Funkcje i wartości własne operatora Fokkera-Plancka

Rozpatrujemy jednowymiarowe równanie Fokkera – Plancka

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = L_{FP}\, p(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} J(x,t)$$

operator Fokkera – Plancka

$$D^{(1)} = D^{(1)}(x),\ D^{(2)} = D^{(2)}(x) \Rightarrow \boxed{L_{FP} = L_{FP}(x) = -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x)}$$

$$J(x,t) = -D^{(2)}(x) e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{\Phi(x)} p(x,t)\right] \Rightarrow \boxed{L_{FP} = \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)}(x) e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)}}$$

gdzie potencjał $\Phi(x) \equiv \ln D^{(2)}(x) - \int_0^x \frac{D^{(1)}(x')}{D^{(2)}(x')}\, dx'$

Poszukujemy funkcji i wartości własnych operatora Fokkera – Plancka

$$L_{FP}(x) p_n(x) = -\lambda_n p_n(x)$$

Zwykle $L_{FP} \neq L^{+}{}_{FP} \Rightarrow$ operator Fokkera-Plancka w ogólności nie jest hermitowski

$\tilde{L}(x) \equiv e^{\Phi(x)} L_{FP}(x)$ jest operatorem hermitowskim

D. $$\int_a^b P_1(x,t)\tilde{L}(x)P_2(x,t)dx = \int_a^b P_1 e^{\Phi}\frac{\partial}{\partial x}D^{(2)}e^{-\Phi}\frac{\partial}{\partial x}e^{\Phi}P_2 dx =$$ (całkujemy przez części)

$$P_1 e^{\Phi} D^{(2)} e^{-\Phi}\frac{\partial}{\partial x}e^{\Phi} P_2\Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x}P_1 e^{\Phi}\right) D^{(2)} e^{-\Phi}\frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi} P_2 dx =$$

dla warunków brzegowych typu bariery pochłaniającej lub odbijającej

$$=\left\{\begin{array}{c|c} 1^0\; P_1(a)=P_1(b)=0 & \\ \vee & \Rightarrow P_1 e^{\Phi} D^{(2)} e^{-\Phi}\frac{\partial}{\partial x}e^{\Phi} P_2\Big|_a^b = 0 \\ 2^0\; J_2(a) = -D^{(2)}(a)e^{-\Phi(a)}\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{\Phi(a)}P_2(a)\right]=0,\ J_2(b)=0 & \end{array}\right\} =$$

$$=-\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial x}P_1e^{\Phi}\right)D^{(2)}e^{-\Phi}\frac{\partial}{\partial x}e^{\Phi} P_2 dx =$$ (ponownie całkujemy przez części)

$$= D^{(2)}e^{-\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x}P_1e^{\Phi}\right)e^{\Phi} P_2\Big|_a^b + \int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial x}D^{(2)}e^{-\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial x}P_1e^{\Phi}\right)\right]e^{\Phi} P_2 dx = \left\{\begin{array}{c} 1^0\; P_2(a)=P_2(b)=0\\ \vee \\ 2^0\; J_1(a)=J_1(b)=0\end{array}\right\} =$$

$$=\int_a^b P_2 e^{\Phi} \frac{\partial}{\partial x}D^{(2)}e^{-\Phi}\frac{\partial}{\partial x}e^{\Phi} P_1 dx = \int_a^b P_2 e^{\Phi} L_{FP}P_1 dx = \int_a^b \left(e^{\Phi} L_{FP}P_1\right)P_2dx = \int_a^b\left(\tilde{L}P_1\right)P_2 dx \Rightarrow \tilde{L}^+ = \tilde{L}$$

$$L \equiv e^{-\frac{\Phi}{2}} \tilde{L} e^{-\frac{\Phi}{2}} = e^{\frac{\Phi}{2}} L_{FP} e^{-\frac{\Phi}{2}}$$ jest również operatorem hermitowskim

$$D.\ L^{+} = \left(e^{-\frac{\Phi}{2}} \tilde{L} e^{-\frac{\Phi}{2}} \right)^{+} = \left(e^{-\frac{\Phi}{2}} \right)^{+} \left(e^{-\frac{\Phi}{2}} \tilde{L} \right)^{+} = e^{-\frac{\Phi}{2}} \tilde{L}^{+} e^{-\frac{\Phi}{2}} = e^{-\frac{\Phi}{2}} \tilde{L} e^{-\frac{\Phi}{2}} = L$$

