

Realizacja procesu stochastycznego

Konkretny przebieg czasowy – zespół zmiennych przypadkowo zależnych od czasu

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \quad \text{z czasem ciągłym}$$

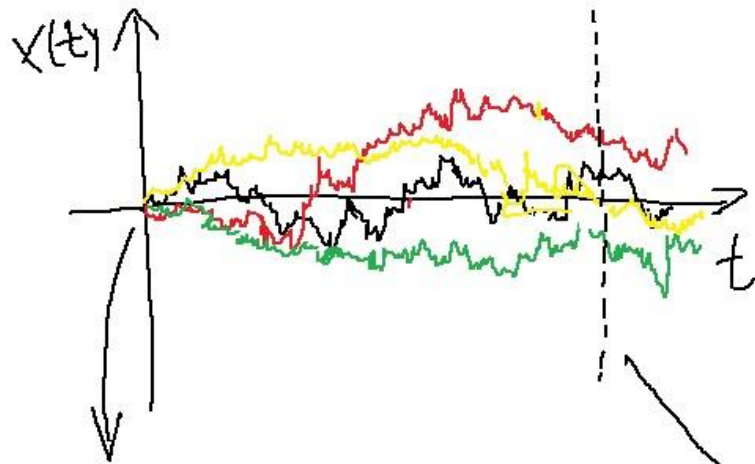
$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0 + n\tau), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{z czasem dyskretnym}$$

Realizacja procesu stochastycznego składa się z konkretnego ciągu wartości, ale rozpatrując zespół realizacji, widzimy, że wartości przyjmowane są z pewnymi prawdopodobieństwami

$$p(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2; \vec{x}_3, t_3; \dots), \quad t_1 \geq t_2 \geq t_3 \dots$$

Np. proces o prawdopodobieństwach niezależnych

$$p(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2; \vec{x}_3, t_3; \dots) = \prod_i p(\vec{x}_i, t_i)$$

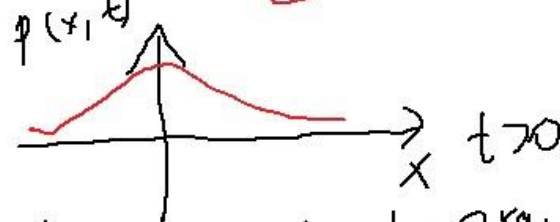
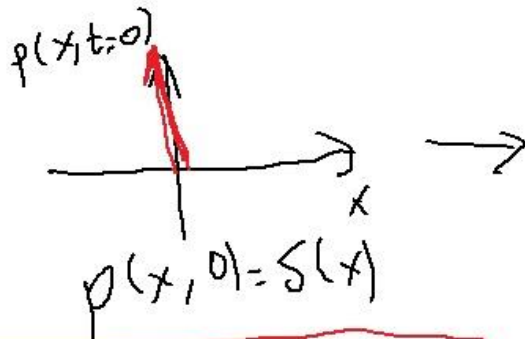


$$x(0) = 0$$

$$x = x(t)$$

Poszczególne trajektorie dla różnych realizacji szumu stochastycznego otrzymujemy, rozwiązując równ. Langevina

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + D\xi(t)$$



Ewolucję rozkładu prawdopodobieństwa ze czasu w chwili t jest w punkcie x jeżeli w t=0 była w x=0 $p = p(x, t | 0, 0)$ uzyskujemy z równ. Fokkera-Plancka

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)p] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x, t)p]$$

Prawdopodobieństwo warunkowe dane jest ogólnym wzorem

$$p(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2; \dots | \vec{y}_1, \tau_1; \vec{y}_2, \tau_2; \dots) = \frac{p(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2; \dots, \vec{y}_1, \tau_1; \vec{y}_2, \tau_2; \dots)}{p(\vec{y}_1, \tau_1; \vec{y}_2, \tau_2; \dots)}$$

$$t_1 \geq t_2 \geq \dots \tau_1 \geq \tau_2 \dots$$

Procesy Markowa

Prawdopodobieństwa zależą wyłącznie od wartości procesu w ostatniej chwili

$$p(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2; \dots | \vec{y}_1, \tau_1; \vec{y}_2, \tau_2; \dots) = p(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2; \dots | \vec{y}_1, \tau_1)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} p(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2; \vec{x}_3, t_3, \dots, \vec{x}_n, t_n) = \\ = p(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_2, t_2) p(\vec{x}_2, t_2 | \vec{x}_3, t_3) \dots p(\vec{x}_{n-1}, t_{n-1} | \vec{x}_n, t_n) p(\vec{x}_n, t_n) \end{aligned}$$

