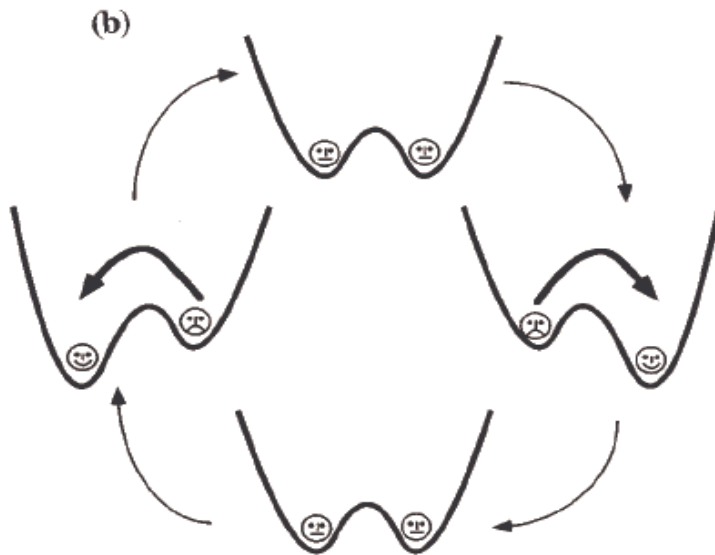
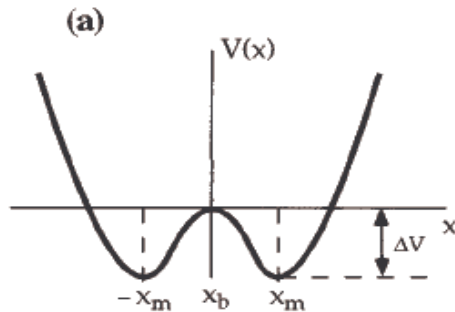


# Rezonans stochastyczny



Zjawisko, polegające na maksymalizacji odpowiedzi układu (zwykle nieliniowego) na pobudzenie periodyczne przez dodanie szumu stochastycznego na wejściu.

Przykład: cząstka przetłumiona w pobudzonym okresowo potencjale bistabilnym

Prawdopodobieństwo opuszczenia studni na jednostkę czasu dane jest wzorem Kramersa i zmienia się asymetrycznie wraz z modulacją okresową.

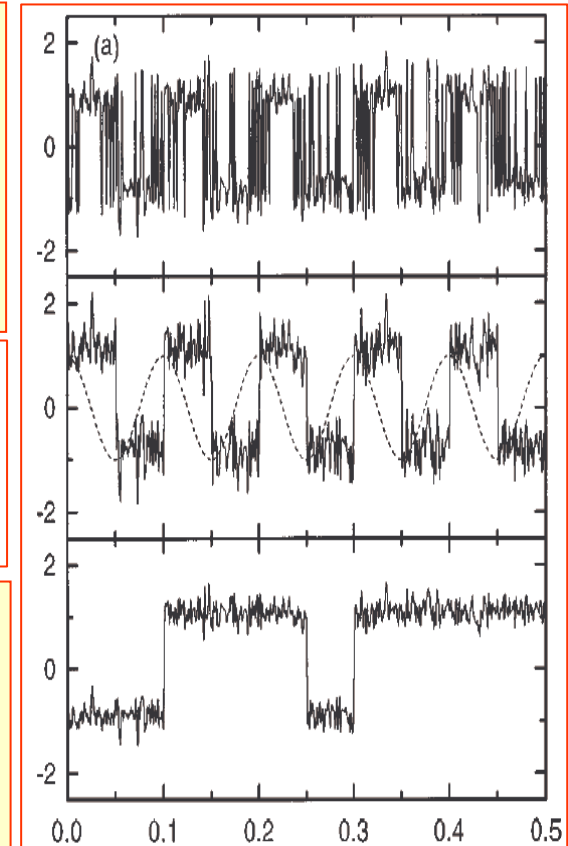
$$r_{K\pm}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta V \mp A \sin \omega_s t}{D}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx} + A \sin \omega_s t + \xi(t)$$

