Stochastyczne równania różniczkowe

Równanie Langevina

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a[x(t),t] + b[x(t),t]\xi(t), \quad \langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')}$$

$\xi(t)$ są zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie Gaussa (średnia 0, wariancja 1), niezależnie losowanymi w chwilach $t \neq t'$

Równanie Langevina formalnie można przepisać w postaci:

$$dx = a[x(t),t]dt + b[x(t),t]\xi(t)dt, \quad \xi(t)dt \equiv dW(t)$$ proces Wienera

proces o przyrostach niezależnych

Stochastyczne równanie różniczkowe

$$\boxed{dx = a[x(t),t]dt + b[x(t),t]dW(t)}$$

Całka stochastyczna nie jest zwykłą całką, tylko zmienną losową. Obliczania całek stochastycznych będziemy się uczyć na tym wykładzie.

Formalne rozwiązanie

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a[x(t),t]dt + \int_{t_0}^{t} b[x(t),t]dW$$ ← całka stochastyczna

Jednoznaczne rozwiązanie równania stochastycznego istnieje, jeżeli

$$\exists K\ \forall x,y,t' \in (t,t_0) \quad |a(x,t') - a(y,t')| + |b(x,t') - b(y,t')| \leq K|x-y|$$ warunek Lipschitza

$$\exists K\ \forall x,t' \in (t,t_0) \quad |a(x,t')|^2 + |b(x,t')|^2 \leq K(1+|x|^2)$$

Zbieżność ciągu zmiennych losowych w sensie średniokwadratowym

$\omega \in \Omega$ przestrzeń zdarzeń losowych

$X_n = X_n(\omega), \quad X = X(\omega)$ zmienne losowe

Jeden z rodzajów zbieżności ciągu zmiennych losowych, znany z 2. roku z wykładu Probabilistyka

$$ms - \lim_{n\to\infty} X_n = X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\langle (X_n - X)^2 \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \int d\omega p(\omega) [X_n(\omega) - X(\omega)]^2 = 0$$

Całka stochastyczna (w sensie Ito)

$$\int_{t_0}^{t} G(t') dW(t') = ms - \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} G(t_{i-1}) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\}$$

Całka stochastyczna jest zmienną losową, będącą granicą pewnego ciągu zmiennych losowych. Dla konkretnej realizacji procesu Wienera całkę stochastyczną można obliczyć, otrzymując konkretną liczbę. Jednak dla innej realizacji procesu Wienera liczba ta w ogólności będzie inna. Całka stochastyczna jako zmienna losowa podlega więc pewnemu rozkładowi prawdopodobieństwa.

Definicja ta jest równoważna następującej granicy ciągu sum cząstkowych

$$S_n \equiv \sum_{i=1}^{n} G(t_{i-1}) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\langle \left[S_n - \int_{t_0}^{t} G(t') dW(t') \right]^2 \right\rangle = 0$$

W powyższych definicjach

$G(t)$ funkcja spełniająca <u>zasadę przyczynowości</u>

$G(t_{i-1})$ nie zależy od $W(t_i) - W(t_{i-1})$

Dla każdego n suma cząstkowa S_n jest więc zmienną losową. Granica ciągu zmiennych losowych S_n przy $n \to \infty$ w sensie średniokwadratowym jest więc zmienną losową, równą z definicji całce stochastycznej

Równoważność równania stochastycznego Ito i równania Fokkera-Plancka

Rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego (np. numeryczne, o czym dalej) z konkretnymi funkcjami $a(x,t)$, $b(x,t)$ i warunkiem początkowym $x(0) = x_0$ dają różne realizacje procesu stochastycznego $x(t)$ („przebiegi czasowe $x(t)$) dla różnych realizacji procesu Wienera $W(t)$ (różnych losowanych wartości szumu Gaussowskiego $\xi(t)$ w różnych chwilach czasu).
Rozwiązanie równania Fokkera – Plancka przy tym samym warunku początkowym $x(0) = x_0$ daje zależny od czasu rozkład prawdopodobieństwa $p(x,t|x_0,0)$ że wartość procesu stochastycznego w chwili t wynosi x.
Równoważność stochastycznego równania różniczkowego i równania Fokkera – Plancka oznacza, że jeśli rozwiązując stochastyczne równanie różniczkowe wygenerujemy wiele realizacji procesu $x(t)$ z tym samym warunkiem początkowym $x(0) = x_0$, a następnie dla konkretnej chwili t sporządzimy (unormowany) histogram uzyskanych wartości x, to histogram ten będzie dobrym przybliżeniem rozkładu (gęstości) prawdopodobieństwa $p(x,t|x_0,0)$.

