Proces Ornsteina - Uhlenbecka

Dany przez równanie FP z warunkiem początkowym
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[kxp] + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad p(x,0|x_0,0) = \delta(x - x_0)$$

Funkcja charakterystyczna
$$\phi(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} p(x,t|x_0,0)dx$$

Transformujemy obustronnie równanie Fokkera-Plancka

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} p dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\frac{\partial}{\partial x}[xkp]dx + \frac{1}{2}D\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}dx$$

Całki po prawej stronie obliczamy przez części (w drugiej całce całkujemy przez części dwukrotnie),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\frac{\partial}{\partial x}[xkp]dx = \underbrace{ke^{isx}xp\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ bo } \lim_{x\to\pm\infty} p(x,t|x_0,0)=0} \underbrace{-isk\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}xpdx}_{=-ks\frac{\partial}{\partial s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}pdx=-ks\frac{\partial\phi}{\partial s}}$$

$$\frac{1}{2}D\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}dx = -\frac{1}{2}Ds^2\phi$$

Równanie na funkcję charakterystyczną z warunkiem początkowym
$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + ks\frac{\partial\phi}{\partial s} = -\frac{1}{2}Ds^2\phi, \quad \phi(s,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\delta(x - x_0)dx = e^{ix_0 s}$$

Rozwiązując równanie na funkcję charakterystyczną, a następnie obliczając odwrotną transformatę Fouriera z funkcji charakterystycznej, otrzymujemy zależny od czasu rozkład prawdopodobieństwa dla procesu Ornsteina - Uhlenbecka

$$\phi(s,t) = \exp\left[-\frac{Ds^2}{4k}\left(1-e^{-2kt}\right) + isx_0 e^{-kt} \right]$$

$$p(x,t|x_0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(s,t) e^{-isx} ds = \frac{1}{\sqrt{\frac{D\pi}{k}\left(1-e^{-2kt}\right)}} \exp\left[-\frac{k\left(x - x_0 e^{-kt}\right)^2}{D\left(1-e^{-2kt}\right)} \right]$$

$$\langle x(t) \rangle = x_0 e^{-kt}, \quad \mathrm{var}\{x(t)\} = \frac{D}{2k}\left(1-e^{-2kt}\right)$$

Jako rozwiązanie otrzymujemy więc rozkład Gaussa (zależny od czasu)

Obliczamy odwrotną transformatę Fouriera

$$\begin{aligned} p(x,t|x_0,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(s,t)e^{-isx}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{Ds^2}{4k}\left(1-e^{-2kt}\right)+isx_0e^{-kt}}e^{-isx}ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\frac{D}{2k}\left(1-e^{-2kt}\right)s^2 e^{i(x_0e^{-kt}-x)s}}ds \end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenia $k_2 = \frac{D}{2k}\left(1-e^{-2kt}\right)$, $k_1 = x_0e^{-kt}$,

$$p(x,t|x_0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}k_2s^2}e^{i(k_1-x)s}ds = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}k_2s^2}\cos[(k_1-x)s]ds.$$

Dokonujemy podstawienia $z = \sqrt{\frac{k_2}{2}}s \Rightarrow ds = \sqrt{\frac{2}{k_2}}dz$ i otrzymujemy całkę stablicowaną,

$$\begin{aligned} p(x,t|x_0,0) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}\cos\left[(k_1-x)\sqrt{\frac{2}{k_2}}z\right]\sqrt{\frac{2}{k_2}}dz = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{k_2}}\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}\cos\left(2\frac{k_1-x}{\sqrt{2k_2}}z\right)dz \\ &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{k_2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left[-\left(\frac{k_1-x}{\sqrt{2k_2}}\right)^2\right] = \frac{1}{2\pi k_2}\exp\left[-\left(\frac{k_1-x}{\sqrt{2k_2}}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{D}{2k}\left(1-e^{-2kt}\right)}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-x_0e^{-kt})^2}{\frac{D}{2k}\left(1-e^{-2kt}\right)}\right]. \end{aligned}$$

W przypadku z ogólniejszym warunkiem początkowym

$$p(x,t|x_0,t_0)=\delta(x-x_0)\Rightarrow$$

$$p(x,t|x_0,t_0)=\frac{1}{\sqrt{\frac{D\pi}{k}\left(1-e^{-2k(t-t_0)}\right)}}\exp\left[-\frac{k\left(x-x_0e^{-k(t-t_0)}\right)^2}{D\left(1-e^{-2k(t-t_0)}\right)}\right]$$

Rozwiązanie stacjonarne

$$p_s(x)=\lim_{t_0\to-\infty}p(x,t|x_0,t_0)=\frac{1}{\sqrt{\frac{D\pi}{k}}}\exp\left[-\frac{kx^2}{D}\right]$$

Funkcja autokorelacji

$$\boxed{\langle x(t)x(s)|x_0,t_0\rangle \equiv \iint dx_1 dx_2 x_1 x_2 \, p(x_1,t;x_2,s|x_0,t_0)}$$

Dla procesów Markowa

$$\langle x(t)x(s)|x_0,t_0\rangle \equiv \iint dx_1 dx_2 x_1 x_2 \, p(x_1,t|x_2,s)p(x_2,s|x_0,t_0), \quad t \geq s \geq t_0$$

Stacjonarna funkcja autokorelacji dla procesów Markowa

$$\lim_{t_0 \to -\infty} p(x_2,s|x_0,t_0) = p_s(x_2) \Rightarrow$$

$$\langle x(t)x(s)\rangle_s = \iint dx_1 dx_2 x_1 x_2 \, p(x_1,t|x_2,s)p_s(x_2)$$

