobecności studenci są zobowiązani do zrealizowania materiału we własnym zakresie i przedstawienia rozwiązania najdalej 2 tygodnie po nieobecności (na zajęciach lub konsultacjach) – w przypadku usprawiedliwionej nieobecności możliwe jest zaliczenie zaległego programu na mniejszą (4 pkt) ilość punktów;
- w przypadku nieobecności nieusprawiedliwionej liczba zdobytych punktów wynosi 0 (zero).
- mogą być zadawane prace domowe.

Regulamin przedmiotu

Zasady oceniania kolokwiów:

- w trakcie semestru będą 2 (dwa) kolokwia: jedno w połowie semestru, drugie na końcu;
- kolokwium będzie polegało na napisaniu 3 (trzech) programów z materiału zrealizowanego na zajęciach.
- napisane programy należy przesłać przed końcem trwania kolokwium na adres e-mailowy prowadzącego;
- programy będą oceniane w skali 0-30 pkt (0-10 pkt za każdy program).

Regulamin przedmiotu

Ocena końcowa

Na ocenę końcowa przedmiotu wpływają:

wyniki z kolokwium z laboratorium: max 30 * 2 pkt = 60 pkt;

wyniki z programów napisanych na zajęciach: max 5 * 11 pkt = 55 pkt;

wyniki z kolokwium z wykładu: max 35 pkt (przy drugim podejściu możliwe będzie zdobycie 30 pkt)

Ocena końcowa wystawiana jest na podstawie procentowego udziału sumy uzyskanych punktów do sumy punktów możliwej do uzyskania (150 pkt) wg. następującej zależności:

>= 51% - 3.0

>= 61% - 3.5

>= 71% - 4.0

>= 81% - 4.5

>= 91% - 5.0

UWAGA! Do zaliczenia przedmiotu konieczne jest zaliczenie (zdobycie 51% punktów możliwych do zdobycia w konkretnym podejściu) wszystkich kolokwiów.

Regulamin przedmiotu

Na ostatnich (15) zajęciach laboratoryjnych możliwe jest poprawienie kolokwium (z laboratorium). Możliwe jest jednokrotne poprawianie kolokwium. Bez względu na wynik poprawy kolokwium, punkty zdobyte za kolokwium w trybie regularnym są anulowane.

Przy poprawie kolokwium możliwe jest zdobycie max. 24 pkt (po 8 pkt za program).

W celu zaliczenia kolokwium należy zdobyć 51% punktów.

Regulamin przedmiotu

Literatura

1. **S. Brandt; Analiza danych, PWN, Warszawa (1999)**
2. R. Nowak, Statystyka dla fizyków, PWN, Warszawa (2002)
3. W.T.Eadie, D.Drijard, F.E.James, M.Ross, B.Sadoulet;
   Metody statystyczne w fizyce doświadczalnej, PWN, Warszawa (1989)
4. A.Plucińska, E.Pluciński; Elementy probabilistyki, PWN, Warszawa (1979)
5. Programy biblioteki CERN : CERNLIB, HBOOK, PAW, ROOT

Regulamin przedmiotu

Program wykładu

1) Pomiary w eksperymentach fizycznych (przypomnienie z rachunku niepewności).

2) Zmienne losowe i ich rozkłady (1D, 2D, nD, prawo propagacji niepewności).

3) Elementy metody Monte Carlo, generacja liczb pseudolosowych za pomocą komputera.

4) Podstawowe rozkłady statystyczne (dyskretne i ciągłe; centralne twierdzenie graniczne).

5) Pomiar jako pobieranie próby. Estymatory.

6) Metoda największej wiarygodności.

7) Weryfikacja hipotez statystycznych (m. in. test Chi^2)

8) Metoda najmniejszych kwadratów (przypadek liniowy, wielomianowy, ...)

9) Zagadnienie minimalizacji i optymalizacji.

Niepewności pomiarowe

Dokonując pomiaru danej wielkości (np. fizycznej), niezwykle ważne jest:

- poprawne wykonanie tego pomiaru,
- analiza końcowych wyników pod względem ich wiarygodności, poprawności,
- przedstawienie uzyskanych rezultatów tak, by możliwe było ich poprawne zinterpretowanie.

Bardzo często dzieje się tak, że mierzona wielkość nie pokrywa się z jej wartością rzeczywistą. Przyczyny tego faktu mogą być bardzo różne.

Wyniki pomiarów są obarczone niepewnościami pomiarowymi.

Normy ISO

W roku 1995 z inicjatywy Międzynarodowego Komitetu Miar (CIPM) zostały określone międzynarodowe normy opisujące niepewności pomiarowe. Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO) wydała „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement”, który stanowi wspólne dzieło uzgodnień dokonanych przez międzynarodowe organizacji. Zgodnie z umowami międzynarodowymi Polska zobowiązała się do zastosowania normy ISO dotyczącej obliczania i zapisu niepewności pomiarów, podobnie do obowiązku stosowania jednostek układu SI. Polską wersję normy ISO wydał w 1999 roku Główny Urząd Miar i nosi ona tytuł „Wyrażanie niepewności pomiaru”.