Związek pomiędzy wartościami i funkcjami własnymi *L* i *L*$_{FP}$

$$L\psi_n(x) = -\lambda_n \psi_n(x) \cdot \Big/ e^{-\frac{\Phi}{2}} \Rightarrow e^{-\frac{\Phi}{2}} e^{\frac{\Phi}{2}} L_{FP} e^{-\frac{\Phi}{2}} \psi_n = -\lambda_n e^{-\frac{\Phi}{2}} \psi_n \Rightarrow L_{FP}\left(e^{-\frac{\Phi}{2}} \psi_n \right) = -\lambda_n \left(e^{-\frac{\Phi}{2}} \psi_n \right)$$

Niech $\psi_n(x)$ będą funkcjami własnymi operatora L, odpowiadającymi wartościom własnym $-\lambda_n$

$$\Rightarrow p_n \equiv e^{-\frac{\Phi}{2}} \psi_n$$ są funkcjami własnymi *L*$_{FP}$

$$L_{FP}\, p_n = -\lambda_n p_n$$

L jest hermitowski, więc jego funkcje własne tworzą układ ortogonalny

$$\delta_{n,m} \propto \int \psi_n^{+} \psi_m dx = \int \left(e^{\Phi/2} p_n \right)^{+} \left(e^{\Phi/2} p_m \right) dx = \int p_n^{+} \left(e^{\Phi/2} \right)^{+} e^{\Phi/2} p_m dx = \int p_n^{+} e^{\Phi/2} e^{\Phi/2} p_m dx =$$

$$= \int e^{\Phi} p_n^{+} p_m dx = \int \left[p_s(x) \right]^{-1} p_n^{+} p_m dx$$

odwrotność stacjonarnej
gęstości prawdopodo-
bieństwa (z dokł. do stałej)

Wniosek: funkcje własne operatora niehermitowskiego *L*$_{FP}$ tworzą układ ortogonalny z wagą równą odwrotności stacjonarnej gęstości prawdopodobieństwa.

Ponieważ L_{FP} w ogólności nie jest hermitowski, potrzebujemy oddzielnego układu funkcji własnych operatora L^{+}_{FP}.

$$L\psi_n = -\lambda_n \psi_n \Rightarrow L^{+}\psi_n^{+} = -\lambda_n^{+}\psi_n^{+} = -\lambda_n \psi_n^{+}, \quad \lambda_n \in \Re$$

$$L = e^{\Phi/2} L_{FP} e^{-\Phi/2} \Rightarrow L^{+} = \left(e^{\Phi/2} L_{FP} e^{-\Phi/2}\right)^{+} = e^{-\Phi/2} L_{FP}^{+} e^{\Phi/2}$$

$$L^{+}\psi_n^{+} = -\lambda_n \psi_n^{+} \quad \cdot / e^{\Phi/2}$$

$$\Rightarrow e^{\Phi/2} e^{-\Phi/2} L_{FP}^{+} e^{\Phi/2} \psi_n^{+} = -\lambda_n e^{\Phi/2} \psi_n^{+} \Rightarrow L_{FP}^{+}\left(e^{\Phi/2}\psi_n^{+}\right) = -\lambda_n \left(e^{\Phi/2}\psi_n^{+}\right)$$

$$\Rightarrow L_{FP}^{+} q_n = -\lambda_n q_n, \quad q_n \equiv e^{\Phi/2}\psi_n^{+}$$ są funkcjami własnymi L^{+}_{FP}

Korzystając z ortogonalności funkcji własnych operatora L, otrzymujemy

$$\delta_{n,m} \propto \int \psi_n^{+}\psi_m dx = \int \left(e^{-\Phi/2} q_n\right)\left(e^{-\Phi/2} q_m\right)^{+} dx = \int e^{-\Phi} q_m^{+} q_n dx = \int p_s(x) q_m^{+} q_n dx$$

Funkcje własne L^{+}_{FP} są ortogonalne z wagą równą stacjonarnej gęstości prawdopodobieństwa

Wniosek $p_n \equiv e^{-\Phi/2}\psi_n = e^{-\Phi/2}\left(e^{-\Phi/2} q_n\right)^{+} = e^{-\Phi} q_n^{+} = p_s q_n^{+}$

Wniosek $\delta_{n,m} \propto \int \psi_n^{+}\psi_m dx = \int e^{-\Phi/2} q_n e^{\Phi/2} p_m dx = \int q_n p_m dx$