Równanie stochastyczne w sensie Ito jest równoważne równaniu Fokkera-Plancka

$$dx = a[x(t),t]dt + b[x(t),t]dW(t) \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[a(x,t)p] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b^2(x,t)p]$$

To wykażemy później, teraz skoncentrujmy się na przykładach.

W przypadku wielowymiarowym

$$d\vec{x} = \vec{A}(\vec{x}(t),t)dt + \hat{B}(\vec{x}(t),t)d\vec{W}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(\vec{x},t)p(\vec{x},t)] + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{\left[\hat{B}(\vec{x},t)\hat{B}^T(\vec{x},t)\right]_{i,j} p(\vec{x},t)\right\}$$

gdzie $\vec{x}$, $d\vec{W}$, $\vec{A}$ są wektorami m-wymiarowymi, $\hat{B}$ jest macierzą $m \times m$,

$$d\vec{W}(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_m(t) \end{pmatrix} dt, \quad \langle \xi_i(t)\xi_j(t')\rangle = \delta_{i,j}\delta(t-t')$$

Przykład

Równanie Kramersa (cząstka Browna w potencjale, w jednym wymiarze)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -V'(x) - \beta\frac{dx}{dt} + \sqrt{2\beta k_B T}\,\xi(t) \Leftrightarrow$$

Równanie Langevina dla jednowymiarowej cząstki Browna jest równoważne równaniu Fokkera-Plancka zw. równaniem Kramersa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{V'(x)}{m} - \dfrac{\beta}{m}v + \dfrac{\sqrt{2\beta k_B T}}{m}\xi(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = v\,dt \\ dv = -\dfrac{1}{m}\left[V'(x) + \beta v\right]dt + \dfrac{\sqrt{2\beta k_B T}}{m}dW \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(vp) + \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\left[V'(x) + \beta v\right]p\right\} + \frac{\beta k_B T}{m^2}\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}, \quad p = p(x,v,t)}$$

W równaniu Langevina

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad \vec{A}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{m}[V'(x) + \beta v] \end{pmatrix}, \quad \hat{B}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2\beta k_B T}}{m} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{B}\hat{B}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\beta k_B T}{m^2} \end{pmatrix}$$

Podobnie, równanie Langevina dla cząstki Browna w trzech wymiarach jest równoważne równaniu równaniu Kramersa w postaci

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_i}v_i+\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial v_i}\left[-\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i}+\beta v\right]+\frac{\beta k_B T}{m^2}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}\right\}p,\\ &p=p\left(x,y,z,v_x,v_y,v_z,t\right)\end{aligned}}$$

Równanie Smoluchowskiego (przetłumiona cząstka Browna w potencjale, w jednym wymiarze)

$$\beta \to \infty, m \to 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} \to 0 \Rightarrow v \to const$$

Przyjmujemy, że prędkość cząstki szybko osiąga wartość stacjonarną, i traktujemy ją jako stałą

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = -\frac{1}{\beta}\left[V'(x) - \sqrt{2\beta k_B T}\,\xi(t)\right]$$

Patrz uwaga (i.) na następnym slajdzie

$$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{V'(x)}{\beta} + \sqrt{\frac{2k_BT}{\beta}}\xi(t) \Leftrightarrow dx = -\frac{V'(x)}{\beta}dt + \sqrt{\frac{2k_BT}{\beta}}dW$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V'(x)}{\beta}p\right] + \frac{k_BT}{\beta}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \qquad p = p(x,t)}$$

Równanie Langevina dla Brownowskiej cząstki przetłumionej jest równoważn równaniu Fokkera-Plancka zw. równaniem Smoluchowskiego

W szczególności dla cząstki w potencjale oscylatora harmonicznego równanie Smoluchowskiego ma postać jak dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka

$$V(x) = \frac{1}{2}k\beta x^2, \quad D = \frac{2k_BT}{\beta} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[kxp] + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

związek Einsteina

(i.) Jeśli rozpatrzymy proste równanie

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}v + \frac{C}{m}, \quad C = \mathrm{const}, \quad v(0) = v_0,$$

to rozwiązanie ma postać

$$v(t) = \frac{C}{\beta} + \left(v_0 - \frac{C}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{\beta t}{m}\right) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{C}{\beta} = \mathrm{const},$$