$$t_1 \geq t_2 \geq \dots t_n$$

Poniższy ciąg tożsamości spełniony jest dla dowolnego procesu

$$\begin{aligned} p(\vec{x}_1, t_1) &= \int dx_2 p(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2) = \int dx_2 p(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_2, t_2) p(\vec{x}_2, t_2) \\ p(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_3, t_3) &= \int dx_2 p(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2 | \vec{x}_3, t_3) = \\ &= \int dx_2 p(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_2, t_2; \vec{x}_3, t_3) p(\vec{x}_2, t_2 | \vec{x}_3, t_3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Równanie Chapmana – Kołmogorowa (całkowe)

Dla procesu Markowa drugie z powyższych równań przyjmuje postać

$$p(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_3, t_3) = \int dx_2 p(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_2, t_2) p(\vec{x}_2, t_2 | \vec{x}_3, t_3)$$

Ciągłe procesy Markowa

Proces Markowa jest ciągły, jeśli prawdopodobieństwo oddalenia się od punktu początkowego na skończoną odległość nie rośnie zbyt szybko w czasie (czyli w przebiegu czasowym – realizacji procesu – nie obserwuje się dalekozasięgowych przeskoków)

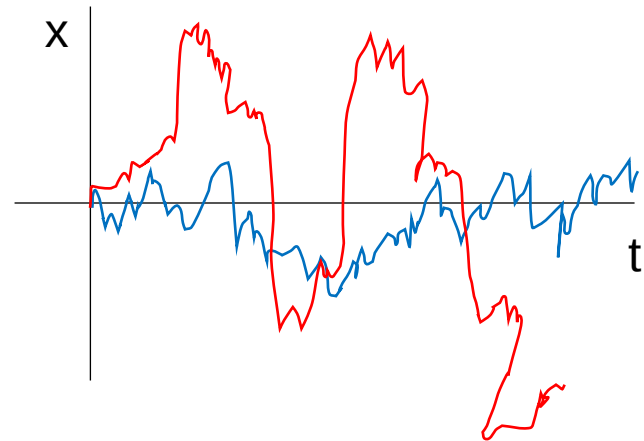
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\vec{x} - \vec{z}| > \varepsilon} d\vec{x} p(\vec{x}, t + \Delta t | \vec{z}, t) = 0$$

Przykład: ruchy Browna są ciągłym procesem Markowa – rozkład normalny

$$p(x, t + \Delta t | z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D \Delta t}} \exp \left[-\frac{(x - z)^2}{4D \Delta t} \right]$$

Przykład: proces Cauchy'ego nie jest ciągły, zdarzają się b. duże przeskoki

$$p(x, t + \Delta t | z, t) = \frac{\Delta t}{\pi} \frac{1}{(x - z)^2 + \Delta t^2}$$



Zdefiniujmy $W(\vec{x}|\vec{z}, t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} p(\vec{x}, t + \Delta t | \vec{z}, t)$ dla $|\vec{x} - \vec{z}| \geq \varepsilon$

$W(\vec{x}|\vec{z}, t)$ - prawdopodobieństwo przejścia na jednostkę czasu ze stanu $\mathbf{z}$ do $\mathbf{x}$

$W(\vec{x}|\vec{z}, t) = 0$ dla $\vec{x} \neq \vec{z} \Rightarrow$ proces Markowa jest ciągły

Zdefiniujmy

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int d\vec{x} (x_i - z_i) p(\vec{x}, t + \Delta t | \vec{z}, t) \equiv A_i(\vec{z}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int d\vec{x} (x_i - z_i)(x_j - z_j) p(\vec{x}, t + \Delta t | \vec{z}, t) \equiv B_{ij}(\vec{z}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad i, j = 1, 2, 3$$

Równanie Chapmana – Kołmogorowa (różniczkowe)

Całkowe równanie Chapmana – Kołmogorowa jest równoważne następującemu równaniu różniczkowemu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(\vec{z}, t | \vec{y}, t') = & - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(\vec{z}, t) p(\vec{z}, t | \vec{y}, t')] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(\vec{z}, t) p(\vec{z}, t | \vec{y}, t')] + \\ & + \int d\vec{x} [W(\vec{z}|\vec{x}, t) p(\vec{x}, t | \vec{y}, t') - W(\vec{x}|\vec{z}, t) p(\vec{z}, t | \vec{y}, t')] \end{aligned}$$

