Stochastyczne równania różniczkowe

Równanie Langevina

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a[x(t),t] + b[x(t),t]\xi(t), \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t')}$$

Równanie Langevina formalnie można przepisać w postaci:

$$dx = a[x(t),t]dt + b[x(t),t]\xi(t)dt, \quad \xi(t)dt \equiv dW(t)$$ proces Wienera

Stochastyczne równanie różniczkowe

$$\boxed{dx = a[x(t),t]dt + b[x(t),t]dW(t)}$$

Formalne rozwiązanie

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a[x(t),t]dt + \int_{t_0}^{t} b[x(t),t]dW \longleftarrow$$ całka stochastyczna

Jednoznaczne rozwiązanie równania stochastycznego istnieje, jeżeli

$$\exists K \ \forall x, y, t' \in (t, t_0) \quad |a(x,t') - a(y,t')| + |b(x,t') - b(y,t')| \le K|x-y|$$ warunek Lipschitza

$$\exists K \ \forall x, t' \in (t, t_0) \quad |a(x,t')|^2 + |b(x,t')|^2 \le K\left(1 + |x|^2\right)$$

Zbieżność ciągu zmiennych losowych w sensie średniokwadratowym

$\omega \in \Omega$ przestrzeń zdarzeń losowych

$X_n = X_n(\omega), \quad X = X(\omega)$ zmienne losowe

$$ms - \lim_{n\to\infty} X_n = X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\langle (X_n - X)^2 \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \int d\omega p(\omega) [X_n(\omega) - X(\omega)]^2 = 0$$

Całka stochastyczna (w sensie Ito)

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} G(t')dW(t') = ms - \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} G(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\}}$$

Definicja ta jest równoważna następującej granicy ciągu sum cząstkowych

$$S_n \equiv \sum_{i=1}^{n} G(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\langle \left[S_n - \int_{t_0}^{t} G(t')dW(t') \right]^2 \right\rangle = 0$$

W powyższych definicjach

$G(t)$ funkcja spełniająca <u>zasadę przyczynowości</u>

$G(t_i)$ nie zależy od $W(t_i) - W(t_{i-1})$

Równoważność równania stochastycznego Ito i równania Fokkera-Plancka

Równanie stochastyczne w sensie Ito jest równoważne równaniu Fokkera-Plancka

$$\boxed{dx = a[x(t),t]dt + b[x(t),t]dW(t) \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[a(x,t)p] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b^2(x,t)p\right]}$$

W przypadku wielowymiarowym

$$d\vec{x} = \vec{A}[\vec{x}(t),t]dt + \vec{B}[\vec{x}(t),t]\otimes d\vec{W}(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(\vec{x},t)p(\vec{x},t)] + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{\left[\vec{B}(\vec{x},t)\vec{B}(\vec{x},t)^T\right]_{ij} p(\vec{x},t)\right\}$$

Równanie Kramersa (cząstka Browna w potencjale, w jednym wymiarze)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -V'(x) - \beta\frac{dx}{dt} + \sqrt{2\beta k_B T}\,\xi(t) \Leftrightarrow$$

Równanie Langevina dla jednowymiarowej cząstki Browna jest równoważne równaniu Fokkera-Plancka zw. równaniem Kramersa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{V'(x)}{m} - \dfrac{\beta}{m}v + \dfrac{\sqrt{2\beta k_B T}}{m}\xi(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = v\,dt \\ dv = -\dfrac{1}{m}[V'(x) + \beta v]dt + \dfrac{\sqrt{2\beta k_B T}}{m}dW \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(vp) + \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial v}\{[V'(x) + \beta v]p\} + \frac{\beta k_B T}{m^2}\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}, \quad p = p(x,v,t)}$$

Podobnie, równanie Langevina dla cząstki Browna w trzech wymiarach jest równoważne równaniu równaniu Kramersa w postaci

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_i} v_i + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial v_i} \left[-\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i} + \beta v \right] + \frac{\beta k_B T}{m^2} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \right\} p,$$

$$p = p(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$$

Równanie Smoluchowskiego (przetłumiona cząstka Browna w potencjale, w jednym wymiarze)

$$\beta \to \infty, m \to 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} \to 0 \Rightarrow v \to const$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = -\frac{1}{\beta}\left[V'(x) - \sqrt{2\beta k_B T}\,\xi(t)\right]$$

Przyjmujemy, że prędkość cząstki szybko osiąga wartość stacjonarną, i traktujemy ją jako stałą

$$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{V'(x)}{\beta} + \sqrt{\frac{2k_B T}{\beta}}\,\xi(t) \Leftrightarrow dx = -\frac{V'(x)}{\beta}dt + \sqrt{\frac{2k_B T}{\beta}}\,dW$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V'(x)}{\beta}p\right] + \frac{k_B T}{\beta}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \qquad p = p(x,t)}$$

Równanie Langevina dla Brownowskiej cząstki przetłumionej jest równoważn równaniu Fokkera-Plancka zw. równaniem Smoluchowskiego