Widać, że rozwiązanie zbiega do wartości stałej wykładniczo, z czasem charaktersytycznym $\tau = m/\beta$. Jeżeli $m \to 0$, $\beta \to \infty$, to $\tau \to 0$ i zbieżność jest "natychmiastowa". Mówimy wtedy o **cząstce przetłumionej**. Jest to oczywiście warunek niefizyczny, ale w praktyce oznacza tyle, że prędkość cząstki Brownowskiej w potencjale zbiega do wartości "stacjonarnej" (zależnej od położenia $x(t)$ i aktualnej wartości szumu stochastycznego $\xi(t)$) *znacznie szybciej niż zachodzą wszelkie zmiany położenia oraz wartości szumu.*

(ii.) Przedstawione "wyprowadzenie" równania Smoluchowskiego jest czysto heurystyczne. W istocie dla $\beta \to \infty$, $m \to 0$ można pokazać ściśle (aczkolwiek nie jest to bynajmniej proste), że jeżeli gęstość prawdopodobieństwa dla położenia i prędkości cząstki $p(x, v, t)$ spełnia równanie Kramersa,

$$\frac{\partial p(x,v,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(vp(x,v,t)) + \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\left[V'(x) + \beta v\right]p(x,v,t)\right\} + \frac{\beta k_B T}{m^2}\frac{\partial^2 p(x,v,t)}{\partial v^2},$$

to brzegowa gęstość prawdopodobieństwa $p(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,v,t)dv$ dla położenia cząstki spełnia równanie Smoluchowskiego,

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V'(x)}{\beta}p(x,t)\right] + \frac{k_B T}{\beta}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}.$$

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} W(t')dW(t') = \frac{1}{2}\left[W(t)^2 - W(t_0)^2 - (t - t_0)\right]}$$

Przykład obliczania całki stochastycznej w sensie Ito

Niech $W_i \equiv W(t_i)$, $\Delta W_i = W_i - W_{i-1}$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots n$. Należy wykazać, że

$$\mathrm{ms} - \lim_{n\to\infty} S_n = \mathrm{ms} - \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} W_{i-1}(W_i - W_{i-1})\right] = \mathrm{ms} - \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} W_{i-1}\Delta W_i\right) = \frac{1}{2}\left[(W(t))^2 - (W(t_0))^2 - (t - t_0)\right].$$

Zauważmy, że

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} W_{i-1}\Delta W_i = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left[(\underbrace{W_{i-1} + \Delta W_i}_{=W_i})^2 - (W_{i-1})^2\right]}_{=W_1^2 - W_0^2 + W_2^2 - W_1^2 + \ldots W_n^2 - W_{n-1}^2 = W_n^2 - W_0^2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2 = \frac{1}{2}\left[(W(t))^2 - (W(t_0))^2\right] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{ms} - \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\left[(W(t))^2 - (W(t_0))^2\right] - \frac{1}{2}\mathrm{ms} - \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2\right),$$

wystarczy więc wykazać, że

$$\mathrm{ms} - \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2\right) = t - t_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left\langle\left[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2 - (t - t_0)\right]^2\right\rangle = 0$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \left[\sum_{i=1}^{n} (\Delta W_i)^2 - (t-t_0) \right]^2 \right\rangle &= \left\langle \left[\sum_{i=1}^{n} (\Delta W_i)^2 - (t-t_0) \right] \left[\sum_{j=1}^{n} (\Delta W_j)^2 - (t-t_0) \right] \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\Delta W_i)^2 (\Delta W_j)^2 - 2(t-t_0) \sum_{i=1}^{n} (\Delta W_i)^2 + (t-t_0)^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} (\Delta W_i)^4 + 2 \sum_{i>j} (\Delta W_i)^2 (\Delta W_j)^2 - 2(t-t_0) \sum_{i=1}^{n} (\Delta W_i)^2 + (t-t_0)^2 \right\rangle
\end{aligned}
$$