Stacjonarna funkcja autokorelacji dla procesu Ornsteina - Uhlenbecka

$$\langle x(t)x(s)\rangle_s = \iint dx_1 dx_2 x_1 x_2 \, p(x_1,t|x_2,s)p_s(x_2) = \frac{D}{2k} e^{-k(t-s)}$$

Obliczenie stacjonarnej funkcji autokorelacji dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka

$$\begin{aligned}
\langle x(t)x(s)\rangle_s &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \sqrt{\frac{2k}{2\pi D\left(1-e^{-2k(t-s)}\right)}} \exp\left[-\frac{2k\left(x_1 - x_2 e^{-k(t-s)}\right)^2}{2D\left(1-e^{-2k(t-s)}\right)}\right]\sqrt{\frac{2k}{2\pi D}}\exp\left(-\frac{2kx_2^2}{2D}\right) \\
&= \frac{2k}{2\pi D\sqrt{1-e^{-2k(t-s)}}}\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_2 \exp\left[-\frac{2kx_2^2}{2D\left(1-e^{-2k(t-s)}\right)}\right] \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 x_1 \exp\left\{-\frac{2k\left[x_1^2 - 2e^{-k(t-s)}x_1x_2\right]}{2D\left(1-e^{-2k(t-s)}\right)}\right\}}_{I_1}
\end{aligned}$$

W ostatniej całce wprowadźmy oznaczenia $a = \frac{2k}{2D\left(1-e^{-2k(t-s)}\right)}$, $b = 2e^{-k(t-s)}x_2$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 x_1 e^{-a(x_1^2 - bx_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 x_1 \left(x_1 - \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right) e^{-a\left[\left(x_1-\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}\right]} \\
&= e^{\frac{ab^2}{4}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \left(x_1 - \frac{b}{2}\right) e^{-a\left(x_1-\frac{b}{2}\right)^2}}_{=0} + e^{\frac{ab^2}{4}} \frac{b}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 e^{-a\left(x_1-\frac{b}{2}\right)^2}}_{=\sqrt{\pi/a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{b}{2}e^{\frac{ab^2}{4}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x(t)x(s)\rangle_s &= \frac{2k}{2\pi D\sqrt{1-e^{-2k(t-s)}}}\frac{\sqrt{2\pi D}\sqrt{1-e^{-2k(t-s)}}}{\sqrt{2k}} e^{-k(t-s)} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_2 \exp\left[-\frac{2kx_2^2}{2D\left(1-e^{-2k(t-s)}\right)}\right] \\
&\times \quad x_2 \exp\left[\frac{1}{4}\frac{2k}{2D\left(1-e^{-2k(t-s)}\right)}4e^{-2k(t-s)}x_2^2\right] \\
&= \sqrt{\frac{2k}{2\pi D}}e^{-k(t-s)}\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_2^2 \exp\left[-\frac{2kx_2^2}{2D\left(1-e^{-2k(t-s)}\right)}\left(1-e^{-2k(t-s)}\right)\right] \\
&= \sqrt{\frac{k}{\pi D}}e^{-k(t-s)}\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_2^2 e^{-\frac{kx_2^2}{D}} = \frac{D}{2k}e^{-k(t-s)}.
\end{aligned}$$

Własność ergodyczności: średnią po czasie możemy zastąpić średnią po zespole (tj. stacjonarnej gęstości prawdopodobieństwa)

$$C(\tau) \equiv \langle x(t+\tau)x(t)\rangle_s = \iint dx_1 dx_2 x_1 x_2 p(x_1, t+\tau | x_2, t) p_s(x_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x(t)dt$$

Przechodzimy do transformat Fouriera

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-T/2}^{T/2} dt\; x(\omega) x^*(\omega') e^{i(\omega-\omega')t} e^{-i\omega'\tau} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' x(\omega) x^*(\omega') \delta(\omega-\omega') e^{-i\omega'\tau} = \int_{0}^{\infty} d\omega \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} |x(\omega)|^2 \cos\omega\tau$$

Odwracając transformatę Fouriera otrzymujemy

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} |x(\omega)|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} C(\tau) \cos\omega\tau \; d\tau}$$

Twierdzenie Wienera – Chinczyna

Transformata z funkcji autokorelacji procesu stochastycznego daje jego widmo mocy

Widmo mocy dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka

$$C(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \frac{D}{2k}e^{-k\tau}$$

$$\int_0^\infty C(\tau)\cos\omega\tau d\tau = \frac{D}{2k}\int_0^\infty e^{-kt}\cos\omega\tau d\tau = \frac{D}{2}\frac{1}{k^2+\omega^2}$$

Z twierdzenia Wienera-Chinczyna widmo mocy

$$|\chi(\omega)|^2 \propto \frac{1}{k^2+\omega^2} \overset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} \omega^{-2}.$$

Jest to przykład szumu (tzw. "kolorowego") typu $1/f^\alpha$ z $\alpha = 2$.

Uwaga: dla $k \to 0$ (proces Wienera, por. dalsza część wykładu) $|\chi(\omega)|^2 \propto \omega^{-2}$ w całym zakresie częstości. Nie jest to jednak widmo deltowate, gdyż proces Wienera nie jest tzw. szumem "białym" (szum biały stanowią przyrosty procesu Wienera).