

Proces Wienera (ruch Browna, *Brownian motion*)

Proces Ornsteina-Uhlenbecka z $k \rightarrow 0$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad \text{Równanie Fokkera-Plancka dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka z } k = 0$$

$$\frac{D}{2k} (1 - e^{-2kt}) \approx \frac{D}{2k} [1 - (1 - 2kt + \dots)] = Dt$$

$$\Rightarrow p(x, t | x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t-t_0)}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2D(t-t_0)}\right]$$

Uwaga: w powyższym wyprowadzeniu przyjęliśmy milcząco warunki brzegowe dla równania Fokkera-Plancka w postaci

$$p(x \rightarrow \pm\infty, t | x_0, t_0) \rightarrow 0$$

W związku z tym $p(x, t | x_0, t_0)$ ma postać rozkładu Gaussa, który dla $t \rightarrow \infty$ coraz bardziej się „wypłaszcza”, obniża i zbiega do zera. Jest to naturalne, ponieważ cząstka może oddalić się dowolnie daleko od punktu początkowego. W dalszym ciągu wykładu przyjmujemy inne warunki brzegowe dla procesu Wienera, tak że ruch cząstki będzie ograniczony do pewnego przedziału, i otrzymamy inne rozwiązanie

Proces Wienera jest procesem ciągłym, ale trajektorie są nieróżniczkowalne.

Równanie Fokkera - Plancka dla procesu Wienera jest w istocie równaniem dyfuzji (w 1 wymiarze).

$$p \rightarrow n(\underset{\downarrow}{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

gęstość (koncentracja) cząstek

Przypomnienie: dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka

- Równanie Fokkera Plancka

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(kxp) + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

- Rozwiązanie dla $p(x, t | x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$

$$p(x, t | x_0, t_0) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{D\pi}{k}(1 - e^{-2k(t-t_0)})}} \exp\left[-\frac{k(x - x_0 e^{-k(t-t_0)})^2}{D(1 - e^{-2k(t-t_0)})}\right]$$

Proces Wienera jest procesem o przyrostach niezależnych.

Dla procesów Markowa zachodzi

Ogólna własność procesów Markowa

$$\begin{aligned} p(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0) &= \prod_{i=0}^{n-1} p(x_{i+1}, t_{i+1} | x_i, t_i) p(x_0, t_0) = \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t_{i+1} - t_i)}} \exp \left[-\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2D(t_{i+1} - t_i)} \right] \right\} p(x_0, t_0) = \\ &= \left\langle \begin{array}{l} \Delta x_i \equiv x_{i+1} - x_i \\ \Delta t_i \equiv t_{i+1} - t_i \end{array} \right\rangle = \prod_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi D \Delta t_i}} \exp \left[-\frac{\Delta x_i^2}{2D \Delta t_i} \right] \right\} p(x_0, t_0) \end{aligned}$$

Za $p(x_{i+1}, t_{i+1} | x_i, t_i)$ wstawiamy wyrażenie na $p(x, t | x_0, t_0)$ z poprzedniego slajdu, z zamianą $x \rightarrow x_{i+1}, \dots, t_0 \rightarrow t_i$

Przyrosty procesu Wienera są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Gaussa

Δx_i - przyrosty procesu Wienera

Prawdopodobieństwo łączne przyrostów jest iloczynem prawdopodobieństw poszczególnych przyrostów, więc przyrosty są niezależne.

- Proces Wienera (ruch Browna) nie jest „szumem białym” (tzn. nie ma stałego widma mocy – widać to na podstawie obliczonej na następnym slajdzie funkcji autokorelacji, która nie jest deltą Diraca, i na podstawie twierdzenia Wienera-Chinczyna, że widmo mocy jest transformatą Fouriera funkcji autokorelacji).
- Natomiast szumem białym są przyrosty procesu Wienera, czyli liczby przypadkowe brane z rozkładu Gaussa