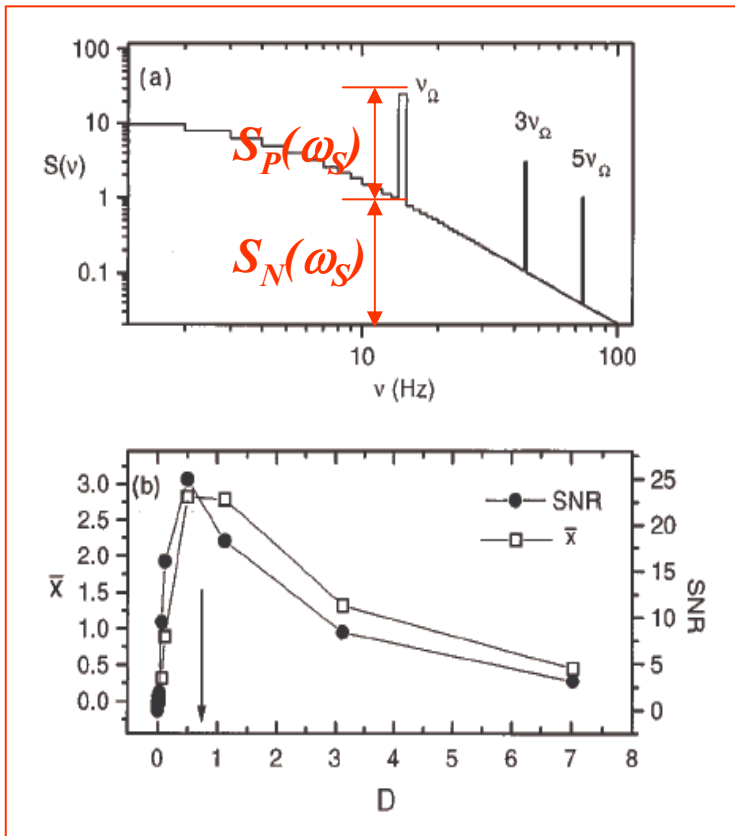
$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$$

Przy optymalnym natężeniu szumu  $D$  położenie cząstki w studniach potencjału synchronizuje się z sygnałem periodycznym



# Charakteryzacja rezonansu stochastycznego



Sygnal wyjściowy:

$$y(t) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x(t) < 0 \\ +1 & \text{dla } x(t) > 0 \end{cases}$$

Charakterystyki:

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{S_P(\omega_s)}{S_N(\omega_s)}; \quad \text{SPA} = \frac{S_P(\omega_s)}{A^2}$$

Inny przykład: układ progowy z czasem dyskretnym

$$y_{n+1}^{(i)} = \Theta \left[ A \sin(\omega_s n) + \eta_n^{(i)} - b \right]$$

$$\Theta(x) = 1 \text{ dla } x > 0, \quad \Theta(x) = 0 \text{ dla } x \leq 0,$$

$$\langle \eta_n \eta_m \rangle = 2D^2 \delta_{n,m}, \quad A < b$$

## Aperiodyczny rezonans stochastyczny

Zjawisko, polegające na maksymalizacji odpowiedzi układu nieliniowego na dowolny sygnał aperiodyczny (np. szum skorelowany) przez dodanie szumu wejściowego. Miarą rezonansu aperiodycznego może być funkcja korelacji między aperiodycznym sygnałem wejściowym i sygnałem wyjściowym, wykazująca maksimum w funkcji natężenia szumu.

$n_+$  - prawdopodobieństwo, że cząstka jest w prawej studni potencjału ( $x \approx +c$ )

$n_- = 1 - n_+$  - prawdopodobieństwo, że cząstka jest w lewej studni potencjału ( $x \approx -c$ )

Rozkład prawdopodobieństwa można przybliżyć przez  $p(x, t) = n_+ \delta(x - c) + n_- \delta(x + c)$

**Równanie Master** 
$$\frac{dn_+}{dt} = -\frac{dn_-}{dt} = W_-(t)n_- - W_+(t)n_+ = W_-(t) - [W_-(t) + W_+(t)]n_+$$

Jest to równanie pierwszego rzędu, liniowe, ze współczynnikami zależnymi od czasu, którego rozwiązanie ma postać

$$n_+(t) = g^{-1}(t) \left[ n_+(t_0)g(t_0) + \int_{t_0}^t W_-(t')g(t')dt' \right], \quad g(t) = \exp \left[ \int_{t_0}^t (W_+(t') + W_-(t'))dt' \right]$$

Wprowadźmy ogólnie:

$\mu$  - bezwymiarowy parametr, opisujący stosunek natężenia szumu do wysokości bariery potencjału,