Korzystamy z faktu, że przyrosty procesu Wienera $\Delta W_i = \xi_i \Delta t_i$, $i = 1, 2, \ldots n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, podlegającymi rozkładowi Gaussa, w związku z tym momenty ich rozkładu są znane,

$$
\rho(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi_i^2}{2}} \Rightarrow \rho(\Delta W_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta t_i} e^{-\frac{(\Delta W_i)^2}{2\Delta t_i}} \Rightarrow \langle (\Delta W_i)^2 \rangle = \Delta t_i, \ \ \langle (\Delta W_i)^4 \rangle = 3(\Delta t_i)^2.
$$

Ponadto dla $i > j$ z niezależności przyrostów wynika, że $\langle (\Delta W_i)^2 (\Delta W_j)^2 \rangle = \langle (\Delta W_i)^2 \rangle \langle (\Delta W_j)^2 \rangle = \Delta t_i \Delta t_j$, stąd

$$
\left\langle \left[\sum_{i=1}^{n} (\Delta W_i)^2 - (t-t_0) \right]^2 \right\rangle = 3 \sum_{i=1}^{n} (\Delta t_i)^2 + 2 \sum_{i>j} \Delta t_i \Delta t_j - 2(t-t_0) \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i + (t-t_0)^2
$$

$$
= 2 \sum_{i=1}^{n} (\Delta t_i)^2 + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \Delta t_i \Delta t_j}_{=\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i\right)^2} - 2(t-t_0) \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i + (t-t_0)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (\Delta t_i)^2 + \Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i}_{=t-t_0} - (t-t_0) \Big]^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (\Delta t_i)^2.
$$

$\Delta t_i \simeq (t-t_0)/n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\Delta t_i)^2 \propto n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow \mathrm{ms} - \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (\Delta W_i)^2 \right) = \lim_{n\to\infty} \left\langle \left[\sum_{i=1}^{n} (\Delta W_i)^2 - (t-t_0) \right]^2 \right\rangle = 0$

Ważny wynik:

$$\boxed{[dW(t)]^2 = dt \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} G(t')[dW(t')]^2 = ms - \lim_{n\to\infty} \sum_i G_{i-1}(\Delta W_i)^2 = \int_{t_0}^{t} G(t')dt'}$$

$$(\spadesuit) = \lim_{n\to\infty} \left\langle \left\{ \sum_{i=1}^{n} G_{i-1}(\Delta W_i)^2 - \int_{t_0}^{t} G(t')dt' \right\}^2 \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \left\{ \sum_{i=1}^{n} G_{i-1}\left[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right] \right\}^2 \right\rangle$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \left\{ \sum_{i=1}^{n} G_{i-1}\left[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right] \right\} \left\{ \sum_{j=1}^{n} G_{j-1}\left[(\Delta W_j)^2 - \Delta t_j\right] \right\} \right\rangle$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \langle G_{i-1}^2 \left[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right]^2 \rangle + 2\sum_{i>j} \langle G_{j-1}\left[(\Delta W_j)^2 - \Delta t_j\right] G_{i-1}\left[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right] \rangle \right\}$$

- G_{i-1}^2 oraz $\left[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right]^2$ są niezależne, bo $\Delta W_i = W_i - W_{i-1}$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$,
- Dla $i > j$ $G_{j-1}\left[(\Delta W_j)^2 - \Delta t_j\right] G_{i-1}$ oraz $(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i$ są niezależne,

$$(\spadesuit) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \langle G_{i-1}^2 \rangle \langle \left[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right]^2 \rangle + 2\sum_{i>j} \langle G_{j-1}\left[(\Delta W_j)^2 - \Delta t_j\right] G_{i-1} \rangle \langle (\Delta W_i)^2 - \Delta t_i \rangle \right\}$$

- $\langle \left[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right]^2 \rangle = \langle (\Delta W_i)^4 \rangle - 2\Delta t_i \langle (\Delta W_i)^2 \rangle + (\Delta t_i)^2 = 3(\Delta t_i)^2 - 2(\Delta t_i)^2 + (\Delta t_i)^2 = 2(\Delta t_i)^2$,
- $\langle (\Delta W_i)^2 - \Delta t_i \rangle = \langle (\Delta W_i)^2 \rangle - \Delta t_i = \Delta t_i - \Delta t_i = 0$,

$$0 \le (\spadesuit) = 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle G_{i-1}^2 \rangle (\Delta t_i)^2 \le \lim_{n\to\infty} n \frac{1}{n^2} \max_i \langle G_{i-1}^2 \rangle (t - t_0)^2 = 0 \Rightarrow (\spadesuit) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Podobnie można wykazać, że $\boxed{[dW(t)]^{n+2} = 0, n \geq 1; \quad dW(t)dt = 0}$