Podstawowe definicje

- Pomiar – zbiór czynności prowadzących do ustalenia wartości wielkości mierzonej.
- Niepewność pomiaru (*uncertainty*) – parametr, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.
- Niepewność standardowa (*standard uncertainty*) u(x) – niepewność wyniku pomiaru wyrażona w formie odchylenia standardowego (na przykład odchylenie standardowe średniej). Niepewność można zapisać na trzy różne sposoby: u, u(x) lub u(przyspieszenie), gdzie wielkość x może być również wyrażona słownie (w przykładzie x oznacza przyspieszenie). Należy zawsze jednak pamiętać, że u nie jest funkcją, tylko liczbą.
- Obliczanie niepewności standardowej - metoda typu A (*type A evaluation of uncertainty*) to metoda obliczania niepewności pomiaru na drodze analizy statystycznej serii wyników pomiarów.
- Obliczanie niepewności standardowej - metoda typu B (*type B evaluation of uncertainty*) to metoda obliczania niepewności pomiaru sposobami innymi niż analiza statystyczna serii pomiarowej, czyli na drodze innej niż metoda typu A.

Podstawowe definicje

- **Złożona niepewność standardowa** (*combined standard uncertainty*) $u_c(x)$ – niepewność standardowa wyniku pomiaru określana, gdy wynik ten jest otrzymywany ze zmierzonych bezpośrednio innych wielkości (niepewność pomiarów pośrednich obliczana z prawa przenoszenia niepewności pomiaru).

- **Niepewność rozszerzona** (*expanded uncertainty*) $U(x)$ lub $U_c(x)$ – wielkość określająca przedział wokół wyniku pomiaru, od którego oczekuje się, że obejmuje dużą część wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości mierzonej. (niepewność standardowa jednoznacznie określa wynik pomiaru, jednak czasem wprowadza się niepewność rozszerzoną, która służy do wnioskowania o zgodności wyniku pomiaru z wynikami uzyskanymi w innych warunkach lub z wartościami tablicowymi, do ustalania innych norm (przemysłowych, bezpieczeństwa, itd).

- **Współczynnik rozszerzenia** (*coverage factor*) k – współczynnik liczbowy, mnożnik niepewności standardowej, stosowany w celu uzyskania niepewności rozszerzonej. Zazwyczaj k zawiera się w granicach od 2 do 3, niekiedy dla specjalnych zastosowań k może być wybrane spoza tego przedziału.

Źródła niepewności pomiarowych

1. niepełna definicja wielkości mierzonej;
2. niedoskonały układ pomiaru wielkości mierzonej;
3. niereprezentatywne pomiary, których wyniki mogą nie reprezentować wielkości mierzonej;
4. niepełna znajomość oddziaływań otoczenia na pomiar albo niedoskonały pomiar warunków otoczenia;
5. błędy obserwatora w odczytywaniu wskazań przyrządów analogowych;
6. skończona zdolność rozdzielcza przyrządów;
7. niedokładne wartości przypisane wzorcom i materiałom odniesienia;
8. niedokładne wartości stałych i innych parametrów otrzymywanych ze źródeł zewnętrznych;
9. przybliżenia i założenia upraszczające tkwiące w metodzie i procedurze pomiarowej;
10. zmiany kolejnych wyników pomiarów wielkości mierzonej w pozornie identycznych warunkach.

Niepewności standardowe typu A oraz B

Ocena niepewności standardowej typu A może być oparta na każdej, prawidłowej metodzie statystycznego opracowania danych (np. obliczanie odchylenia standardowego średniej dla serii niezależnych obserwacji, użycie najmniejszej sumy kwadratów w celu dopasowania krzywej do danych i obliczenie parametrów krzywej oraz ich niepewności standardowych.

Ocena niepewności standardowej typu B jest zwykle oparta o naukowy osąd badacza biorącego pod uwagę wszystkie dostępne informacje, które mogą obejmować:

- wyniki pomiarów poprzednich,
- doświadczenie, wiedzę na temat własności przyrządów ii badanych materiałów,
- informacje producentów przyrządów na temat ich własności,
- dane zawarte w protokołach kalibracji przyrządów i innych raportach, niepewności przypisane danym zaczerpniętych z podręczników.

Typy pomiarów występujących przy niepewnościach standardowych typu A oraz B:

- bezpośrednie
- pośrednie.

Pomiary bezpośrednie – obliczanie niepewności typu A

Załóżmy, że wielkość fizyczna X jest wyznaczana w sposób bezpośredni i w tym celu została wykonana seria n pomiarów x_1, x_2, ... , x_n. Proces wykonywania pomiarów można porównać do pobierania n-elementowej próby losowej z nieskończonego zbioru wszystkich możliwych do wykonania pomiarów. Jeśli rozkład prawdopodobieństwa liczb xi jest opisany w przybliżeniu krzywą Gaussa optymalny sposób opracowania wyników jest następujący. Za wynik pomiaru przyjmuje się średnią arytmetyczną:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Niepewność standardową tego wyniku (x) pomiaru wielkości fizycznej x oblicza się z poniższego wzoru (odchylenie standardowe wielkości średniej):

$$u(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n(n-1)}(x_i-\bar{x})^2}$$