$\Rightarrow q_n, p_m$ tworzą układ biortogonalny

Wartości własne operatora *L* są nieujemne

$$D.\quad \int_a^b p_n e^{\Phi} L_{FP}\, p_n dx = \int_a^b p_n e^{\frac{\Phi}{2}} e^{\frac{\Phi}{2}} L_{FP}\, e^{-\frac{\Phi}{2}} e^{\frac{\Phi}{2}} p_n dx = \int_a^b \psi_n L \psi_n dx = -\lambda_n \int_a^b \psi_n^2 dx \propto -\lambda_n$$

$$\int_a^b p_n e^{\Phi} L_{FP}\, p_n dx = \int_a^b p_n e^{\Phi} \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)} e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi} p_n dx = -\int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} p_n e^{\Phi} \right) D^{(2)} e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi} p_n dx =$$

$$= -\int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} p_n e^{\Phi} \right)^2 \underbrace{D^{(2)}}_{\geq 0} \underbrace{e^{-\Phi}}_{\geq 0} dx \leq 0 \Rightarrow \lambda_n \geq 0$$

(całkujemy przez części i korzystamy z warunków brzegowych w postaci bariery odbijającej lub pochłaniającej)

(funkcja podcałkowa jest nieujemna, więc i całka jest nieujemna)

Rozwiązania równania Fokkera-Plancka $\frac{\partial p}{\partial t} = L_{FP}\, p$

można poszukiwać w postaci $p(x,t) = p(x)e^{-\lambda t} \Rightarrow L_{FP}\, p = -\lambda p$

Wniosek: dowolne rozwiązanie równania Fokkera-Plancka można rozłożyć w bazie funkcji własnych

$$p(x,t) = \sum_n A_n p_n(x) e^{-\lambda_n t} \Rightarrow p(x,0) = \sum_n A_n p_n(x)$$

$$\Rightarrow \int q_m(x) p(x,0) dx = \sum_n A_n \int q_m(x) p_n(x) dx \propto \sum_n A_n \delta_{mn} = A_m$$

Np. prawdopodobieństwo przejścia uzyskujemy, przyjmując warunek początkowy

$$p(x,0|x_0,0) = \delta(x - x_0) \Rightarrow A_m \propto \int q_m(x)\delta(x - x_0) dx = q_m(x_0)$$

$$\Rightarrow p(x,t|x_0,0) \propto \sum_n q_n(x_0) p_n(x) e^{-\lambda_n t}$$

Rozwiązanie stacjonarne

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_n > 0,\ n = 1,2,3\ldots \Rightarrow p(x,t) \propto \sum_n A_n p_n(x) e^{-\lambda_n t} \xrightarrow[t\to\infty]{} q_0(x_0) p_0(x)$$

$$\int p(x,t) dx = 1 \Rightarrow q_0(x_0) \int p_0(x) dx = 1 \Rightarrow q_0(x_0) = 1 \Rightarrow q_0(x) \equiv 1$$

$$\Rightarrow p_s(x) = p_0(x)$$

Przyjmujemy takie normowanie funkcji własnych

$$L_{FP} = \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)}(x) e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)},$$ Jawna postać operatora *L*

$$\boxed{L} = e^{\Phi/2} L_{FP} e^{-\Phi/2} = e^{\Phi/2} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{D^{(2)}} e^{-\Phi/2} \sqrt{D^{(2)}} e^{-\Phi/2} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi/2} = \boxed{-\hat{a}a,}$$

$$\boxed{a \equiv \sqrt{D^{(2)}} e^{-\Phi/2} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi/2}, \quad \hat{a} \equiv -e^{\Phi/2} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{D^{(2)}} e^{-\Phi/2}}$$

Dla dowolnej funkcji *f*

$$af = \sqrt{D^{(2)}} e^{-\Phi/2} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi/2} f = \frac{1}{2} \sqrt{D^{(2)}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} f + \sqrt{D^{(2)}} \frac{\partial f}{\partial x} = \left\{ \Phi = \ln D^{(2)} - \int_0^x \frac{D^{(1)}(x')}{D^{(2)}(x')} dx' \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{D^{(2)}} \left[\frac{1}{D^{(2)}} \frac{\partial D^{(2)}}{\partial x} - \frac{D^{(1)}}{D^{(2)}} \right] f + \sqrt{D^{(2)}} \frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{D^{(2)}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2\sqrt{D^{(2)}}} \left[\frac{\partial D^{(2)}}{\partial x} - D^{(1)} \right] f$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= \sqrt{D^{(2)}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2\sqrt{D^{(2)}(x)}} \left[\frac{\partial D^{(2)}(x)}{\partial x} - D^{(1)}(x) \right], \\ \hat{a} &= -\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{D^{(2)}} + \frac{1}{2\sqrt{D^{(2)}(x)}} \left[\frac{\partial D^{(2)}(x)}{\partial x} - D^{(1)}(x) \right] \end{aligned}} \qquad (\spadesuit)$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} - V(x), \quad V(x) = \frac{1}{4D^{(2)}} \left(\frac{dD^{(2)}}{dx} - D^{(1)} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{dD^{(1)}}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d^2 D^{(2)}}{dx^2}}$$