Całkowanie wielomianów

$$d[W(t)]^n = [W(t) + dW(t)]^n - W(t)^n = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} W(t)^{n-r} (dW(t))^r =$$

$$nW(t)^{n-1} dW(t) + \frac{n(n-1)}{2} W(t)^{n-2} dt \Rightarrow \boxed{\int_{t_0}^{t} W(t')^n dW(t') = \frac{1}{n+1}\left[W(t)^{n+1} - W(t_0)^{n+1}\right] - \frac{n}{2}\int_{t_0}^{t} W(t')^{n-1} dt'}$$

Wartość średnia całki $\boxed{\left\langle \int_{t_0}^{t} G(t') dW(t') \right\rangle = 0, \quad \text{bo} \left\langle \sum_i G_{i-1} \Delta W_i \right\rangle = \sum_i \langle G_{i-1} \rangle \langle \Delta W_i \rangle = 0}$

Funkcja korelacji $\boxed{\left\langle \int_{t_0}^{t} G(t') dW(t') \int_{t_0}^{t} H(t') dW(t') \right\rangle = \int_{t_0}^{t} \langle G(t') H(t') \rangle dt'}$

$$\left\langle \sum_i G_{i-1} \Delta W_i \sum_j H_{j-1} \Delta W_j \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_i G_{i-1} H_{i-1} (\Delta W_i)^2 \right\rangle + 2 \left\langle \sum_{i>j} G_{i-1} H_{j-1} \Delta W_j \Delta W_i \right\rangle =$$

$$= \sum_i \langle G_{i-1} H_{i-1} \rangle \left\langle (\Delta W_i)^2 \right\rangle + 2 \sum_{i>j} \langle G_{i-1} H_{j-1} \Delta W_j \rangle \langle \Delta W_i \rangle = \sum_i \langle G_{i-1} H_{i-1} \rangle \Delta t_i$$

Wzór Ito Jeżeli *x* spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$dx = a[x(t),t]dt + b[x(t),t]dW(t)$$

$$\Rightarrow df[x(t)] = f[x(t)+dx(t)] - f[x(t)] = f'[x(t)]dx(t) + \frac{1}{2}f''[x(t)][dx(t)]^2 =$$

$$= f'[x(t)][a(x,t)dt + b(x,t)dW] + \frac{1}{2}b^2(x,t)f''[x(t)](dW)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{df[x(t)] = \left[a(x,t)f'(x) + \frac{1}{2}b^2(x,t)f''(x)\right]dt + b(x,t)f'(x)dW}$$

Uogólnienie na przypadek wielowymiarowy

$$\boxed{\begin{aligned} df(\vec{x}(t)) &= \left\{\sum_i \vec{A}_i(\vec{x}(t))\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}(t)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left[\hat{B}(\vec{x}(t))\hat{B}^T(\vec{x}(t))\right]_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}(t))\right\}dt \\ &+ \sum_{i,j} B_{i,j}(\vec{x}(t))\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}(t))dW_j(t). \end{aligned}}$$

Ze wzoru Ito wynika podany wcześniej związek równania stochastycznego w sensie Ito z równaniem Fokkera-Plancka;
Rozpatrzmy ewolucję czasową średniej dowolnej funkcji *f(x)*

Dwie uwagi na początek:

- Dla dowolnej funkcji $F(x)$ wartość oczekiwana $\langle F(x)dW(t)\rangle = \langle F(x(t_{i-1}))[W(t_i) - W(t_{i-1})]\rangle = \langle F(x(t_{i-1}))\Delta W_i\rangle = \langle F(x(t_{i-1}))\rangle\langle \Delta W_i\rangle = 0$, ponieważ przyrost procesu Wienera nie zależy od wartości procesu $x(t_{i-1})$,
- Wyprowadzając równanie Fokkera - Plancka pokazaliśmy, że dla dowolnej funkcji $f(x)$ i dla dowolnego procesu ciągłego $x(t)$ równanie ewolucji czasowej wartości oczekiwanej $\langle f(x)\rangle$ można zapisać w postaci równania Fokkera-Plancka lub równoważnej (w której należy wykonać całkowanie przez części, aby otrzymać równanie Fokkera-Plancka),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int dx f(x) p(x,t|\,y,t') &= \int dx\left[A(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}B(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] p(x,t|\,y,t') \\ &= \int dx f(x)\left\{-\frac{\partial}{\partial x}[A(x,t)p(x,t|\,y,t')] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(x,t)p(x,t|\,y,t')]\right\}.\end{aligned}$$