$\eta_0$  - bezwymiarowy parametr, opisujący modulację  $\mu$  przez sygnał periodyczny

$$W_{\pm}(t) = f(\mu \pm \eta_0 \cos \omega_s t) \approx \frac{1}{2} (\alpha_0 \mp \alpha_1 \eta_0 \cos \omega_s t + \alpha_2 \eta_0^2 \cos^2 \omega_s t \mp \dots)$$

$$\frac{1}{2} \alpha_0 \equiv f(\mu), \quad \frac{1}{2} \alpha_n \equiv \left. \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n f}{d\eta^n} \right|_{\mu}$$

Równanie Master można wówczas scałkować, otrzymując

$$n_+(t|x_0, t_0) = \frac{1}{2} \left[ e^{-\alpha_0(t-t_0)} \left[ 2\delta_{x_0 c} - 1 - \frac{\alpha_1 \eta_0 \cos(\omega_s t_0 - \phi)}{(\alpha_0^2 + \omega_s^2)^{1/2}} \right] + 1 + \frac{\alpha_1 \eta_0 \cos(\omega_s t - \phi)}{(\alpha_0^2 + \omega_s^2)^{1/2}} \right]$$

Funkcja autokorelacji

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(t+\tau)|x_0, t_0 \rangle &= +c^2 n_+(t+\tau|+c, t) n_+(t|x_0, t_0) - c^2 n_+(t+\tau|-c, t) n_-(t|x_0, t_0) \\ &\quad - c^2 n_-(t+\tau|+c, t) n_+(t|x_0, t_0) + c^2 n_-(t+\tau|-c, t) n_-(t|x_0, t_0) \\ &= c^2 \{ [2n_+(t+\tau|+c, t) - 1 + 2n_+(t+\tau|-c, t) - 1] n_+(t|x_0, t_0) - [2n_+(t+\tau|-c, t) - 1] \} \end{aligned}$$

W granicy  $t_0 \rightarrow -\infty$  otrzymujemy coś w rodzaju „stacjonarnej” funkcji autokorelacji (zależnej periodycznie od czasu, ale nie zawierającej wkładu od procesów przejściowych, czyli niezależnej od warunku początkowego)

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle x(t)x(t+\tau)|x_0, t_0 \rangle \\ &= c^2 e^{-\alpha_0|\tau|} \left[ 1 - \frac{\alpha_1^2 \eta_0^2 \cos^2(\omega_s t - \phi)}{\alpha_0^2 + \omega_s^2} \right] + \frac{c^2 \alpha_1^2 \eta_0^2 \{ \cos \omega_s \tau + \cos[\omega_s(2t + \tau) + 2\phi] \}}{2(\alpha_0^2 + \omega_s^2)} \end{aligned}$$

Funkcja autokorelacji uśredniona po okresie sygnału periodycznego

$$\langle \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \rangle_t = \frac{\omega_s}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_s} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle dt = c^2 e^{-\alpha_0|\tau|} \left[ 1 - \frac{\alpha_1^2 \eta_0^2}{2(\alpha_0^2 + \omega_s^2)} \right] + \frac{c^2 \alpha_1^2 \eta_0^2 \cos \omega_s \tau}{2(\alpha_0^2 + \omega_s^2)}$$

Z twierdzenia Wienera - Chinczyna wynika, że widmo mocy jest transformatą Fouriera funkcji autokorelacji

$$\begin{aligned} \langle S(\Omega) \rangle_t &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \rangle_t e^{-i\Omega\tau} d\tau \\ &= \left[ 1 - \frac{\alpha_1^2 \eta_0^2}{2(\alpha_0^2 + \omega_s^2)} \right] \left[ \frac{2c^2 \alpha_0}{\alpha_0^2 + \Omega^2} \right] + \frac{\pi c^2 \alpha_1^2 \eta_0^2}{2(\alpha_0^2 + \omega_s^2)} [\delta(\Omega - \omega_s) + \delta(\Omega + \omega_s)] \end{aligned}$$

Zwykle oblicza się widmo, ograniczone do dodatnich częstotliwości

$$S(\Omega) = \langle S(\Omega) \rangle_t + \langle S(-\Omega) \rangle_t = \left[ 1 - \frac{\alpha_1^2 \eta_0^2}{2(\alpha_0^2 + \omega_s^2)} \right] \left[ \frac{4c^2 \alpha_0}{\alpha_0^2 + \Omega^2} \right] + \frac{\pi c^2 \alpha_1^2 \eta_0^2}{\alpha_0^2 + \omega_s^2} \delta(\Omega - \omega_s)$$