W szczególności dla cząstki w potencjale oscylatora harmonicznego równanie Smoluchowskiego ma postać jak dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka

$$V(x) = \frac{1}{2}k\beta x^2, \quad D = \frac{2k_B T}{\beta} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[kxp] + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

związek Einsteina

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} W(t')\,dW(t') = \frac{1}{2}\left[W(t)^2 - W(t_0)^2 - (t-t_0)\right]}$$

Przykład obliczania całki stochastycznej w sensie Ito

$$W(t_i) \equiv W_i,\ \Delta W_i \equiv W_i - W_{i-1} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} W(t')\,dW(t') = ms - \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} W_{i-1}\Delta W_i\right\}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} W_{i-1}\Delta W_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(W_{i-1}+\Delta W_i\right)^2 - W_{i-1}^2\right] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[W(t)^2 - W(t_0)^2\right] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)$$

$$\left\langle\left[\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i^2 - (t-t_0)\right]^2\right\rangle = \left\langle\left[\sum_{i=1}^{n}\left(W_i - W_{i-1}\right)^2 - (t-t_0)\right]^2\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n}\left(W_i - W_{i-1}\right)^4 + 2\sum_{i>j}\left(W_i - W_{i-1}\right)^2\left(W_j - W_{j-1}\right)^2 - 2(t-t_0)\sum_{i=1}^{n}\left(W_i - W_{i-1}\right)^2 + (t-t_0)^2 \right\rangle =$$

$$= 3\sum_{i}\left(t_i - t_{i-1}\right)^2 + 2\sum_{i>j}\left(t_i - t_{i-1}\right)\left(t_j - t_{j-1}\right) - 2(t-t_0)^2 + (t-t_0)^2 =$$

$$2\sum_{i}\left(t_i - t_{i-1}\right)^2 + \sum_{i,j}\left(t_i - t_{i-1}\right)\left(t_j - t_{j-1}\right) - (t-t_0)^2 =$$

$$= 2\sum_{i}\left(t_i - t_{i-1}\right)^2 + \left[\sum_{i}\left(t_i - t_{i-1}\right) - (t-t_0)\right]\left[\sum_{j}\left(t_j - t_{j-1}\right) - (t-t_0)\right] = 2\sum_{i}(\Delta t_i)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow ms - \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2\right\} = t - t_0 \Rightarrow ms - \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} W_{i-1}\Delta W_i\right\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[W(t)^2 - W(t_0)^2 - (t-t_0)\right]$$

Ważny wynik:

$$\boxed{[dW(t)]^2 = dt \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} G(t')[dW(t')]^2 = ms-\lim_{n\to\infty}\sum_i G_{i-1}(\Delta W_i)^2 = \int_{t_0}^{t} G(t')dt'}$$

$$\left\langle \left\{ \sum_i G_{i-1}\left[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right] \right\}^2 \right\rangle =$$

$$= \sum_i \left\langle G_{i-1}^2\left[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right]^2 \right\rangle + 2\sum_{i>j}\left\langle G_{i-1}G_{j-1}\left[(\Delta W_j)^2 - \Delta t_j\right]\left[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right]\right\rangle =$$

$$= \sum_i \left\langle G_{i-1}^2\right\rangle\left\langle\left[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right]^2 \right\rangle + 2\sum_{i>j}\left\langle G_{i-1}G_{j-1}\left[(\Delta W_j)^2 - \Delta t_j\right]\right\rangle\left\langle\left[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right]\right\rangle =$$

$$= 2\sum_i \left\langle G_{i-1}^2\right\rangle \Delta t_i^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow ms-\lim_{n\to\infty}\sum_i G_{i-1}(\Delta W_i)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_i G_{i-1}\Delta t_i$$

Podobnie można wykazać, że $\boxed{[dW(t)]^{n+2} = 0, n \geq 1; \quad dW(t)dt = 0}$

Całkowanie wielomianów

$$d[W(t)]^n = [W(t) + dW(t)]^n - W(t)^n = \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}W(t)^{n-r}(dW(t))^r =$$

$$nW(t)^{n-1}dW(t) + \frac{n(n-1)}{2}W(t)^{n-2}dt \Rightarrow \boxed{\int_{t_0}^{t} W(t')^n dW(t') = \frac{1}{n+1}\left[W(t)^{n+1} - W(t_0)^{n+1}\right] \frac{n}{2}\int_{t_0}^{t} W(t')^{n-1}dt'}$$

Wartość średnia całki

$$\boxed{\left\langle \int_{t_0}^{t} G(t')dW(t') \right\rangle = 0, \quad \text{bo} \left\langle \sum_i G_{i-1}\Delta W_i \right\rangle = \sum_i \langle G_{i-1}\rangle \langle \Delta W_i \rangle = 0}$$

