Wielowymiarowe zmienne losowe

1. Pewien mechanizm zawiera dwa koła zębate, duże i małe. Warunki techniczne montażu urządzenia zostają naruszone, jeżeli w obu kołach występują dodatnie odchylenia grubości zębów od nominalnego wymiaru. Robotnik dysponuje dwoma kołami zębatymi dużymi, jednym z dodatnim i jednym z ujemnym odchyleniem grubości zębów od nominalnego wymiaru, oraz dwoma kołami małymi, o własnościach j.w. Rozważmy zero-jedynkowe zmienne losowe X, Y. Zmienna X przyjmuje wartość 1, jeżeli robotnik wybierze duże koło z dodatnim odchyleniem grubości zębów i 0, jeżeli z ujemnym; podobnie zmienna Y w odniesieniu do koła małego. (a) Wyznaczyć i naszkicować dystrybuantę dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y), (b) Obliczyć prawdopodobieństwo naruszenia warunków technicznych montażu urządzenia.

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelką

	x_i		
y_k	1	2	3
2	0.1	0.2	0.3
4	0.1	0.1	0.2

Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu brzegowego zmiennej Y.

3. Prawdopodobieństwo trafienia w okrąg ma rozkład jednostajny

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{dla} \quad x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{p.p.} \end{cases}$$

Znaleźć wartość oczekiwaną zmiennych losowych (a) $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, (b) $|X|$.

4. Podczas strzelania do celu, położonego w punkcie (0,0), rozrzut punktów, w które trafia pocisk, ma rozkład

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\right).$$

Znaleźć prawdopodobieństwo trafienia w obszar $x^2 + y^2 < R^2$, $R =$const.

5. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład o gęstości

$$f(x,y) = \frac{1}{300\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-30)^2}{100} + \frac{(y-40)^2}{225}\right]\right\}.$$

Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma kwadratów standaryzpwanych zmiennych losowych X i Y nie przekracza 1.

Rozkłady brzegowe. Niezależność zmiennych losowych

6. Rzucamy jedną kostką do gry. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartość 0, gdy wyrzucamy parzystą liczbę oczek (zdarzenie A) oraz wartość 1, gdy wyrzucamy nieparzystą liczbę oczek (zdarzenie A'), zaś zmienna losowa Y przyjmuje wartość

1, gdy liczba wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3 (zdarzenie B) oraz wartość 2, gdy liczba oczek nie jest podzielna przez 3 (zdarzenie B'). Zbadać niezależność zmiennych losowych X, Y.

7. Trójwymiarowa zmienna losowa ma rozkład o dystrybuancie

$$F(x,y,z) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-2y} - e^{-3z} + e^{-(x+2y)} + e^{-(x+3z)} + \\ +e^{-(2y+3z)} - e^{-(x+2y+3z)} & \text{dla} \quad x>0, y>0, z>0 \\ 0 & \text{p.p.} \end{cases}$$

(a) Wyznaczyć jednowymiarowe rozkłady brzegowe zmiennych X, Y, Z, (b) Zbadać niezależność tych zmiennych.

8. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład jednostajny na zbiorze $D = \{(x,y) : 0 < x < y < 1\}$. Wykazać, że zmienne losowe X, Y nie są niezależne.

9. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład

$$f(x,y) = \begin{cases} Cxy & \text{dla} \quad 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{p.p.} \end{cases}$$

Wyznaczyć (a) stałą C, (b) dystrybuantę.

10. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład

$$f(x,y) = \begin{cases} Cxy & \text{dla} \quad x>0, y>0, x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{p.p.} \end{cases}$$

(a) Wyznaczyć stałą C, (b) Znaleźć $\Pr(X > Y)$, (c) Wyznaczyć rozkład brzegowy zmiennej losowej X.

11. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład jednostajny w obszarze $D = \left\{(x,y) : 0 \le x < \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \cos x\right\}$. Wyznaczyć gęstości rozkładów brzegowych.

12. Zmienna losowa (X,Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o gęstości

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x-m_1}{\sigma_1}\frac{y-m_2}{\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

Znaleźć brzegowe gęstości prawdopodobieństwa.

13. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(r)} x^{p-1}(y-x)^{r-1}e^{-y} & \text{dla} \quad 0 < x < y \\ 0 & \text{p.p.} \end{cases}$$

Znaleźć brzegowe gęstości prawdopodobieństwa.

14. Niech X_i, $i = 1, 2, \ldots n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Znaleźć dystrybuanty zmiennych losowych $Y = \max(X_1, X_2, \ldots X_n)$, $Y = \min(X_1, X_2, \ldots X_n)$