Rozpatrujemy ewolucję czasową wartości oczekiwanej dowolnej funkcji $f(x)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int dx f(x) p(x, t | y, t') &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int dx f(x) [p(x, t + \Delta t | y, t') - p(x, t | y, t')]}{\Delta t} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int dx \int dz f(x) p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') - \int dz f(z) p(z, t | y, t')}{\Delta t} = \\
 &= \left\langle \begin{aligned} f(x) &= f(z) + \frac{\partial f}{\partial z} (x - z) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (x - z)^2 + |x - z|^2 R(x, z) \quad \text{dla } |x - z| < \varepsilon, \\ R(x, z) &\xrightarrow{x \rightarrow z} 0 \end{aligned} \right\rangle = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iint_{|x-z| < \varepsilon} dx dz \left[\frac{\partial f}{\partial z} (x - z) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (x - z)^2 \right] p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') + \right. \\
 &+ \iint_{|x-z| < \varepsilon} dx dz |x - z|^2 R(x, z) p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') + \\
 &+ \iint_{|x-z| \geq \varepsilon} dx dz f(x) p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') + \iint_{|x-z| < \varepsilon} dx dz f(z) p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') - \\
 &\left. - \iint_{\mathfrak{R}^2} dx dz f(z) p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') \right\} \quad (*)
 \end{aligned}$$

Z definicji:

$$\begin{aligned} A(z, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z| < \varepsilon} dx (x - z) p(x, t + \Delta t | z, t), \\ B(z, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z| < \varepsilon} dx (x - z)^2 p(x, t + \Delta t | z, t), \end{aligned}$$

więc pierwsza całka w $(\star)$ daje

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[A(z, t) \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2} B(z, t) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right] p(z, t | y, t').$$

Druga całka w $(\star)$: rozważmy całkę jednowymiarową

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z| < \varepsilon} dx |x - z|^2 R(x, z) p(x, t + \Delta t | z, t) \leq \underbrace{\left[\frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z| < \varepsilon} dx (x - z)^2 p(x, t + \Delta t | z, t) \right]}_{=B(z, t)} \underbrace{\max_{|x-z| < \varepsilon} |R(x, z)|}_{\rightarrow 0 \text{ dla } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ bo } R(x, z) \rightarrow 0 \text{ dla } \varepsilon \rightarrow 0},$$

więc druga całka

$$I_2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Z definicji:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(x, t + \Delta t | z, t)}{\Delta t} = W(x|z, t) \text{ dla } |x - z| \geq \varepsilon,$$

więc dwie ostatnie całki w (★) w sumie dają

$$I_4 + I_5 = -\frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z| \geq \varepsilon} dx dz f(z) p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') = - \int_{|x-z| \geq \varepsilon} dx dz f(z) W(x|z, t) p(z, t | y, t').$$

W trzeciej całce w (★) zamieniamy zmienne $x \leftrightarrow z$ i otrzymujemy

$$I_3 = \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z| \geq \varepsilon} dx dz f(z) p(z, t + \Delta t | x, t) p(x, t | y, t') = \int_{|x-z| \geq \varepsilon} dz dx f(z) W(z|x, t) p(x, t | y, t').$$

Stąd ostatnie trzy całki w (★) dają

$$I_3 + I_4 + I_5 = \int_{|x-z| \geq \varepsilon} dx dz f(z) [W(z|x, t) p(x, t | y, t') - W(x|z, t) p(z, t | y, t')].$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int dx f(x) p(x, t | y, t') = \\
& \int dz \left[A(z, t) \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2} B(z, t) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right] p(z, t | y, t') + \\
& + \int dz f(z) \int dx \{ W(z | x, t) p(x, t | y, t') - W(x | z, t) p(z, t | y, t') \} = \quad (*) \\
& = \int dz f(z) \left\{ - \frac{\partial}{\partial z} [A(z, t) p(z, t | y, t')] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [B(z, t) p(z, t | y, t')] + \right. \\
& \left. + \int dx [W(z | x, t) p(x, t | y, t') - W(x | z, t) p(z, t | y, t')] \right\}
\end{aligned}$$

Całkowanie przez części: Załóżmy że $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(z) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, wówczas np.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz A(z, t) \frac{\partial f}{\partial z} p(z, t | y, t') = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) \frac{\partial}{\partial z} [A(z, t) p(z, t | y, t')] + \underbrace{f(z) A(z, t) p(z, t | y, t') \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0}$$

Analogicznie dla całki z $B(z, t)$ (dwukrotne całkowanie przez części).