Tło szumowe

Wysokość pików na  
częstotliwości sygnału  
periodycznego

## Bistabilna studnia potencjału

### Potencjał

$$V(x,t) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 - \varepsilon x \cos \omega_s t = U_0 \left[ -2 \left( \frac{x}{c} \right)^2 + \left( \frac{x}{c} \right)^4 \right] - U_1 \left( \frac{x}{c} \right) \cos \omega_s t$$

$$c = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \text{wyznacza położenie minimów potencjału}$$

$$U_0 = \frac{a^2}{4b}, \quad \text{wysokość bariery potencjału (przy braku modulacji)}$$

$$U_1 = \varepsilon c$$

Prawdopodobieństwa przejść dane są wzorem Kramersa

$$T_K = W_K^{-1} = \frac{2\pi \exp\left(\frac{2U_0}{D}\right)}{[V''(0)/V''(c)]^{1/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \exp\left(\frac{2U_0}{D}\right) \Rightarrow W_{\pm}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{2(U_0 \pm U_1 \cos \omega_s t)}{D}\right)$$

W notacji ogólnej z poprzednich slajdów

$$\mu = \frac{U_0}{D}, \quad \eta_0 = \frac{U_1}{D} = \frac{\varepsilon c}{D} \Rightarrow$$

$$f(\mu + \eta_0 \cos \omega_s t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-2(\mu + \eta_0 \cos \omega_s t)},$$

$$\alpha_0 = 2f(\eta=0) = \frac{\sqrt{2}a}{\pi} e^{-2U_0/D},$$

$$\alpha_1 = -2 \frac{df}{d\eta}(\eta=0) = \frac{2\sqrt{2}a}{\pi} e^{-2U_0/D} = 2\alpha_0$$

Wstawiając do wyprowadzonych wcześniej wzorów, otrzymujemy wyrażenie na widmo mocy

$$S(\Omega) = \left[ 1 - \frac{\frac{4a^2 \epsilon^2 c^2}{\pi^2 D^2} e^{-4U_0/D}}{\frac{2a^2}{\pi^2} e^{-4U_0/D} + \omega_s^2} \right] \left[ \frac{\frac{4\sqrt{2}ac^2}{\pi} e^{-2U_0/D}}{\frac{2a^2}{\pi^2} e^{-4U_0/D} + \Omega^2} \right] + \left[ \frac{\frac{8a^2 \epsilon^2 c^4}{\pi D^2} e^{-4U_0/D}}{\frac{2a^2}{\pi^2} e^{-4U_0/D} + \omega_s^2} \right] \delta(\Omega - \omega_s)$$

oraz stosunek sygnału do szumu

$$R = \left[ \frac{\sqrt{2}a\epsilon^2 c^2}{D^2} e^{-2U_0/D} \right] \times \left[ 1 - \frac{\frac{4a^2 \epsilon^2 c^2}{\pi^2 D^2} e^{-4U_0/D}}{\frac{2a^2}{\pi^2} e^{-4U_0/D} + \omega_s^2} \right]^{-1}$$