Funkcja autokorelacji dla procesu Wienera

$$\langle x(t)x(s)|x_0, t_0 \rangle = \langle [x(t) - x(s)]x(s)|x_0, t_0 \rangle + \langle x^2(s)|x_0, t_0 \rangle$$

$$t > s \Rightarrow \langle [x(t) - x(s)]x(s)|x_0, t_0 \rangle = 0 \quad \text{ponieważ przyrosty są niezależne}$$

$$\langle x^2(s)|x_0, t_0 \rangle = \int dx x^2 p(x, s|x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(s-t_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2D(s-t_0)}\right] =$$

$$= D(s-t_0) + x_0^2 \quad \text{Wartość oczekiwana } x_0 \text{ i wariancja } D(s-t_0) \text{ rozkładu Gaussa}$$

$$t < s \Rightarrow \langle x(t)x(s)|x_0, t_0 \rangle = \langle [x(s) - x(t)]x(t)|x_0, t_0 \rangle + \langle x^2(t)|x_0, t_0 \rangle = \\ = D(t-t_0) + x_0^2$$

Ogólnie

$$\langle x(t)x(s)|x_0, t_0 \rangle = \min\{D(s-t_0), D(t-t_0)\} + x_0^2$$

Czyli funkcja autokorelacji dla procesu Wienera
nie jest deltą Diraca

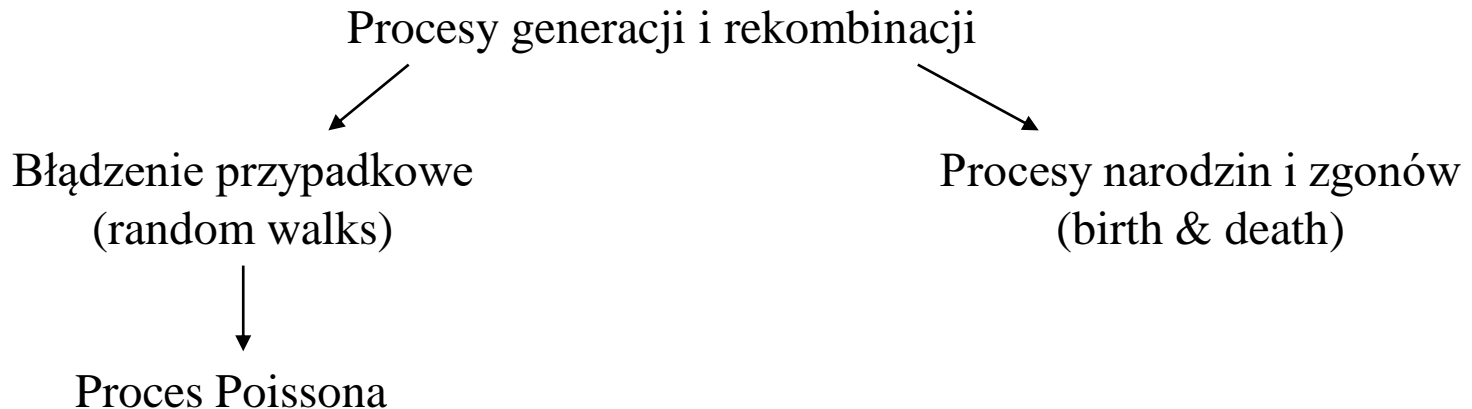
Procesy nieciągłe (skokowe)

Opisane ogólnie równaniem Master

W przypadku dyskretnej przestrzeni stanów

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n, t | n', t') = \sum_m [W(n|m, t)p(m, t | n', t') - W(m|n, t)p(n, t | n', t')]$$

- $p(n, t | n', t')$ - prawdopodobieństwo, że układ (np. cząstka) w chwili t jest w stanie n , jeżeli w chwili t' był w stanie n' .
- $W(n|m, t)$ - prawdopodobieństwo przejścia na jednostkę czasu (ang. *rate*) w chwili t ze stanu m do stanu n ; postać „rate” całkowicie określa proces stochastyczny.