(wyprowadzenie na następnym slajdzie)

Jawna postać operatora L (wyprowadzenie końcowego wzoru z poprzedniego slajdu)

Dla dowolnej funkcji f

$$
\begin{aligned}
-\hat{a}af &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{D^{(2)}} - \frac{1}{2\sqrt{D^{(2)}}}\left(\frac{\partial D^{(2)}}{\partial x} - D^{(1)}\right)\right]\left[\sqrt{D^{(2)}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2\sqrt{D^{(2)}}}\left(\frac{\partial D^{(2)}}{\partial x} - D^{(1)}\right)\right] f \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x}D^{(2)}\frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial D^{(2)}}{\partial x} - D^{(1)}\right)}_{(\clubsuit)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D^{(2)}}{\partial x} - D^{(1)}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4D^{(2)}}\left(\frac{\partial D^{(2)}}{\partial x} - D^{(1)}\right)^2\right] f \\
&= \frac{\partial}{\partial x}D^{(2)}\frac{\partial f}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 D^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial D^{(1)}}{\partial x}\right) f + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D^{(2)}}{\partial x} - D^{(1)}\right)\frac{\partial f}{\partial x}}_{(\clubsuit)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D^{(2)}}{\partial x} - D^{(1)}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{4D^{(2)}}\left(\frac{\partial D^{(2)}}{\partial x} - D^{(1)}\right)^2 f \\
&= \frac{\partial}{\partial x}D^{(2)}\frac{\partial f}{\partial x} - \left[\frac{1}{4D^{(2)}}\left(\frac{\partial D^{(2)}}{\partial x} - D^{(1)}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial D^{(1)}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D^{(2)}}{\partial x^2}\right] f = \left[\frac{\partial}{\partial x}D^{(2)}\frac{\partial}{\partial x} - V(x)\right] f
\end{aligned}
$$

Dowolne równanie Fokkera-Plancka z niezależnymi od czasu współczynnikami można przez odpowiednią zamianę zmiennych sprowadzić do postaci z $D^{(2)} = D$ = const, wówczas

$$D = const \Rightarrow \Phi = \ln D - \frac{1}{D}\int_0^x D^{(1)}(x')dx' \equiv \frac{f(x)}{D}$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{1}{D}D^{(1)}(x) = \frac{f'(x)}{D} \Rightarrow D^{(1)}(x) = -f'(x), \quad \frac{dD^{(1)}}{dx} = -f''(x)$$

$$a = \sqrt{D}e^{-f/2D}\frac{\partial}{\partial x}e^{f/2D} \overset{(\spadesuit)}{=} \sqrt{D}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2\sqrt{D}}f'(x)$$

$$\hat{a} \equiv -\sqrt{D}e^{f/2D}\frac{\partial}{\partial x}e^{-f/2D} \overset{(\spadesuit)}{=} -\sqrt{D}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2\sqrt{D}}f'(x)$$

$$\boxed{L = D\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x), \quad V(x) = \frac{1}{4D}\left(D^{(1)}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{dD^{(1)}}{dx} = \frac{1}{4D}\left(f'(x)\right)^2 - \frac{1}{2}f''(x)}$$

Równanie Fokkera-Plancka z $D^{(2)}=D=const$ jest równoważne równaniu Schrödingera

$$\frac{\partial p}{\partial t}=L_{FP}\,p \quad \cdot/e^{\Phi/2} \qquad \text{(potencjał } \Phi \text{ nie zależy od czasu!)}$$

$$\frac{\partial e^{\Phi/2}p}{\partial t}=e^{\Phi/2}L_{FP}e^{-\Phi/2}e^{\Phi/2}p=Le^{\Phi/2}p$$

$$\tilde{p}\equiv e^{\Phi/2}p\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}=L\tilde{p},\quad L=D\frac{\partial^2}{\partial x^2}-V(x)}$$

W równaniu Schrödingera

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi,\quad H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V_s(x)$$

dokonajmy transformacji zmiennych

$$t=-i\hbar t',\quad m=\frac{\hbar^2}{2D} \qquad t'=\frac{it}{\hbar}\Rightarrow\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t'}=\frac{i}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial t'}$$

która prowadzi do przetransformowanego równania Fokkera-Plancka z $V_S(x)=V(x)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t'}=\left[D\frac{\partial^2}{\partial x^2}-V_s(x)\right]\psi$$

