

# Wykład IX i X

- Funkcje próbne,
- Definicja i przykłady dystrybucji,
- Ciągi dystrybucyjne, ciągi deltopodobne,
- Mnożenie dystrybucji przez funkcję,
- Różniczkowanie dystrybucji, laplasjan dystrybucyjny,
- Splot dystrybucji,
- Superpozycja delty Diraca z funkcją różniczkowalną.

**Dystrybucje** nazywane są również **funkcjami uogólnionymi**. W istocie dystrybucje są funkcjami, ale nie zmiennych rzeczywistych, lecz **funkcjonałami**, tzn. ich argumentami są "zwykłe" funkcje zmiennych rzeczywistych, a wartości są liczbami rzeczywistymi bądź zespolonymi.

Dziedziną dystrybucji jest przestrzeń  $\mathcal{D}$  **funkcji próbnych**, zdefiniowanych jako funkcje klasy  $C^\infty(\mathbb{R})$  (lub, ogólniej,  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ) o **nośniku ograniczonym**, tzn. przyjmujących wartości niezerowe tylko na skończonym, spójnym podzbiórze  $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{R}^n$  zwanym **nośnikiem**. W szczególności można zawsze przyjąć, że nośnik funkcji próbnej zawarty jest w jakimś przedziale  $(-A, A)$  (lub  $(-A, A)^n$ ) z dostatecznie dużym  $A$ . W związku z tym  $\varphi(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ .

Dystrybucja  $T$  przyporządkowuje każdej funkcji próbnej  $\varphi \in \mathcal{D}$  liczbę rzeczywistą lub zespoloną, tzn.

$$T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \vee T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (\clubsuit)$$

Dystrybucje formalnie zdefiniowane są jako liniowe operatory całkowe, działające na funkcje próbne. Z każdą dystrybucją związany jest inny operator. Zamiast pisać jawnie całkę, najczęściej używa się oznaczeń jak dla iloczynu skalarnego w przestrzeniach funkcyjnych, zapisywanego jako  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  lub  $(\cdot, \cdot)$ . Wówczas przyporządkowanie  $(\clubsuit)$  wygląda następująco

$$T : \varphi \in \mathcal{D} \rightarrow (T, \varphi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\varphi(x)dx \in \mathbb{R}, \quad (\spadesuit)$$

przy czym należy pamiętać, że całka w  $(\spadesuit)$  jest w istocie po ograniczonym nośniku funkcji próbnej  $\varphi(x)$ . Na przykład najbardziej znana dystrybucja, **delta Diraca**  $\delta$  (lub  $\delta(x)$ ), przypisuje każdej funkcji próbnej jej wartość w punkcie zero,  $\varphi(0)$ ,

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Dystrybucje  $T_1, T_2$  są równe, jeśli działając na dowolną funkcję próbną, dają ten sam wynik,

$$T_1 = T_2 \leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (T_1, \varphi) = (T_2, \varphi).$$

W ten sposób sprawdza się równość dwóch dystrybucji, zapisuje się dystrybucję w innej postaci itp.

Teoria dystrybucji, opracowana przez francuskiego matematyka Laurenta Schwartza, wywodzi się z konieczności ścisłego sformułowania pewnych operacji matematycznych, dokonywanych przez fizyków bez głębszego zastanowienia. Na przykład wiadomo, że potencjał elektryczny  $\phi = \phi(\vec{r})$  spełnia równanie Poissona

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}),$$

gdzie  $\rho(\vec{r})$  jest gęstością objętościową ładunku. W przypadku ładunku punktowego  $q$  gęstość ta jest nieskończona w jednym punkcie i zerowa w pozostałych, ponadto musi spełniać warunek  $\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}) dV = q$ . Prowadzi to do wniosku, że

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}), \quad \delta(\vec{r}) = \begin{cases} \infty & \text{dla } \vec{r} = 0, \\ 0 & \text{dla } \vec{r} \neq 0. \end{cases}, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r}) dV = 1.$$

Ten ostatni wynik nie jest możliwy do uzyskania, jeżeli potraktować  $\delta(\vec{r})$  jako zwykłą funkcję, a całkę obliczać w sensie Reimanna, Lebesgue'a lub jakimkolwiek innym, gdyż wartość całki nie może być wrażliwa na nieskończoną wartość funkcji w jednym punkcie (na zbiorze miary zero), wobec tego w zwykłym sensie  $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r}) dV = 0$ .