Błądzenie przypadkowe (w jednym wymiarze)

Cząstka może przebywać w dyskretnych punktach $x = m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

d - Prawdopodobieństwo przejścia do sąsiedniego położenia na jednostkę czasu

Równanie Master

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n, t | n', t') = d [P(n+1, t | n', t') + P(n-1, t | n', t') - 2P(n, t | n', t')]$$

$P(n, t | n', t')$ oznacza prawdopodobieństwo, że cząstka w chwili t jest w punkcie $x=n$, jeżeli w chwili t' była w punkcie $x'=n'$

Funkcja charakterystyczna Transformata Fouriera rozkładu prawdopodobieństwa

$$G(s, t) = \langle e^{ins} \rangle = \sum_n P(n, t | n', t') e^{ins} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} G(s, t) = d [e^{is} + e^{-is} - 2] G(s, t)$$

Obliczamy transformatę Fouriera obu stron równania Master

Przy zadanym warunku brzegowym $x(0) = 0$ otrzymujemy rozwiązanie

$$P(n, 0 | 0, 0) = \delta_{n,0} \Rightarrow G(s, 0) = 1 \Rightarrow G(s, t) = \exp[(e^{is} + e^{-is} - 2)td]$$

$$\text{Ponieważ } G(s, 0) = \sum_n P(n, 0 | 0, 0) e^{ins} = \sum_n \delta_{n,0} e^{ins} = 1$$

W celu obliczenia rozkładu prawdopodobieństwa dla błądzenia przypadkowego należy dokonać odwrotnej transformacji Fouriera funkcji charakterystycznej, $P(x, t | 0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} G(s, t) ds$. Wyniku nie da się wyrazić w postaci analitycznej, ale można uprościć zagadnienie, traktując x jako zmienną quasi-ciągłą, tzn. przyjmując, że kolejne punkty, indeksowane jako $1, 2, 3, \dots$, leżą w niewielkiej odległości od siebie (odstęp między sąsiednimi punktami $l \rightarrow 0$) – por. kolejny slajd.

Potraktujmy x jako zmienną ciągłą

Przyjmijmy $x = nl$, $n \in \mathbb{Z}$, $l \rightarrow 0$. Możemy wówczas dokonać rozwinięcia z dokładnością do (pierwszych istotnych) wyrazów rzędu l^2 ,

$$P(x = (n \pm 1)l, t|0, 0) = P(nl, t|0, 0) \pm l \frac{\partial P}{\partial x}(nl) + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dots$$

Wstawiając do równania Master na poprzednim slajdzie, uzyskujemy równanie Fokkera-Plancka na proces Wienera,

$$\frac{\partial P(x, t|0, 0)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 P(x, t|0, 0)}{\partial x^2}, \quad D = l^2 d.$$

(zauważmy, że wyraz dyfuzyjny zawiera D , nie $\frac{1}{2}D$, stąd w rozkładzie prawdopodobieństwa również $D \rightarrow 2D$).

Uwaga: Jest to typowy sposób "uciągłania" procesu nieciągłego: zakładamy, że przeskoki są bardzo małe (rzędu $l \rightarrow 0$) i przechodzimy w podany sposób od równania Master do równania Fokkera-Plancka.

W podobny sposób możemy przekształcić obliczoną na poprzednim slajdzie funkcję charakterystyczną $G(s, t)$ z warunkiem początkowym $x(0) = 0$ dla błędzenia przypadkowego, uzyskując funkcję charakterystyczną dla procesu Wienera,

Rozkład prawdopodobieństwa dla procesu Wienera

$$G(s, t) = \exp\left[\left(e^{ils} + e^{-ils} - 2\right)td\right] \approx \exp(-s^2 t D) \Rightarrow p(x, t|0, 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4 D t}\right)$$

Błądzenie przypadkowe w granicy $l \rightarrow 0$ daje proces Wienera

Przypomnienie: funkcja charakterystyczna dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka z $x(0) = x_0 = 0$ ma postać

$$\varphi(s, t) = \exp\left[-\frac{D s^2}{4k} (1 - e^{-2kt})\right]$$

Przechodząc z $k \rightarrow 0$, tak że $\frac{D}{2k} (1 - e^{-2kt}) \approx Dt$, uzyskujemy funkcję charakterystyczną dla procesu Wienera,

$$\varphi(s, t) = \exp\left(-\frac{1}{2} s^2 t D\right)$$

więc rozkład prawdopodobieństwa $P(x, t|0, 0)$ jest jak dla procesu Wienera (z $D \rightarrow 2D$).