Korzystając z powyższych tożsamości, mozna napisać następujący ciąg równości

$$\frac{d}{dt}\langle f[x(t)]\rangle = \left\langle \frac{df}{dt}\right\rangle = \left\langle a(x,t)f'(x) + \frac{1}{2}b^2(x,t)f''(x)\right\rangle + \langle b(x,t)f'(x)\xi(t)\rangle =$$

$$= \left\langle a(x,t)f'(x) + \frac{1}{2}b^2(x,t)f''(x)\right\rangle = \int dx\left[a(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]p(x,t) =$$

$$= \int dx\left\{\boxed{-\frac{\partial}{\partial x}[a(x,t)p(x,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b^2(x,t)p(x,t)\right]}\right\} f(x) = \int dx f(x)\boxed{\frac{\partial}{\partial t}p(x,t)}$$

Ponieważ *f(x)* jest dowolną funkcją, wyrazy w ramkach po obu stronach równania muszą być równe.

Całka stochastyczna (w sensie Stratonowicza)

$$S\int_{t_0}^{t} G(x(t'),t')dW(t') = ms-\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} G\left(\frac{x(t_i)+x(t_{i-1})}{2},t_{i-1}\right)\left[W(t_i)-W(t_{i-1})\right]\right\}$$

Właściwości

Jest to inna definicja całki stochastycznej, prowadząca do nieco innego formalizmu. Czytając prace nt. stochastycznych równań różniczkowych należy zawsze zwracać uwagę, czy całka stochastyczna zdefiniowana jest w sensie Ito, czy Stratonowicza..

1^0 $$\left\langle S\int_{t_0}^{t} G(x(t'),t')dW(t')\right\rangle \neq 0$$

Właściwość bardzo przykra, ale…

Używając tej definicji, trudniej jednak jest wykonywać obliczenia podobne do tych prezentowanych na wykładzie.

2^0 $$S\int_{t_0}^{t} W(t')dW(t') = \frac{1}{2}\left[W(t)^2 - W(t_0)^2\right]$$

Właściwość bardzo przyjemna.

3^0

$$dx = adt + bdW \Leftrightarrow dx = \left[a - \frac{1}{2}b\frac{\partial b}{\partial x}\right]dt + bdW$$

Równanie stochastyczne w formie Ito (po lewej) jest równoważne równaniu stochastycznemu w formie Stratonowicza (po prawej)

4^0

$$dx = \alpha dt + \beta dW \Leftrightarrow dx = \left[\alpha + \frac{1}{2}\beta\frac{\partial \beta}{\partial x}\right]dt + \beta dW$$

Równanie stochastyczne w formie Stratonowicza (po lewej) jest równoważne równaniu stochastycznemu w formie Ito (po prawej)

Numeryczne rozwiązywanie stochastycznych równań różniczkowych

Równania jednowymiarowe

Algorytm Milsteina

Równanie jednowymiarowe (w sensie Ito)

$$dx = a(x(t))dt + b(x(t))dW(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

ma rozwiązanie, które można zapisać w postaci całkowej,

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(x(s))ds + \int_{t_0}^{t} b(x(s))dW(s). \tag{2}$$

Dla dowolnej funkcji $f(x(t))$ obowiązuje wzór Ito,

$$df(x(t)) = \left[a(x(t))f'(x(t)) + \frac{1}{2}b^2(x(t))f''(x(t))\right] dt + b(x(t))f'(x(t))dW(t), \tag{3}$$

który można zapisać w postaci całkowej,

$$f(x(s)) = f(x(t_0)) + \int_{t_0}^{s} \left[a(x(\tau))f'(x(\tau)) + \frac{1}{2}b^2(x(\tau))f''(x(\tau))\right] d\tau + \int_{t_0}^{s} b(x(\tau))f'(x(\tau))dW(\tau). \tag{4}$$

W szczególności z równ. (4) można obliczyć $a(x(s))$, $b(x(s))$, które występują w równ. (2).