Ponadto wiadomo, że potencjał ładunku punktowego  $q$  ma postać  $\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Musi więc istnieć sposób ścisłego wykazania, że (używając laplasjanu w zmiennych sferycznych)

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \frac{d^2}{dr^2} \left( r \frac{1}{r} \right) = -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(r), \quad \delta(r) = \begin{cases} \infty & \text{dla } r = 0, \\ 0 & \text{dla } r > 0. \end{cases}$$

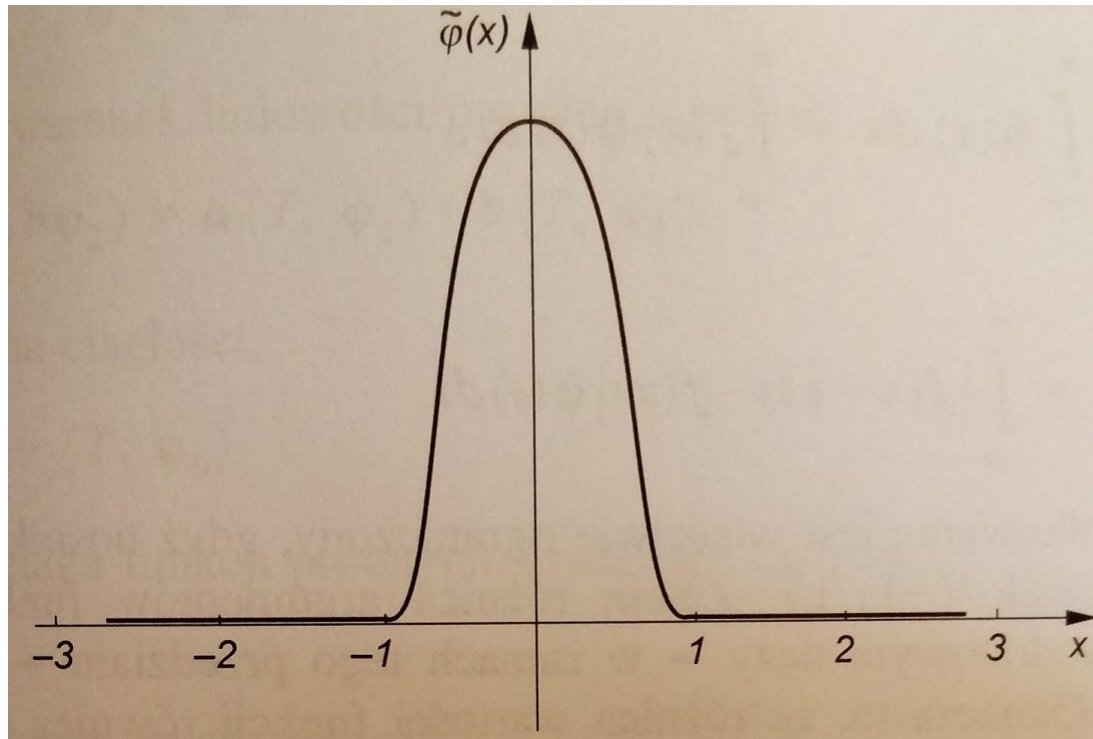
Powyższe równanie jest oczywiście spełnione w sensie funkcyjnym dla  $r > 0$ , ale co z punktem  $r = 0$ , w którym potencjał jest osobliwy?

Teoria dystrybucji pozwala wykonywać tego rodzaju operacje w sposób ścisły i dobrze zdefiniowany. Widać jednak, że np.  $\delta(r)$  nie może być wówczas "zwykłą" funkcją. Ponadto widać, że  $\delta(\vec{r})$  i  $\delta(r)$  występują zwykle w połączeniu z operacjami różniczkowania i całkowania (np. jako osobliwe rozwiązania równań różniczkowych), co usprawiedliwia przyjęcie opisu działania dystrybucji przez całkę (♠).

Przestrzeń funkcji próbnych  $D$ 

Przestrzeń funkcji klasy  $C^\infty(\mathbb{R})$ , całkownych, o ograniczonym nośniku

Przykład 
$$\varphi(x) = \begin{cases} N \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$



## Dystrybucje

Funkcjonały liniowe, ciągłe na przestrzeni  $D$

$$T : \varphi \rightarrow T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\varphi(x)dx \in \mathfrak{R}$$

## Przykłady dystrybucji

- **Funkcja całkowna**  $T = f(x)$   $\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$  Również zwykłą funkcję  $f(x)$  można traktować jako dystrybucję
- **Wartość główna całki**  $T = P \frac{1}{x}$   $\left\langle P \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]$

Podobnie dla całek podwójnie niewłaściwych, np.

