Twierdzenia graniczne. Prawa wielkich liczb.

1. Zbadać, czy spełnione są założenia prawa wielkich liczb Markowa w przypadku, gdy zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o rozkładach (a) Poissona z $\lambda_k = 2^{-k}$, (b) normalnych $N(0, k)$.

2. W zajezdni znajduje się 200 autobusów. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany autobus jest sprawny, wynosi $p = 0.7$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w danej chwili jestw zajezdni co najmniej 160 sorawnych autobusów.

3. Urządzenie składa się z n elementów. Urządzenie pracuje, jeżeli co najmniej 10% elementów jest sprawnych. Prawdopodobieństwo awarii jednego elementu wynosi $q = 0.8$. Jaka powinna być liczba elementów, żeby z prawdopodobieństwem 0.85 urządzenie pracowało?

4. W kampusie uniwersyteckim są 2 stołówki po 105 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 studentów je obiad, a wyboru restauracji dokonują losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc w każdej restauracji należy przygotować, aby to prawdopodobieństwo było mniejsze od 0.5%?

5. Niech $X_i, i = 1, 2, \ldots 200$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach geometrycznych z $\Pr(X_k = i) = 2^{-i}$, $i \in \mathbf{N}$, $k = 1, 2, \ldots 200$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że $1 \leq \frac{1}{200} \sum_{k=1}^{200} X_k \leq 4$.

6. Niech $X_i, i = 1, 2, \ldots 100$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach Poissona z $\Pr(X_i = k) = e^{-2} 2^k / k!$, $k \in \mathbf{N}$, $i = 1, 2, \ldots 100$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że $\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i > 190$.

7. Dodajemy 10 000 liczb, zaokrąglonych z dokładnością do 10^{-m}. Błędy zaokrąglenia są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym w przedziale $(-10^{-m}/2, 10^{-m}/2)$. Wyznaczyć przedział, w którym z prawdopodobieństwem 0.99 będzie się zawierał błąd sumy.

8. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach dwupunktowych, $\Pr(X_n = 0) = q_n = 1 - p_n$, $\Pr(X_n = 1) = p_n$, $0 < p_n < 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ jest rozbieżny, to ciąg $U_n = c_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m_k)$, gdzie $c_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} V(X_k)}$, jest zbieżny według dystrybuant do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Wskazówka: Wykazać, że spełnione są założenia twierdzenia granicznego Lapunowa.

9. Narciarz podczas treningu wielokrotnie pokonuje ten sam odcinek trasy, nabywając doświadczenia, przez co prawdopodobieństwo ukończenia przejazdu wzrasta w kolejnych próbach i w k-tej próbie wynosi $p_k = 0.9 - 0.8^k$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że spośród 100 kolejnych przejazdów co najmniej 90 będzie udanych.

10. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach dwupunktowych, $\Pr(X_n = 0) = 1 - n^{-1}$, $\Pr(X_n = 1) = n^{-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Zbadać, czy dla ciągu $\{X_n\}$ zachodzi centralne twierdzenie graniczne Lapunowa. Wskazówka: por. zad. 8.