Pomiary bezpośrednie – obliczanie niepewności typu B

Jeśli wykonywany jest np. tylko 1 pomiar (lub po jednym pomiarze każdej z wielkości mierzonych) lub wyniki nie wykazują rozrzutu. Dzieje się wtedy, gdy urządzenie pomiarowe jest mało dokładne (pomiar grubości płytki śrubą mikrometryczną, a liniją milimetową). Dokładność miernika określa niepewność wzorcowania Δx (zwana także niepewnością graniczną – liczba określona przez producenta urządzenia pomiarowego lub oszacowana na podstawie wartości działki elementarnej stosowanego miernika). Prawdopodobieństwo uzyskania dowolnego wyniku mieszczącego się w przedziale wyznaczonym przez wynik pomiaru i niepewność wzorcowania jest takie samo. Tego typu rozkład prawdopodobieństwa nazywa się rozkładem jednostajnym, w którym odchylenie standardowe określone jako Δx/3. Przyjmuje się, że jest ono równe niepewności standardowej typu B

$$u(x)=\frac{\Delta x}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

Pomiary bezpośrednie – obliczanie niepewności typu B

Drugą przyczyną niepewności pomiarów typu B może być niepewność eksperymentatora Δx_e określana przez osobę wykonującą pomiary. Wartość jej jest szacowana na podstawie umiejętności i sposobu wykonywania pomiarów. Jeśli występują oba źródła niepewności typu B opisane powyżej, to dodają się ich kwadraty niepewności standardowych (prawo propagacji niepewności):

$$u(x)=\sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}+\frac{(\Delta x_e)^2}{3}}$$

Jeśli występują niepewności pomiarowe typu A oraz typu B, to korzystamy z prawa propagacji niepwnosci:

$$u(x)=\sqrt{s_{\bar{x}}^2+\frac{(\Delta x)^2}{3}+\frac{(\Delta x_e)^2}{3}}$$

Pomiary pośrednie

Pomiar pośredni wielkości Z (zwaną wyjściową) polega na wykonaniu pomiarów k wielkości mierzonych bezpośrednio (zwanymi wejściowymi), które oznacza się x_1, x_2, ... , x_k. Wielkości z jest funkcją wielkości x_k: $z = f(x_1, x_2, ..., x_k)$, ew. $z = f(x_k)$.

Dla wielkości fizycznych mierzonych bezpośrednio należy obliczyć ich wartości średnie x_1, x_2, ... , x_k oraz niepewności standardowe $u(x_1)$, $u(x_2)$, ... , $u(x_k)$. Niepewności standardowe wielkości bezpośrednich mogą być obliczone zarówno metodą typu A, jak i metodą typu B (w przypadku metody typu B nie ma wartości średniej, a jedynie wynik pomiaru). Wynik pomiaru wielkości Z oblicza się ze wzoru:

$z = f(x_1, x_2, ... , x_k)$.

Niepewność pomiaru wielkości Z nosi nazwę niepewności złożonej u_c. Oblicza się ją przy użyciu następującego wzoru (korzystając z wartości średnich x_j):

$$u_c(z)=\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j}\right)^2 u^2(x_j)}$$

Niepewność rozszerzona

Niepewność standardowa $u(x)$ określa przedział: $(x - u (x); x + u (x))$, w którym wartość prawdziwa znajduje się z prawdopodobieństwem 68% dla niepewności typu A oraz z prawdopodobieństwem 58% dla niepewności typu B (wartości te wynikają z rozkładów prawdopodobieństw: Gaussa i jednostajnego).

Dla umożliwienia porównania wyników pomiarów uzyskiwanych w różnych laboratoriach i warunkach wprowadzono pojęcie niepewności rozszerzonej U, kiedy zwiększona jest wartość niepewności standardowej tak, aby w przedziale $x \pm U(x)$ znalazła się przeważająca część wyników.

Niepewność rozszerzoną oblicza się w sposób następujący: $U(x) = k \cdot u(x)$, k to współczynnik rozszerzenia ($k = 2$ określa prawdopodobieństwo znalezienia wartości rzeczywistej w przedziale $x \pm U(x)$ na 95% dla niepewności typu A oraz prawdopodobieństwo bliskie 100% dla niepewności typu B). Jeśli nie podano inaczej, jest to zazwyczaj niepewność rozszerzona obliczona dla współczynnika rozszerzenia $k = 3$, co odpowiada trzykrotnej wartości odchylenia standardowego wielkości średniej.

Zapis wyników

Wynik pomiaru zapisuje się zawsze wraz z niepewnością. Obie wielkości należy wyrazić w jednostkach podstawowych układu SI. Niepewność zapisuje się z dokładnością (zaokrągla) do dwóch cyfr znaczących. Wynik pomiaru zapisuje się z dokładnością określoną przez prawidłowy zapis niepewności, co oznacza, że ostatnia cyfra wyniku pomiaru i niepewności muszą stać na tym samym miejscu dziesiętnym. Zaokrąglenie niepewności i wyniku odbywa się zgodnie z zasadami zaokrągleń w matematyce: cyfry 0-4 zaokrągla się w dół (nie ulega zmianie cyfra poprzedzająca), natomiast cyfry 5-9 zaokrągla się w górę (cyfra poprzedzająca zwiększa się o jeden). Zapis wyniku pomiarów można uzupełnić również o liczbę pomiarów stanowiących podstawę obliczeń niepewności.

Niepewność standardową można zapisać na kilka sposobów:

t = 21,364 s, u(t) = 0,023 s

t = 21,364(23) s, – (zalecany)

t = 21,364(0,023) s

Niepewność rozszerzoną zapisuje się z użyciem symbolu ±.

Dla powyższego przykładu U(t) = k·u(t), t = 21,364 s, U(t) = 0,046 s (k = 2), n = 11

t = (21,364±0,046) s.