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \frac{x}{x^2 + 1} dx = 0$$

Uwaga: ważne, żeby przy obliczaniu całek niewłaściwych w sensie wartości głównej wyłączenie osobliwości funkcji podcałkowej lub przejście graniczne do nieskończoności następowało symetrycznie, jak w definicjach powyżej i obok ; por. zad. 4(b) w serii C10-C11 w skrypcie do zadań

- Delta Diraca  $T = \delta(x)$   $\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$  Najbardziej znana dystrybucja

Podobnie dla delty scentrowanej w punkcie  $x=a$

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a)$$

- Dystrybucja  $T = \frac{1}{x+i0}$   $\left\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx = 0$

- Ważny związek

$$\frac{1}{x+i0} = P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$$

Dowód na następnej transparencji

Należy wykazać że w sensie dystrybucyjnym

$$\frac{1}{x+i0} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta.$$

Udowadniamy to, pokazując że równość ta (w sensie dystrybucyjnym) jest prawdziwa dla dowolnej funkcji próbnej  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x+i0}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-i\varepsilon)\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx - i\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx \right].$$

W pierwszej całce funkcja  $x\varphi(x)$  ma wartość zero w  $x=0$ , więc jest nieosobliwa i całka jest zbieżna dla dowolnego  $\varepsilon$ . Można więc tę całkę napisać w sensie wartości głównej, a następnie zmienić kolejność przejścia do granicy i (skoro całki są zbieżne) przejść do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$  pod znakiem całki.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\eta} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx + \int_{\eta}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx \right] = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\eta} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx + \int_{\eta}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx \right] \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\eta} \frac{x\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{\eta}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x^2} dx \right] = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\eta} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\eta}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] = \left( P\frac{1}{x}, \varphi \right). \end{aligned}$$

W drugiej całce dokonujemy podstawienia  $x = \varepsilon t \Rightarrow dx = \varepsilon dt$  i przechodzimy do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$  pod znakiem całki.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\varepsilon t)}{\varepsilon^2 t^2 + \varepsilon^2} \varepsilon dt = i \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varepsilon t)}{t^2+1} dt = i\varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = i\pi\varphi(0) = i\pi(\delta, \varphi).$$

$$\Rightarrow \forall \varphi \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x+i0}, \varphi \right) = \left( P\frac{1}{x} - i\pi\delta, \varphi \right) \quad \text{cbdo.}$$

## Ciągi dystrybucyjne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T \Leftrightarrow \forall \varphi \in D \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Ciągi dystrybucyjne. Przykład

Pokażemy że w sensie dystrybucyjnym  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) = 0$ .

Zauważmy że w sensie funkcyjnym ciąg funkcyjny  $\cos(nx)$  nie jest zbieżny przy  $n \rightarrow \infty$ : np. dla  $x = \pi$  mamy  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ , czyli mamy dwa podciągi o wartościach 1 lub  $-1$ , czyli w  $x = \pi$  ciąg  $\cos(n\pi)$  nie jest zbieżny (i to samo można powiedzieć o prawie każdym innym punkcie  $x$ ). Natomiast w sensie dystrybucyjnym chodzi o zbieżność całki, zawierającej  $\cos(nx)$  i dowolną funkcję próbną  $\varphi(x)$  gładką i o ograniczonej zmienności; wówczas przy  $n \rightarrow \infty$  coraz szybsze oscylacje  $\cos(nx)$  powodują pod całką dodawanie i odejmowanie niemal tych samych wartości  $\varphi(x)$ ,  $\varphi(x')$  w punktach  $x$ ,  $x'$  leżących bardzo blisko siebie, a więc w praktyce wyzerowanie całki i  $\cos(nx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(nx), \varphi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(nx) \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \sin(nx) \right)' \varphi(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{n} \sin(nx) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ bo } \varphi(x \rightarrow \pm\infty) = 0} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(nx) \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

Ostatnią całkę szacujemy, biorąc pod uwagę że  $|\varphi'(x)|$  jest funkcją ograniczoną i o ograniczonym nośniku, więc całkowlaną,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \sin(nx) \varphi'(x) dx \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(nx)| |\varphi'(x)| dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x)| dx = 0.$$

Ostatecznie

$$\forall \varphi \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(nx), \varphi) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) = 0$$