Ponadto w całce po lewej stronie zmieniamy oznaczenie zmiennej całkowania $x \rightarrow z$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) p(x, t|y, t') = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) \frac{\partial}{\partial t} p(z, t|y, t')$$

. Ponieważ funkcja $f(z)$ jest dowolna, pozostałe części funkcji podcałkowych po obu stronach muszą być sobie równe.

Stąd w jednym wymiarze równanie różniczkowe Chapmana – Kołmogorowa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(z, t|y, t') = & -\frac{\partial}{\partial z} [A(z, t) p(z, t|y, t')] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [B(z, t) p(z, t|y, t')] + \\ & + \int dx [W(z|x, t) p(x, t|y, t') - W(x|z, t) p(z, t|y, t')] \} \end{aligned}$$

Różne warianty różniczkowego równania Chapmana - Kołmogorowa

Równanie Master (równanie M, równanie Pauliego)

Równanie to opisuje procesy typu przeskoków (trajektoria zwykle nieciągła)

$$A_i(\vec{z}, t) = 0, \quad B_{ij}(\vec{z}, t) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\vec{z}, t | \vec{y}, t') = \int d\vec{x} [W(\vec{z} | \vec{x}, t) p(\vec{x}, t | \vec{y}, t') - W(\vec{x} | \vec{z}, t) p(\vec{z}, t | \vec{y}, t')]$$

W przypadku dyskretnej przestrzeni stanów

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n, t | n', t') = \sum_m [W(n | m, t) p(m, t | n', t') - W(m | n, t) p(n, t | n', t')]$$

Równanie Fokkera - Plancka

$$W(\vec{z}|\vec{x}, t) = W(\vec{x}|\vec{z}, t) = 0, \quad A_i(\vec{z}, t) \neq 0, \quad B_{ij}(\vec{z}, t) \neq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\vec{z}, t|\vec{y}, t') = - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(\vec{z}, t) p(\vec{z}, t|\vec{y}, t')] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(\vec{z}, t) p(\vec{z}, t|\vec{y}, t')]$$

Równanie to opisuje procesy z ciągłymi (ale nigdzie nie różniczkowalnymi) trajektoriami (np. procesy dyfuzji)

Równanie Liouville'a (procesy deterministyczne)

$$W(\vec{z}|\vec{x}, t) = W(\vec{x}|\vec{z}, t) = 0, \quad A_i(\vec{z}, t) \neq 0, \quad \forall_{i,j} B_{ij}(\vec{z}, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\vec{z}, t|\vec{y}, t') = - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(\vec{z}, t) p(\vec{z}, t|\vec{y}, t')]$$

Jeżeli $\vec{x} = \vec{x}(t)$ jest rozwiązaniem równania deterministycznego

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{A}(\vec{x}(t), t), \quad \vec{x}(0) = \vec{y},$$

to $p(\vec{z}, t|\vec{y}, 0) = \delta(\vec{z} - \vec{x}(t))$ jest rozwiązaniem równania Liouville'a z warunkiem początkowym $p(\vec{z}, 0|\vec{y}, 0) = \delta(\vec{z} - \vec{y})$.
(zobaczmy to przy omawianiu stochastycznych równań różniczkowych).

Wsteczne równanie Chapmana - Kołmogorowa

Z równania Chapmana – Kołmogorowa („forward”) możemy uzyskać rozkład prawdopodobieństwa przy zadanym warunku początkowym

$$p(\vec{x}, t | \vec{y}, t) = \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

Analogicznie można wyprowadzić wsteczne („backward”) równanie Chapmana – Kołmogorowa, które pozwala uzyskać rozkład prawdopodobieństwa w przeszłości, tzn. przy zadanym warunku końcowym

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} p(\vec{x}, t | \vec{y}, t') = & - \sum_i A_i(\vec{y}, t') \frac{\partial}{\partial y_i} p(\vec{x}, t | \vec{y}, t') - \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij}(\vec{y}, t') \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} p(\vec{x}, t | \vec{y}, t') + \\ & + \int d\vec{z} W(\vec{z} | \vec{y}, t') [p(\vec{x}, t | \vec{y}, t') - p(\vec{x}, t | \vec{z}, t')] \end{aligned}$$

Wsteczne równanie Fokkera - Plancka

Równania „forward” i „backward” są równoważne