Przykład 1 – pomiar bezpośredni

Przy użyciu suwmiarki o dokładności 0,1 mm zmierzono bok pręta o przekroju kwadratowym i otrzymano następujące wyniki w milimetrach: 12,5; 12,3; 12,6; 12,5; 12,6; 12,5; 12,4; 12,3; 12,5; 12,4; 12,6. Obliczyć długość boku pręta. Zapisać wynik pomiaru.

Wynikiem pomiaru będzie średnia arytmetyczna: d =12,4727 mm

Suwmiarka ma działkę elementarną (czyli dokładność wzorcowania Δd) równą 0,1 mm. Tak więc niepewność standardowa typu B ma wartość:

$$u(d)=\frac{\Delta d}{\sqrt{3}}=0.057735\,mm$$

Istnieje rozrzut wyników pomiarów, dlatego też należy obliczyć niepewność standardową typu A:

$$u(d)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n(n-1)}(d_i-\bar{d})^2}=0.033278\,mm$$

Jak można zauważyć obie niepewności są tego samego rzędu, więc należy posłużyć się prawem propagacji niepewności do uzyskania sumarycznej wartości niepewności standardowej (całkowitej):

$$u(d)=\sqrt{s_{\bar{d}}^2+\frac{(\Delta d)^2}{3}}=0.06639\,mm$$

Przykład 1 – pomiar bezpośredni

Niepewność standardową można poprawnie zapisać w jeden z trzech sposobów:

u = 0,066 mm

u(d) = 0,066 mm

u(boku pręta) = 0,066 mm

Prawidłowy zapis wyniku pomiaru:

d = 12,473 mm, u(d) = 0,066 mm

d = 12,473(66) mm

d = 12,473(0,066) mm

Jeśli konieczne jest podanie niepewności rozszerzonej (np. do porównania z wartością katalogową), to wynik należy zapisać w sposób następujący:

U(d) = k·u(d), d = 12,47 mm, U(d) = 0,2 mm (k = 3), n = 11

d = (12,47±0,20) mm.

Przykład 2 – pomiar pośredni

W celu wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego przeprowadzono pomiary czasu spadku ciała z pewnej wysokości.

Wysokość spadku h zmierzono trzykrotnie taśmą mierniczą z podziałką milimetrową uzyskując za każdym razem wynik 1270 mm.

Czas spadku t zmierzono pięciokrotnie przy pomocy stopera uzyskując wyniki $t_1 = 0{,}509$, $t_2 = 0{,}512$, $t_3 = 0{,}510$, $t_4 = 0{,}504$, $t_5 = 0{,}501$ (wszystkie wyniki w sekundach).

Dokładność stopera wynosiła 0,001 s, zaś niepewność związaną z wyborem chwili włączenia i wyłączenia oszacowano na 0,01 s.

Obliczyć przyspieszenie ziemskie i jego niepewność.

Obliczamy wartości średnich wysokości spadku h i czasu spadku t :

h = 1270mm = 1,27 m , t = 0,5072 s .

Mając obliczone wartości h i t można obliczyć wartość przyspieszenia ziemskiego g ze wzoru $g = 2h / t^2 = 9{,}87359\ m/s^2$.

Aby obliczyć niepewność złożoną pomiaru pośredniego g należy określić niepewności standardowe pomiaru czasu i wysokości.

Obliczenie niepewności standardowej u(t) pomiaru czasu:

Niepewność typu A:

$$u(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n-1)} (t_i - \bar{d})^2} = 2.035\, ms$$

Przykład 2 – pomiar pośredni

Niepewność typu B:

Niepewność typu B pomiaru czasu związana z niepewnością eksperymentatora włączenia i wyłączenia czasomierza niepewność, a zatem wynosi Δt_e = 0,01 s = 10 ms (można zaniedbać niepewność związaną z dokładnością czasomierza, gdyż jest ona dziesięciokrotnie mniejsza). Tak więc niepewność standardowa typu B wynosi:

$$u(t)=\frac{\Delta t}{\sqrt{3}}=\frac{10}{\sqrt{3}}=5.7735\,ms$$

Korzystany z prawa propagacji niepewnowności:

$$u(t)=\sqrt{s_{\bar{t}}^{2}+\frac{(\Delta t)^{2}}{3}}=6.122\,ms$$

Końcowy zapis wyniku pomiaru czasu należy zapisać w postaci: t = 0,5072(61) s, n=5.

Przykład 2 – pomiar pośredni

Obliczenie niepewności złożonej $u_c(g)$ pomiaru przyspieszenia ziemskiego:

$$u_c(g)=\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2 u^2(h)+\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 u^2(t)}=0.237\,\frac{m}{s^2}$$

Wkład niepewności pomiaru wysokości w porównaniu do niepewności pomiaru czasu jest pomijalnie mały. Wynik pomiaru przyspieszenia ziemskiego można zapisać poprawnie na trzy sposoby:

g = 9,87 m/s^2, $u_c(g)$ = 0,24 m/s^2

g = 9,87(24) m/s^2

g = 9,87(0,24) m/s^2

Obliczenie niepewności rozszerzonej $U_c(g)$ pomiaru przyspieszenia ziemskiego:

$U_c(g) = 2\cdot u_c(g) = 2\cdot 0{,}24$ m/s^2 = 0,48 m/s^2.