Podzielmy przedział czasowy (t_0) na odcinki (t_l, t_{l+1}), $l = 0, 1, 2, n-1$, tak że $t_n = t$. Numeryczne rozwiązywanie równania stochastycznego polega na obliczaniu wartości $x(t_l)$ w kolejnych krokach czasowych $t_0, t_1, \ldots, t_n$, przy czym obliczona wartość $x(t_l)$ staje się warunkiem początkowym do obliczenia kolejnej wartości $x(t_{l+1})$. Dalej będziemy rozważać algorytmy ze stałym krokiem całkowania $\Delta t = t_{l+1} - t_l$, $l = 0, 1, 2, \ldots n-1$, przy czym krok ten powinien być dostatecznie mały (czyli $\Delta t \to 0$ przy $n \to \infty$). Wówczas całki w równ. (2) są rzędu $\int_{t_l}^{t_{l+1}} a(x(s))ds \simeq \Delta t$, $\int_{t_l}^{t_{l+1}} b(x(s))dW(s) \simeq \sqrt{\Delta t} \gg \Delta t$ (pamiętamy że $[dW(t)]^2 = dt$), a wyrazy wyższych rzędów są pomijalne.

Aby obliczyć całki w równ. (2) z dokładnością do Δt, po wstawieniu $a(x(s))$, $b(x(s))$ z równ. (4) należy zachować wyrazy rzędu Δt lub niższego. Na przykład

$$\begin{aligned}
\int_{t_l}^{t_{l+1}} b(x(s))dW(s) &= b(x(t_l))\int_{t_l}^{t_{l+1}} dW(s) \\
&+ \int_{t_l}^{t_{l+1}}\int_{t_l}^{s} [a(x(t_l))+\ldots]\,[b'(x(t_l))+\ldots]\,d\tau dW(s) \\
&+ \frac{1}{2}\int_{t_l}^{t_{l+1}}\int_{t_l}^{s} [b(x(t_l))+\ldots]^2\,[b''(x(t_l))+\ldots]\,d\tau dW(s) \\
&+ \int_{t_l}^{t_{l+1}}\int_{t_l}^{s} [b(x(t_l))+\ldots]\,[b'(x(t_l))+\ldots]\,dW(\tau)dW(s).
\end{aligned} \tag{5}$$

W równ. (5) pierwsza całka jest rzędu $(\Delta t)^{1/2}$, ostatnia całka jest rzędu Δt, a druga i trzecia całka są rzędu $(\Delta t)^{3/2} \to 0$ i mozna je pominąć. W związku z tym z dokładnością do wyrazów rzędu Δt z równ. (2) otrzymujemy

$$x(t_{l+1}) = x(t_l) + a(x(t_l))\int_{t_l}^{t_{l+1}} ds + b(x(t_l))\int_{t_l}^{t_{l+1}} dW(s) + b(x(t_l))b'(x(t_l))\int_{t_l}^{t_{l+1}} dW(s)\int_{t_l}^{s} dW(\tau). \tag{6}$$

Ostatnią całkę można obliczyć, biorąc pod uwagę że $\int_{t_0}^{t} W(s)dW(s) = \frac{1}{2}[(W(t))^2 - (W(t_0))^2 - (t-t_0)]$,

$$\begin{aligned}
\int_{t_l}^{t_{l+1}} dW(s)\int_{t_l}^{s} dW(\tau) &= \int_{t_l}^{t_{l+1}} [W(s)-W(t_l)]dW(s) = \int_{t_l}^{t_{l+1}} W(s)dW(s) - W(t_l)\int_{t_l}^{t_{l+1}} dW(s) \\
&= \frac{1}{2}[(W(t_{l+1}))^2 - (W(t_l))^2 - (t_{l+1}-t_l)] - W(t_l)[W(t_{l+1}) - W(t_l)] \\
&= \frac{1}{2}\left[(W(t_{l+1}) - W(t_l))^2 - (t_{l+1}-t_l)\right].
\end{aligned} \tag{7}$$

Korzystając z równ. (6), (7) otrzymujemy następujacy (jawny) iteracyjny algorytm całkowania jednowymiarowego równania stochastycznego w sensie Ito,

$$\boxed{x(t_{l+1}) = x(t_l) + \left[a(x(t_l)) - \frac{1}{2}b(x(t_l))b'(x(t_l))\right]\Delta t + b(x(t_l))\Delta W_i + \frac{1}{2}b(x(t_l))b'(x(t_l))(\Delta W_l)^2,} \tag{8}$$

gdzie $\Delta t = t_{l+1} - t_l$, $\Delta W_l = W(t_{l+1}) - W(t_l)$.