- Ciągi deltopodobne

$f(x)$  – całkowna funkcja ciągła spełniająca warunek  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Przykłady  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin x}{x}$

Można wykazać że  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n f(nx) = \delta(x)$$

$$\begin{aligned} \forall \varphi \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f_{\varepsilon}(x), \varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx = \|x = \varepsilon t \Rightarrow dx = \varepsilon dt\| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(\varepsilon t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon t)] dt = \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \varphi(0) = (\delta, \varphi) \quad \text{cbdo.} \end{aligned}$$

## Mnożenie dystrybucji przez funkcję

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$$

Oczywiste uogólnienie wzoru dla funkcji  $(fg, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\varphi(x)dx = (g, f\varphi)$

Przykład  $\langle x\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x\varphi \rangle = 0\varphi(0) = 0 \Rightarrow x\delta = 0$

## Różniczkowanie dystrybucji

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

Oczywiste uogólnienie wzoru na całkowanie przez części dla funkcji

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = (x+a)^n = f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi')$$

(↑=0, ponieważ  $\varphi(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ )

## Przykłady

$$\langle |x|', \varphi \rangle = \langle \text{sgn } x, \varphi \rangle \Rightarrow |x|' = \text{sgn } x$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Wyprowadzenia na kolejnej transparencji

$$\langle \theta', \varphi \rangle = \varphi(0) \Rightarrow \theta' = \delta$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$$

Funkcja Heaviside'a (schodkowa)

$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

- $T = |x| \Rightarrow T' = \text{sgn}(x)$

$$\begin{aligned}
 (|x|', \varphi) &= -(|x|, \varphi') = - \int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} x \varphi'(x) dx \\
 &= \underbrace{x\varphi(x)|_{-\infty}^0}_{=0 \text{ bo } \varphi(x \rightarrow -\infty)=0} - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx - \underbrace{x\varphi(x)|_0^{\infty}}_{=0 \text{ bo } \varphi(x \rightarrow \infty)=0} + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(x) \varphi(x) dx = (\text{sgn}(x), \varphi) \Rightarrow |x|' = \text{sgn}(x) \text{ cbdo.}
 \end{aligned}$$

- $T = \Theta(x) \Rightarrow T' = \delta$

$$(\Theta', \varphi) = -(\Theta, \varphi') = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = - \underbrace{\varphi(x)|_0^{\infty}}_{\varphi(x \rightarrow \infty)=0} = \varphi(0) = (\delta, \varphi) \Rightarrow \Theta'(x) = \delta(x), \text{ cbdo.}$$

- $T = \delta$

$$\begin{aligned}
 (\delta', \varphi) &= -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0) \\
 (\delta'', \varphi) &= -(\delta', \varphi') = (\delta, \varphi'') = \varphi''(0) \\
 &\vdots \\
 (\delta^{(n)}, \varphi) &= \dots = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).
 \end{aligned}$$

## Splot dystrybucji

- Splot funkcyjny

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y)f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)f_2(x-y)dy$$

Operacja splotu często występuje w matematyce, np.

- w rachunku prawdopodobieństwa (gęstość prawdopodobieństwa sumy niezależnych zmiennych losowych jest splotem gęstości poszczególnych zmiennych),
- w teorii sygnałów (odpowiedź filtra dolno- bądź górnoprzepustowego na pobudzenie jest splotem pobudzenia i funkcji przenoszenia filtra)...

Obliczanie splotu łatwiejsze jest przy użyciu transformat Fouriera (por. następny wykład)

Definicja splotu dwóch dystrybucji (następna transparencja) stanowi uogólnienie powyższej definicji splotu funkcyjnego.

- Splot dystrybucyjny  $\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle = \langle T_1(x), \langle T_2(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$

Przykłady  $\langle T * \delta, \varphi \rangle = \langle T(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle \Rightarrow T * \delta = T$

$$T * \delta^{(n)} = T^{(n)}$$

$$\langle (T_1 * T_2)', \varphi \rangle = -\langle T_1 * T_2, \varphi' \rangle = -\langle T_1(x), \langle T_2(y), \varphi'(x+y) \rangle \rangle = \langle T_1(x), \langle T_2'(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

$$= \langle T_1 * T_2', \varphi \rangle \Rightarrow (T_1 * T_2)' = T_1 * T_2' = T_1' * T_2$$