Końcowy rezultat pomiaru przyspieszenia ziemskiego, który można porównać z wartością tablicową jest następujący: g = (9,87±0,48) m/s^2.

Ogólne zasady sporządzania wykresu

1) Mierzona wartość jest odkładana na osi odciętych (X). Osie powinny zostać oznaczone symbolem lub nazwą zmiennej wraz z odpowiednią jednostką

2) Skale obu osi należy dobrać w taki sposób, aby krzywa wykresu przebiegała możlwie przez całą (większość) powierzchnię. W praktyce: osie nie muszą zaczynać się od 0, lecz od wartości mniejszej niż wartość zmierzona, a kończyć na wartości większej niż wartość zmierzona.

3) Przedziałki skali muszą być wyraźnie zaznaczone, tak, by łatwo było odczytać punkty pomiarowe.

4) Punkty doświadczalne powinny być wyraźnie zaznaczone, tak, aby łatwo było je odróżnić od przeprowadzonej krzywej (teoretycznej).

5) Należy nanieść niepewności pomiarowe, jeśli znane są niepewności zarówno wartości odłożonej na osi odciętych, jak i rzędnych, to zaznaczane są kreski przechodzące przez środek zmierzonego punktu (np, jeśli błąd zmierzonej wartości odłożonej na osi x wynosi a, to rysowana jest pozioma kreska o długości 2a, gdzie środek przechodzi dokładnie przez wartość punktu na osi odciętych)

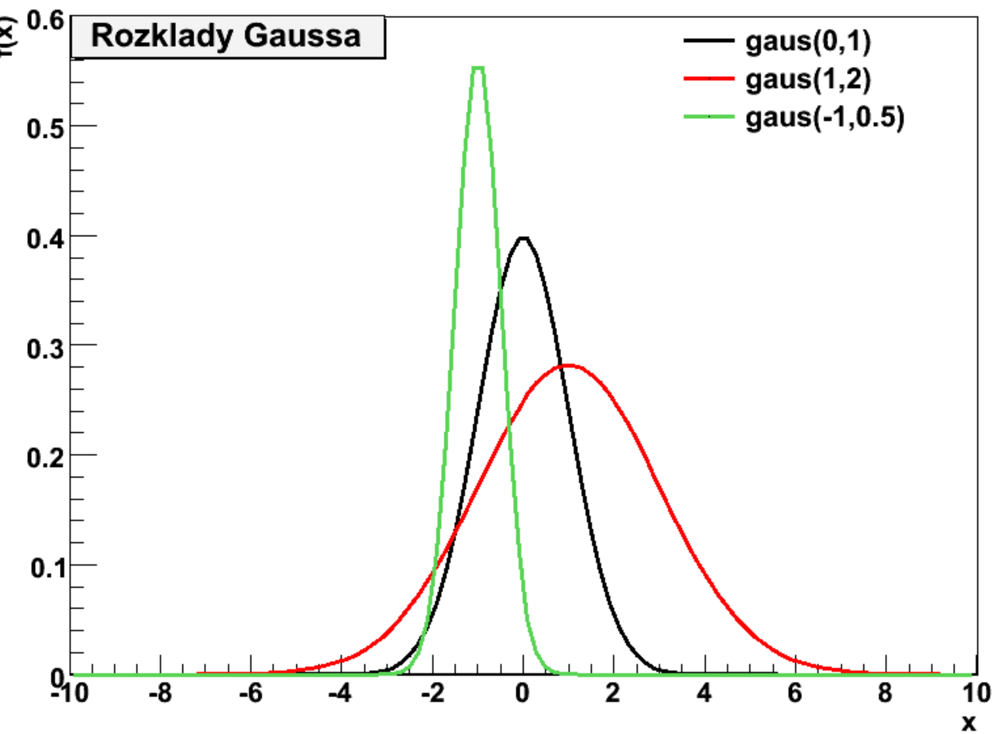
Przykłady poprawnych wykresów

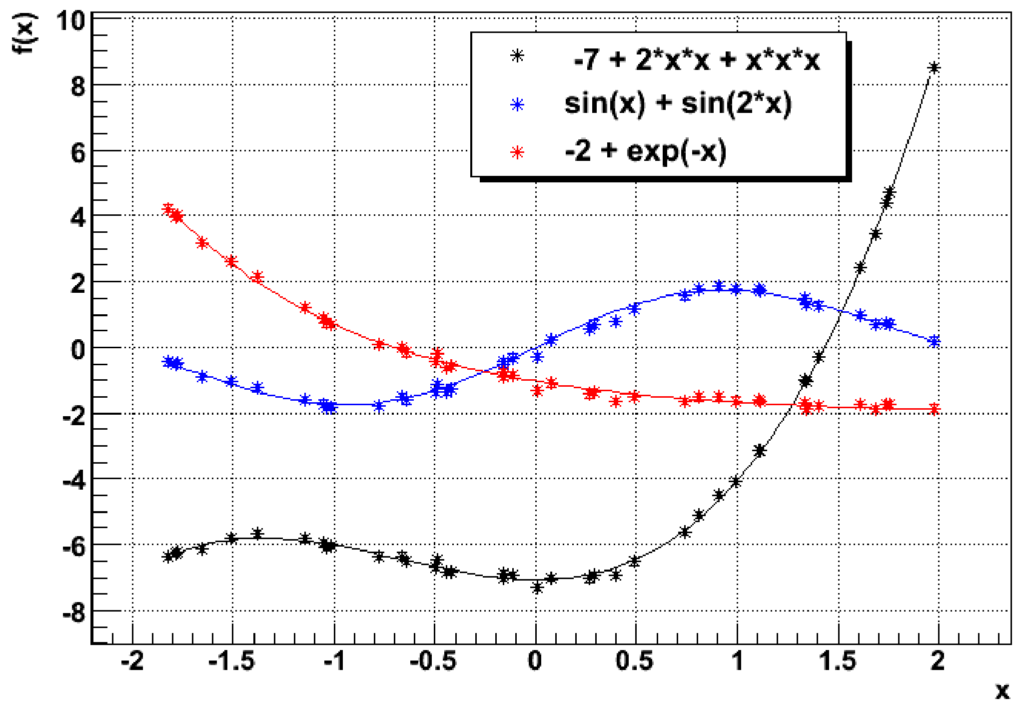
6) Prowadząc krzywą teoretyczną, nie łączymy ze sobą punktów pomiarowych. Wartości zmierzone powinny fluktuować wokół krzywej. Krzywa powinna mieścić się w granicach punktów pomiarowych. Krzywa powinna zostać przeprowadzona w sposób ciągły.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