Proces Poissona

Błądzenie przypadkowe w jedną stronę (kroki wykonywane są tylko w prawo z prawdopodobieństwem na jednostkę czasu μ)

Równanie Master

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n, t | n', t') = \mu [P(n-1, t | n', t') - P(n, t | n', t')]$$

Problem na czasie: jakie jest prawdopodobieństwo, że w chwili t w sklepie będzie n klientów, jeżeli prawdopodobieństwo wejścia klienta na jednostkę czasu wynosi μ .

Funkcja charakterystyczna

Transformata Fouriera rozkładu prawdopodobieństwa

$$G(s, t) = \langle e^{ins} \rangle \stackrel{(\spadesuit)}{=} \sum_n P(n, t | n', t') e^{ins} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} G(s, t) = \mu [e^{is} - 1] G(s, t)$$

Obliczamy transformatę Fouriera obu stron równania Master

Przy zadanym warunku brzegowym $x(0) = 0$ otrzymujemy rozwiązanie

$$P(n, 0 | 0, 0) = \delta_{n,0} \Rightarrow G(s, 0) = 1 \Rightarrow G(s, t) = \exp[(e^{is} - 1)\mu t]$$

$$G(s, t) = e^{-\mu t} \exp(\mu t e^{is}) = e^{-\mu t} \left(1 + \mu t e^{is} + \frac{1}{2} (\mu t)^2 e^{2is} + \dots \right) = e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{ins} \quad (\spadesuit)$$

$$\Rightarrow P(n, t | 0, 0) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!}$$

Rozkład Poissona

Tym razem uzyskanie rozkładu prawdopodobieństwa z funkcji charakterystycznej było łatwe

Z porównania współczynników przy e^{ins} w obu rozkładach funkcji charakterystycznej (\spadesuit)

Procesy generacji i rekombinacji

Cząstka może przebywać w punktach $x = ml$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, l = \text{const}$

Prawdopodobieństwo przejścia do sąsiedniego położenia na jednostkę czasu

$G(x_m, t)$ ze stanu m do $m+1$ (generation rate)

Ponownie dokonajmy przejścia $l \rightarrow 0$.

Żeby urozmaicić wywód, skorzystajmy z formalnej

$R(x_m, t)$ ze stanu m do $m-1$ (recombination rate)

definicji operatora $e^A = 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots$ gdzie A oznacza dowolny operator

Równanie Master

$$\dot{P}(x_m, t) = G(x_{m-1}, t)P(x_{m-1}, t) - G(x_m, t)P(x_m, t) + R(x_{m+1}, t)P(x_{m+1}, t) - R(x_m, t)P(x_m, t)$$

$$f(x \pm l) = f(x) \pm l \frac{df}{dx} + \frac{1}{2}l^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \dots = \left(1 \pm l \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}l^2 \frac{d^2}{dx^2} + \dots \right) f = \exp\left(\pm l \frac{d}{dx} \right) f$$

$$\Rightarrow \dot{P}(x, t) = \left[\exp\left(-l \frac{\partial}{\partial x} \right) - 1 \right] G(x, t)P(x, t) + \left[\exp\left(l \frac{\partial}{\partial x} \right) - 1 \right] R(x, t)P(x, t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \frac{l^n}{n!} \left[G(x, t) + (-1)^n R(x, t) \right] P$$

Korzystamy z formalnej definicji operatora $\exp\left(\pm l \frac{d}{dx} \right)$ i pozostawiamy wszystkie wyrazy rozwinięcia

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [l(G - R)P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [l^2(G + R)P]$$

Ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia, z równania Master uzyskujemy równanie Fokkera-Plancka