Inne przykłady splotów dystrybucyjnych

- $T \star \delta(x-a) = T(x-a)$

$$\begin{aligned} (T \star \delta(x-a), \varphi) &= (T(x), (\delta(y-a), \varphi(x+y))) = (T(x), \varphi(x+a)) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x) \varphi(x+a) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} T(u-a) \varphi(u) du = (T(u-a), \varphi(u)) \Rightarrow T \star \delta(x-a) = T(x-a) \text{ cbdo.} \end{aligned}$$

- $T \star \delta' = T', \dots T \star \delta^{(n)} = T^{(n)}$ .

$$\begin{aligned} (T \star \delta', \varphi) &= (T(x), (\delta'(y), \varphi(x+y))) = - \left( T(x), \left( \delta(y), \underbrace{\varphi'(x+y)}_{=\frac{d\varphi(x+y)}{dy}} \right) \right) \\ &= -(T(x), \varphi'(x)) = (T'(x), \varphi(x)) \Rightarrow T \star \delta' = T' \dots \text{etc. cbdo.} \end{aligned}$$

## Superpozycja delty Diraca z funkcją różniczkowalną

Niech  $f(x_j) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$

$$\delta(f(x)) = \sum_j \frac{1}{|f'(x_j)|} \delta(x - x_j)$$

### Przykład

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)]$$

Wyrowadzenia na kolejnej transparencji.

Przy wyrowadzeniu warto zauważyć, że również  $\int_{\alpha}^{\beta} \delta(x - a) \varphi(x) dx = \begin{cases} \varphi(a) & \text{jeżeli } \alpha < a < \beta \\ 0 & \text{jeżeli } a < \alpha \text{ lub } a > \beta \end{cases}$

Jest to stwierdzenie ścisłe, ponieważ dowolną funkcję próbną o nośniku ograniczonym można „jeszcze bardziej” ograniczyć do funkcji próbnej o nośniku na przedziale  $(\alpha, \beta)$ , odpowiednio ją „obcinając” do zera poza tym przedziałem i wygładzając na krańcach przedziału, by była nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

Niech funkcja próbna  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  ma nosnik ograniczony, zawarty w przedziale  $(-A, A)$ .

Niech  $x_j, j = 1, 2, \dots, n$  będą wszystkimi miejscami zerowymi funkcji  $f(x)$ , tj.  $f(x_j) = 0$ . Przyjmujemy  $A$  tak, że  $x_j \in (-A, A), j = 1, 2, \dots, n$ .

Dzielimy przedział  $(-A, A)$  na  $n$  rozłącznych podprzedziałów  $(a_j, b_j)$ , takich że  $\forall j \ a_j < x_j < b_j$  oraz  $\bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j) = (-A, A)$ . W każdym podprzedziale z dokładnością do wyrazów liniowych zachodzi

$$\forall j \ f(x) = \underbrace{f(x_j)}_{=0} + f'(x_j)(x - x_j) + \dots \approx f'(x_j)(x - x_j)$$

$$\Rightarrow (\delta(f(x)), \varphi(x)) = \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} \delta(f(x))\varphi(x)dx \approx \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} \delta(f'(x_j)(x - x_j))\varphi(x)dx.$$

W każdej całce oddzielnie dokonujemy podstawienia  $t_j = |f'(x_j)|(x - x_j) \Rightarrow dt_j = |f'(x_j)|dx$  (pamiętamy o zamianie granic całkowania na  $p_j = |f'(x_j)|(a_j - x_j) < 0, q_j = |f'(x_j)|(b_j - x_j) > 0$ ),

$$\Rightarrow (\delta(f(x)), \varphi(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|f'(x_j)|} \int_{p_j}^{q_j} \delta(\pm t_j)\varphi\left(\frac{t_j}{|f'(x_j)|} + x_j\right) dt_j.$$

Ponieważ  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-y)\varphi(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\varphi(-u)(-du) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\varphi(-u)du = \varphi(0) = (\delta(u), \varphi(u))$   
 $\Rightarrow \delta(-y) = \delta(y)$ . Ponadto  $\forall j \ 0 \in (p_j, q_j)$ , stąd

$$\forall \varphi \ (\delta(f(x)), \varphi(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|f'(x_j)|} \varphi(x_j) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|f'(x_j)|} (\delta(x - x_j), \varphi) \Rightarrow \delta(f(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|f'(x_j)|} \delta(x - x_j) \text{ cbdo.}$$

Jako uzupełnienie wykładu zalecane jest zapoznanie się z rozwiązaniem zad. 13 w części C10-C11 w skrypcie z zadaniami (zawierającym m.in. rozwiązanie równania Poissona dla ładunku punktowego, a nawet więcej).