x_0 − *wartość oczekiwana*

σ − *odchylenie standardowe*





Przykłady poprawnie zaprezentowanych danych

Do zimy 2011 w laboratoriach

Wydziału Fizyki Politechniki Warszawskiej

obowiązywały stare zasady rachunku błędów..

Dotychczasowa klasyfikacja niepewności pomiarowych

Rodzaje błędów pomiarowych:

- błędy grube, tzw. pomyłki, które należy wyeliminować (np. wykonujemy serię pomiarową 1000 zliczeń rozpadu danego pierwiastka, faktycznie zostało zmierzone 999 zliczeń)

- niepewności przypadkowe, związane z mierzoną wielkością lub samą metodą pomiaru: eksperymentatorem wraz z otoczeniem lub przyrządem, jakim mierzymy (np. pomiar średnicy pręta ołowianego: niepewność systematyczna obiektu wynikać może z różnicami średnicy w różnych miejsach pręta, niepewność systematyczne metody: różnice w dociskaniu śruby mikrometrycznej); związane z wieloma niezależnymi od siebie przyczynami, ich cecha charakterystyczną jest to, że układają się one symetrycznie wokół wartości rzeczywistej

- niepewności systematyczne, których źródłem są ograniczone możliwości pomiarowe związane np. z klasą użytego przyrządu oraz możliwością odczytu jego wskazań przez eksperymentatora.

Prezentacja wyników pomiaru

- Bezwzględna niepewność pomiarowa Δx określa o ile wynik pomiaru x może różnić się od wartości rzeczywistej x_0: $|x-x_0|\leq\Delta x$

Zapis ten oznacza, że nie znamy wartości rzeczywistej, ale zakładamy, że mieści się ona w przedziale: $(x-\Delta x) \leq x_0 \leq (x+\Delta x)$

Wynik końcowy zapisujemy jako: $x_0 = x \pm \Delta x$

- Niepewność względna pomiaru to stosunek wartości niepewności bezwzględnej do wartości otrzymanego wyniku, wyrażony w procentach: $\Delta x_{wzgl} = (\Delta x / x) * 100\%$

Niepewności pomiarowe

Pomiary wielkości fizycznych oraz szacowanie ich niepewności zasadniczono można podzielić na 3 kategorie:

1) przewaga niepewności systematycznych nad przypadkowymi,
2) przewaga niepewności przypadkowych nad systematycznymi,
3) niepewności przypadkowe są porównywalne z systematycznymi.

W każdej z tych kategorii dodatkowo należy rozważyć przypadki, kiedy:

- pomiar mierzonej wielkości następuje **bezpośrednio**
  (np. pomiar średnicy pręta śrubą mikrometryczną),
- pomiar mierzonej wielkości następuje **pośrednio**
  (np. wyznaczenie objętości ołowianej kulki poprzez pomiar jej średnicy).

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

1) Pomiar bezpośredni

Na wielkość niepewności systematycznej składają się:

- użyty przyrząd (klasa przyrządu): np. pomiar napięcia woltomierzem analogowym na zakresie 300V, klasa miernika to 1%: błąd związany z przyrządem wynosi $\Delta V_1 = 300V * 1\% = 3V$

- wykonanie czynności pomiarowej przez eksperymentatora: jeśli niepewność wychylenia się wskazówki w mierniku ocenimy na 1V, to całkowita niepewność pomiaru wyniesie $\Delta V = 4V$

Oba przyczynki nie kompensują się, lecz dodają z jednakowymi znakami.

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

2a) Pomiar pośredni – metoda różniczki zupełnej

Przypadek ten dotyczy większości pomiarów, gdzie niepewności systematyczne dominują nad przypadkowymi: np. pomiar objętości walca poprzez pomiar jego wysokości oraz średnicy podstawy.