Funkcja autokorelacji

$$\boxed{\left\langle \int_{t_0}^{t} G(t')dW(t') \int_{t_0}^{t} H(t')dW(t') \right\rangle = \int_{t_0}^{t} \langle G(t')H(t')\rangle dt'}$$

$$\left\langle \sum_i G_{i-1}\Delta W_i \sum_j H_{j-1}\Delta W_j \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_i G_{i-1}H_{i-1}(\Delta W_i)^2 \right\rangle + 2\left\langle \sum_{i>j} G_{i-1}H_{i-1}\Delta W_j \Delta W_i \right\rangle =$$

$$= \sum_i \langle G_{i-1}H_{i-1}\rangle \langle (\Delta W_i)^2 \rangle + 2\sum_{i>j} \langle G_{i-1}H_{i-1}\Delta W_j \rangle \langle \Delta W_i \rangle = \sum_i \langle G_{i-1}H_{i-1}\rangle \Delta t_i$$

Wzór Ito Jeżeli *x* spełnia stochastyczne równanie różniczkowe $dx = a[x(t),t]dt + b[x(t),t]dW(t)$

$$\Rightarrow df[x(t)] = f[x(t)+dx(t)] - f[x(t)] = f'[x(t)]dx(t) + \frac{1}{2} f''[x(t)][dx(t)]^2 =$$

$$= f'[x(t)][a(x,t)dt + b(x,t)dW] + \frac{1}{2} b^2(x,t) f''[x(t)](dW)^2$$

$$\Rightarrow df[x(t)] = \left[a(x,t)f'(x) + \frac{1}{2} b^2(x,t) f''(x) \right] dt + b(x,t) f'(x) dW$$

Stąd wynika podany wcześniej związek równania Ito z równaniem Fokkera-Plancka;
Rozpatrzmy ewolucję czasową średniej dowolnej funkcji *f(x)*

$$\frac{d}{dt}\langle f[x(t)]\rangle = \left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \left\langle a(x,t)f'(x) + \frac{1}{2} b^2(x,t) f''(x) \right\rangle + \langle b(x,t) f'(x) \xi(t) \rangle =$$

$$= \left\langle a(x,t)f'(x) + \frac{1}{2} b^2(x,t) f''(x) \right\rangle = \int dx \left[a(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x,t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] p(x,t) =$$

$$= \int dx \boxed{\left\{ -\frac{\partial}{\partial x}[a(x,t)p(x,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b^2(x,t)p(x,t)\right] \right\}} f(x) = \int dx f(x) \boxed{\frac{\partial}{\partial t} p(x,t)}$$

Proces Ornsteina-Uhlenbecka (rozwiązanie równania stochastycznego)

$$dx = -kxdt + \sqrt{D}dW$$

$$y \equiv xe^{kt} \Rightarrow dy = \sqrt{D}e^{kt}dW$$

$$y = y(0) + \int_0^t \sqrt{D}e^{kt'}dW(t') \Rightarrow x = x(0)e^{-kt} + \int_0^t \sqrt{D}e^{-k(t-t')}dW(t')$$

$$\langle x(t)\rangle = \langle x(0)\rangle e^{-kt}$$

$$t > s \Rightarrow$$

$$\langle x(t)x(s)\rangle = \left\langle\left[x(0)e^{-kt} + \int_0^t \sqrt{D}e^{-k(t-t')}dW(t')\right]\left[x(0)e^{-ks} + \int_0^s \sqrt{D}e^{-k(s-s')}dW(s')\right]\right\rangle =$$

$$= \langle x^2(0)\rangle e^{-k(t+s)} + D\left\langle \int_0^t e^{-k(t-t')}dW(t')\int_0^s e^{-k(s-s')}dW(s')\right\rangle =$$

$$= \langle x^2(0)\rangle e^{-k(t+s)} + De^{-k(t+s)}\int_0^t e^{2kt'}dt' = \left(\operatorname{var}\{x(0)\} - \frac{D}{2k}\right)e^{-k(t+s)} + \frac{D}{2k}e^{-2k(t-s)}$$

$$\Rightarrow \langle x^2(t)\rangle = \left(\operatorname{var}\{x(0)\} - \frac{D}{2k}\right)e^{-2kt} + \frac{D}{2k}$$

Całka stochastyczna (w sensie Stratonowicza)

$$S\int_{t_0}^{t} G(x(t'),t')dW(t') = ms-\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} G\left(\frac{x(t_i)+x(t_{i-1})}{2},t_{i-1}\right)[W(t_i)-W(t_{i-1})]\right\}$$

Właściwości

1^0 $$\left\langle S\int_{t_0}^{t} G(x(t'),t')dW(t')\right\rangle \neq 0$$ Właściwość bardzo przykra, ale…

2^0 $$S\int_{t_0}^{t} W(t')dW(t') = \frac{1}{2}\left[W(t)^2 - W(t_0)^2\right]$$ Właściwość bardzo przyjemna.

3^0

$$dx = adt + bdW \Leftrightarrow dx = \left[a - \frac{1}{2}b\frac{\partial b}{\partial x}\right]dt + bdW$$

Równanie stochastyczne w formie Ito (po lewej) jest równoważne równaniu stochastycznemu w formie Stratonowicza (po prawej)

4^0

$$dx = \alpha dt + \beta dW \Leftrightarrow dx = \left[\alpha + \frac{1}{2}\beta\frac{\partial \beta}{\partial x}\right]dt + \beta dW$$

Równanie stochastyczne w formie Stratonowicza (po lewej) jest równoważne równaniu stochastycznemu w formie Ito (po prawej)