Równania wielowymiarowe

Równanie wielowymiarowe (w sensie Ito)

$$d\vec{x} = \vec{A}(\vec{x}(t))dt + \hat{B}(\vec{x}(t))d\vec{W}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \tag{9}$$

można całkować iteracyjnie, korzystając z wielowymiarowego uogólnienia wzoru Ito dla dowolnej funkcji $f(\vec{x}(t))$, Podobnie jak w przypadku równania jednowymiarowego prowadzi to do wzoru iteracyjnego

$$\begin{aligned} x_i(t_{l+1}) &= x_i(t_l) + A_i(\vec{x}(t_l)) \int_{t_l}^{t_{l+1}} ds + \sum_j B_{i,j}(\vec{x}(t_l)) \int_{t_l}^{t_{l+1}} dW_j(s) \\ &+ \sum_{j,j'} \left\{ \left[\sum_k B_{k,j'} \frac{\partial B_{i,j}}{\partial x_k}(\vec{x}(t_l)) \right] \int_{t_l}^{t_{l+1}} dW_j(s) \int_{t_l}^{s} dW_{j'}(\tau) \right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Oczywiście dla $j = j'$ równ. (7) daje

$$\int_{t_l}^{t_{l+1}} dW_j(s) \int_{t_l}^{s} dW_j(\tau) = \frac{1}{2} \left[(W_j(t_{l+1}) - W_j(t_l))^2 - (t_{l+1} - t_l) \right]. \tag{11}$$

Natomiast w ogólnym przypadku wyrażenie ostatniej całki w równ. (10) przez przyrosty procesu Wienera ΔW_l nie jest mozliwe. Są natomiast pewne przypadki szczególne, kiedy jest to wykonalne.

Przeprowadzając obliczenia podobne jak w przypadku jednowymiarowym, można pokazać, że

$$\begin{aligned}\int_{t_l}^{t_{l+1}} dW_j(s)\int_{t_l}^{s} dW_{j'}(\tau)+\int_{t_l}^{t_{l+1}} dW_{j'}(s)\int_{t_l}^{s} dW_j(\tau) &= \int_{t_l}^{t_{l+1}} dW_j(s)\int_{t_l}^{t_{l+1}} dW_{j'}(\tau)-\delta_{j,j'}(t_{l+1}-t_l)\\ &= \Delta W_l^{(j)}\Delta W_l^{(j')}-\delta_{j,j'}(t_{l+1}-t_l),\end{aligned} \tag{12}$$

gdzie $\Delta W_l^{(j)} = W_j(t_{l+1}) - W_j(t_l)$.

Niech macierz B ma tę własność, że

$$\forall i,j,j' \quad \sum_k B_{k,j'}\frac{\partial B_{i,j}}{\partial x_k} = \sum_k B_{k,j}\frac{\partial B_{i,j'}}{\partial x_k}. \tag{13}$$

Wówczas równ. (10) prowadzi do następującego schematu iteracyjnego,

$$\begin{aligned} x_i(t_{l+1}) &= x_i(t_l) + \left[A_i(\vec{x}(t_l)) - \frac{1}{2}\sum_{j,k} B_{k,j}\frac{\partial B_{i,j}}{\partial x_k}(\vec{x}(t_l))\right]\Delta t + \sum_j B_{i,j}(\vec{x}(t_l))\Delta W_l^{(j)}\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j,j'}\left[\sum_k B_{k,j'}\frac{\partial B_{i,j}}{\partial x_k}(\vec{x}(t_l))\right]\Delta W_l^{(j)}\Delta W_l^{(j')}. \end{aligned} \tag{14}$$

Warunek (13) spełniony jest np. dla

- Elementy macierzowe $B_{i,j}$ są stałe, lub zależne wyłącznie jawnie od czasu ale niezależne od $\vec{x}$, (jest to przypadek szumu addytywnego);
- Jeśli tylko jeden element macierzowy $B_{j,j}(\vec{x}(t)) \neq 0$, a pozostałe są zerowe;
- Jeśli $B_{i,j}(\vec{x}) = G_{i,j}x_i$, gdzie elementy macierzy $\hat{G}$ są stałe, niezależne od $\vec{x}$ i t.