Na przykładzie funkcji jednej zmiennej:

Chcemy obliczyć zmianę ΔY funkcji f(x) przy zmianie jej arumentu Δx

$$Y \pm \Delta Y = f(x \pm \Delta x)$$

Rozwijając w szereg Taylora mamy oraz zaniedbując wyrazy, gdzie Δx występuje w potędze wyższa niż 1:

$$Y \pm \Delta Y = f(x) \pm \Delta x \frac{df(x)}{dx}$$

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

Ponieważ:

$$Y = f(x)$$

$$\Delta Y = \left|\frac{df(x)}{dx}\right| \Delta x$$

Bezwzględna niepewność wielkości będącej funkcją jednej zmiennej (której wartość mierzymy) równa jest bezwzględnej niepewności wielkości mierzonej pomnozonej przez pochodną funkcji.

Uogólniając ten przypadek na funkcję wielu zmiennych Y= f(x_1, x_2, ..., x_n):

$$\Delta Y = \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \ldots + \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right| \Delta x_n$$

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

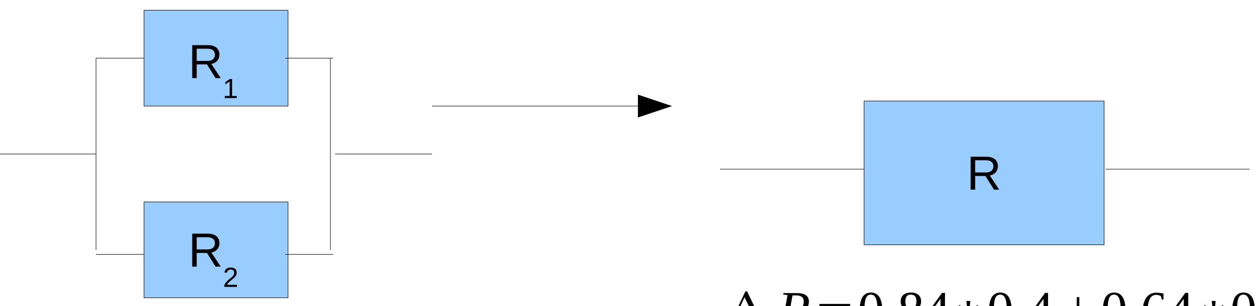
2a) Pomiar pośredni – metoda różniczki zupełnej - przykład

Mamy 2 równolegle połączone oporniki R_1 oraz R_2. Błąd wyznaczenia oporności każdego z nich wynosi 10%. Wyznaczyć wartość oporu zastępczego.

$$R_1 = 40\,\Omega\,,\ R_2 = 60\,\Omega\,,\ \Delta R_1 = 0{,}4\,\Omega\,,\ \Delta R_2 = 0{,}6\,\Omega$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 24\,\Omega \qquad \Delta R = \left|\frac{\partial R}{\partial R_1}\right| \Delta R_1 + \left|\frac{\partial R}{\partial R_2}\right| \Delta R_2$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2 (R_1 + R_2) + R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \qquad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1 (R_1 + R_2) + R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$



$$\Delta R = 0{,}84 * 0{,}4 + 0.64 * 0{,}6\,[\Omega] = 0{,}72\,\Omega$$

$$R = (24{,}0 \pm 0{,}7)\,\Omega$$

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

2a) Pomiar pośredni – metoda różniczki logarytmicznej

W przypadku, kiedy funkcja Y= f(x_1, x_2, ..., x_n) ma postać iloczynową,

wygodniej jest stosować tę metodę.

$$Y = A\, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

Po zlogarytmowaniu:

$$\ln Y = \ln A + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \ldots + a_n \ln x_n$$

Różniczka:

$$\frac{dY}{Y} = a_1 \frac{dx_1}{x_1} + a_2 \frac{dx_1}{x_2} \ln Y + \ldots + a_n \frac{dx_n}{x_n}$$

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right| = \sum \left| a_i \frac{\Delta x_i}{x_i} \right|$$

Niepewności systematyczne (duże w porównaniu z przypadkowymi)

$$Y = A\, x_1^{a_1}\, x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

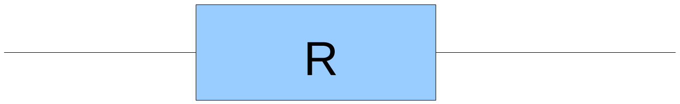
$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right| = \sum \left|a_i \frac{\Delta x_i}{x_i}\right|$$

Przykład: wyznaczenie oporności opornika, na którym zmierzono spadek napięcia U oraz przez który przepłynął prąd stały o natężeniu I

$$U = (31{,}07 \pm 0{,}52)\, V$$

$$I = (2{,}01 \pm 0{,}07)\, A$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{31{,}07}{2{,}01} V/A = 15{,}46\,\Omega$$