- Zauważmy, że dotychczas zarówno wyprowadzając równanie Fokkera-Plancka z równania Chapmana-Kołmogorowa, jak i uzyskując je w sposób przybliżony z równania Master, ograniczaliśmy się zawsze do wyrazów rzędu drugiego w odpowiednich rozwinięciach na szereg Taylora (z pochodnymi 2. rzędu względem x).
- Powstaje pytanie, czy dowolny proces ciągły można opisać równaniem Fokkera-Plancka. Odpowiedź jest negatywna, np. (quasi-)ciągły proces generacji i rekombinacji z poprzedniego slajdu opisywany jest równaniem, zawierającym pochodne wszystkich rzędów względem x .
- Istnieje alternatywne (i równie "niecisłe") wyprowadzenie równania dla procesów ciągłych, tzw. **rozwiązanie Kramersa-Moyala**. Takie ogólne równanie ma postać

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = L_{KM}(x, t)P(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x, t)P(x, t),$$

gdzie $L_{KM}(x, t)$ oznacza operator (różniczkowy) Kramersa-Moyala, $D^{(n)}(x, t)$ są współczynnikami rozwinięcia (w ogólności pewnymi funkcjami; górny indeks w nawiasie nie oznacza pochodnej rzędu n , tylko indeksuje współczynniki), a $(-\partial/\partial x)^n$ oznacza n -krotne podziałanie operatorem pochodnej na wszystko, co stoi na prawo od operatora (czyli iloczyn $D^{(n)}(x, t)P(x, t)$).

- Tego typu równania nie daje się w ogólności poprawnie rozwiązać analitycznie ani numerycznie, gdyż wymagałoby to obcięcia rozwinięcia na którymś wyrazie, np. z $n = N$. Na przykład dla procesu Poissona (który jest szczególnym przypadkiem procesu generacji i rekombinacji) rozwiązanie z $N = 1$ daje rozkład jednopunktowy $P(x, t) = \delta(x - \mu t)$, z $N = 2$ rozkład Gaussa z $\langle x \rangle = \mu t$. Rozwiązania uzyskane dla $N > 2$ coraz lepiej przybliżają rozkład Poissona, ale są matematycznie (i fizycznie) niepoprawne, gdyż mogą przyjmować wartości ujemne.
- Na szczęście sytuacja nie jest beznadziejna ze względu na **twierdzenie Pawuli** - patrz kolejny slajd.

Twierdzenie Pawuli

Rozwinięcie Kramersa - Moyala

$$L_{KM} = L_{KM}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x, t)$$

może urywać się po pierwszym albo drugim wyrazie. Jeżeli nie urywa się po pierwszym albo drugim wyrazie, to nie urywa się nigdy i zawiera nieskończoną liczbę wyrazów.

Np. rozwinięcia Kramersa - Moyala dla procesów generacji i rekombinacji (por. równanie uzyskane z równania Master) lub dla procesu Poissona zawierają nieskończoną liczbę wyrazów.

- Oznacza to, że istnieją procesy (i jest ich zapewne dużo), które są ściśle opisywane równaniem Fokkera-Plancka. Są to procesy, dla których $D^{(1)}(x, t) = A(x, t)$, $D^{(2)}(x, t) = \frac{1}{2}B(x, t)$ w operatorze $L_{KM}(x, t)$, oraz $D^{(n)}(x, t) = 0$ dla $n > 2$.
- Co do procesów omawianych na wykładzie (np. Ornsteina-Uhlenbecka, Wienera itd.) jest oczywiste, że są one poprawnie opisywane równaniem Fokkera-Plancka, po prostu dlatego, że są definiowane jako procesy, spełniające to równanie. Problem pojawia się, gdy mamy jakiś proces (np. obserwowany empirycznie) i chcemy do niego dobrać równanie Fokkera-Plancka. Wówczas należy szacować współczynniki $D^{(n)}(x, t)$ (które w istocie, podobnie jak $A(x, t)$, $B(x, t)$ są momentami rozkładów warunkowych $p(x, t|x', t')$) i sprawdzić, czy dla $n > 2$ są one zaniedbywalne.



2013/6/8 13:14