Podobnie równoważne są niezależne od czasu równania Schrödingera i Fokkera-Plancka

Funkcje własne dla procesu Wienera

Bariera odbijająca
$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial p}{\partial x}(1,t) = 0}$$

Można przyjąć $\Phi = \ln D \rightarrow \Phi = 0$ (dowolną stałą można włączyć do stałej normującej)

Zagadnienie własne
$$L = L_{FP} \Rightarrow \psi_n = p_n \Rightarrow D\frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} = -\lambda_n p_n$$

Wartości i funkcje własne
$$\boxed{\begin{array}{l} n = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0, \quad p_0(x) = 1, \quad q_0(x) = 1 \\ n \geq 1 \Rightarrow \lambda_n = Dn^2\pi^2, \quad p_n(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x), \quad q_n(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x) \end{array}}$$

Normowanie
$$\int_0^1 p_n(x) q_m(x) dx = \delta_{m,n}, \quad n, m = 0,1,2\ldots$$

Warunek pocz.
$$p(x,t|x_0,0) = \delta(x - x_0)$$

Rozwiązanie
$$p(x,t|x_0,0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\cos(n\pi x_0)\cos(n\pi x)\exp(-\lambda_n t) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} p_s(x) = 1$$

Stacjonarna funkcja autokorelacji
$$\langle x(t)x(0)\rangle_s = \int_0^1 dx \int_0^1 dx_0 x x_0 p(x,t|x_0,0) p_s(x) =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-4}\exp(-\lambda_{2n+1}t) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{4}$$

Funkcje własne dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial x}(xp) + D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}} \Rightarrow D^{(1)} = -\gamma x,\ D^{(2)} = D$$

$$\Phi = \ln D + \frac{1}{D}\int_0^x \gamma x' dx' = \ln D + \frac{\gamma}{2D}x^2 \to \Phi = \frac{\gamma}{2D}x^2 = \frac{f(x)}{D} \Rightarrow f(x) = \frac{\gamma}{2}x^2$$

$$a = \sqrt{D}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma x}{2\sqrt{D}}, \quad \hat{a} = -\sqrt{D}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma x}{2\sqrt{D}}$$

Wprowadźmy nowe operatory i zmienne

$$b \equiv \frac{a}{\sqrt{\gamma}} \Rightarrow a = \sqrt{\gamma}b, \quad b^+ \equiv \frac{\hat{a}}{\sqrt{\gamma}} \Rightarrow \hat{a} = \sqrt{\gamma}b^+$$

$$b = \frac{a}{\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\frac{D}{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{D}}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\frac{\gamma}{2D}}x\right)$$

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{\gamma}{2D}}x \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \xi\right), \quad b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \xi\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = \sqrt{\frac{\gamma}{2D}}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L = -\hat{a}a = -\gamma b^+ b$$

$$\Rightarrow L\psi_n = -\lambda_n \psi_n \Leftrightarrow \boxed{\gamma b^+ b\,\psi_n = \lambda_n \psi_n}$$ zagadnienie własne

Zagadnienie własne $\gamma b^{+} b\,\psi_n = \lambda_n \psi_n$

przypomina zagadnienie własne $H\Psi_n = \hbar\omega\left(a^{+}a + \tfrac{1}{2}\right)\Psi_n = E_n\Psi_n$ (oscylator harmoniczny)

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow \lambda_n = \gamma n, \quad n = 0,1,2,\ldots \\ \psi_n(x) = \sqrt[4]{\dfrac{\gamma}{2\pi D}}\,\dfrac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}, \quad \xi \equiv \sqrt{\dfrac{\gamma}{2D}}\,x \end{array}}$$

Normowanie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\psi_m^{+}(x)dx = \delta_{m,n}$

Funkcje własne operatora Fokkera – Plancka przyjmują więc postać

$$\boxed{\begin{array}{l} \Phi(x) = \dfrac{\gamma}{2D}x^2, \quad p_n(x) = e^{-\Phi(x)/2}\psi_n(x) \\ \Rightarrow p_n(x) = \sqrt[4]{\dfrac{\gamma}{2\pi D}}\,\dfrac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,H_n\!\left(\sqrt{\dfrac{\gamma}{2D}}\,x\right)\exp\!\left(-\dfrac{\gamma}{2D}x^2\right) \end{array}}$$

wielomiany Hermitte'a

Przyjmujemy normowanie $\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)q_m(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\Phi}{2}}\psi_n(x)e^{\frac{\Phi}{2}}\psi_m^{+}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\psi_m^{+}(x)dx = 1$