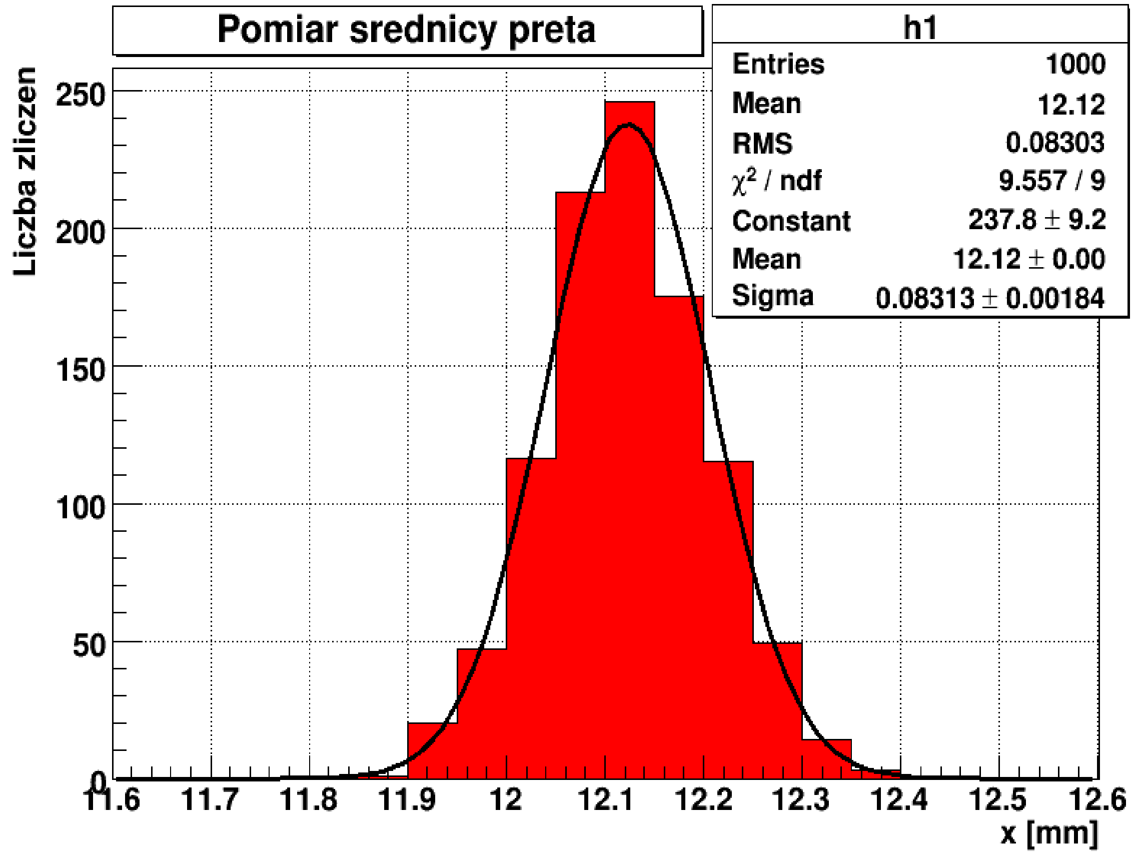
$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right| = \left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{-\Delta I}{I}\right| = 0{,}0167 + 0{,}0348 = 0{,}515$$

$$R = (15{,}4 \pm 0{,}8)\,\Omega$$

Niepewności przypadkowe (duże w porównaniu z systematycznymi)

1) Pomiar bezpośredni

Przykład: została zmierzona n=1000 razy grubość ołowianego pręta za pomocą śruby mikrometrycznej (niepewność systematyczna od śruby to Δx = 0,01 mm).



Wyniki zestawiono na histogramie, gdzie szerokość jednego przedziału wynosi Δx = 0,05 mm. Rysujemy rozkład częstości, a następnie dopasowujemy rozkład Gaussa, charakteryzujący się parametrami: wartością średnią a oraz odchyleniem standardowym σ.

Niepewności przypadkowe (duże w porównaniu z systematycznymi)

Średnia arytmetyczna: $$m = \overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru: $$S_x = \sqrt{\frac{\sum (\overline{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

Średni błąd kwadratowy średniej: $$S_{\overline{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (\overline{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

Wartości $\overline{x} \pm S_{\overline{x}}$ określają przedział, w jakim z prawdopodobieństwem 68% należy oczekiwać wartości rzeczywistej. Wzięcie przedziału równego $\overline{x} \pm 2\mathrm{S}_{\overline{x}}$ lub $\overline{x} \pm 3\mathrm{S}_{\overline{x}}$ spowoduje wzrost tego prawdopodobieństwa do 95,4% oraz 99,7%.

W praktyce podajemy wynik na poziomie 1 odchylenia standardowego.

Niepewności przypadkowe (duże w porównaniu z systematycznymi)

2) Pomiar pośredni

Załóżmy, że przedmiotem pomiary jest wielkość Z=f(X_1, X_2,...X_n).

Mierzone bezpośrednio są wielkości $X_1, X_2, \ldots X_n$

wraz z ich niepewnościami: $S_{\overline{X_1}}, S_{\overline{X_1}}, \ldots, S_{\overline{X_n}}$

Można wykazać, że $\overline{Z} = f(\overline{X_1}, \overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n})$

A także: $S_{\overline{Z}} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n} \right)^2 s^2_{\overline{x_i}}}$

Przykład: Zmierzona została długość ołowianego pręta: $\overline{l} \pm S_{\overline{l}} = (1{,}05 \pm 0{,}11)\, cm$

Celem jest wyznaczenie objętości tego pręta. Zmierzono także średnice, otrzymano wynik: $\overline{d} \pm S_{\overline{d}} = (5{,}02 \pm 0{,}12)\, cm$

Objętość: $V = \pi (\overline{d}/2)^2 \overline{l} = 20{,}78\, cm^3$

Błąd: $S_{\overline{V}} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f(\overline{l}, \overline{d})}{\partial \overline{l}} \right)^2 s^2_{\overline{l}} + \left(\frac{\partial f(\overline{l}, \overline{d})}{\partial \overline{d}} \right)^2 s^2_{\overline{d}}} = 2.39\, cm^3$ $\quad V = (20{,}8 \pm 2{,}4)\, cm^3$