B. McNamara and K. Wiesenfeld,  
*Phys. Rev.* **A39**, 4854 (1989).

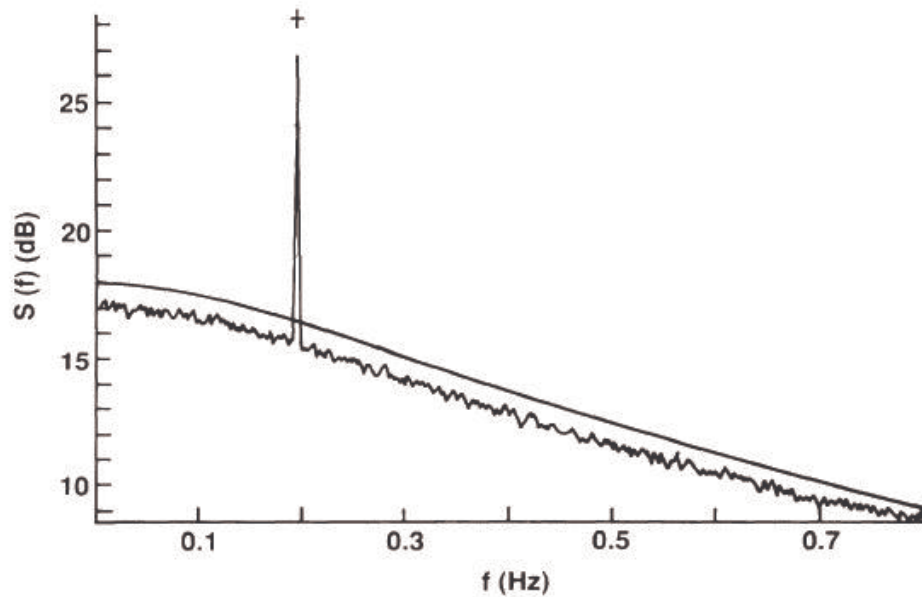


FIG. 8. Typical power spectrum  $S(f)$  from the double well with  $f_s=0.195$ ,  $a=32$ ,  $U_0=256$ ,  $\epsilon=8$ ,  $D=256$ , and  $\Delta t=0.005$ . Note that both the theoretical signal (cross) and noise differ from the simulation by roughly 1 dB.

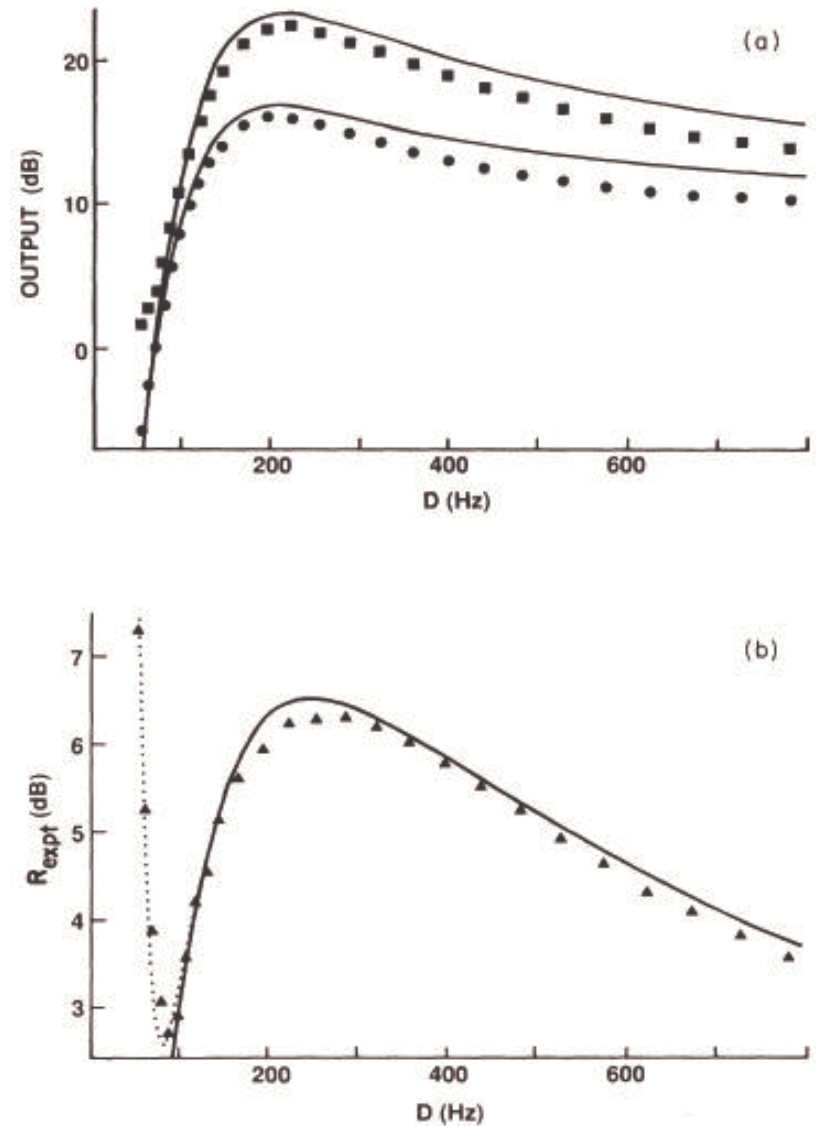


FIG. 9. (a) Output power spectral density for signal (squares) and noise (circles) as a function of input noise variance  $D$  ( $f_s=0.195$ ,  $a=32$ ,  $U_0=256$ ,  $\epsilon=8$ ,  $\Delta t=0.005$ ). (b) Signal-to-noise ratio  $R_{\text{expt}}$  as a function of  $D$  with the same parameters. The dotted line represents  $R_{\text{expt}_{1+2}}$ , as described in the text.