

Wykład VII i VIII

- Równanie różniczkowe i szereg Bessela,
- Funkcje Bessela z indeksem całkowitym i funkcja tworząca,
- Przedstawienie całkowe funkcji Bessela,
- Wzory rekurencyjne dla funkcji Bessela,
- Funkcje Bessela z indeksem połówkowym i ich postać asymptotyczna,
- Funkcje Neumanna, Hankela i sferyczne funkcje Bessela,
- Rozwinięcie fali płaskiej na fale kuliste,
- Metoda przesunięć fazowych w kwantowej teorii rozpraszania,
- Ortogonalność funkcji Bessela.

Równanie różniczkowe na funkcje Bessela

$$x^2 J_\nu'' + xJ_\nu' + (x^2 - \nu^2)J_\nu = 0$$

Funkcje Bessela są określone przez równanie różniczkowe (ν jest indeksem)

Rozwiązania poszukujemy w postaci

$$J_\nu(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0 \quad \text{Przyjmujemy } a_0 = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(1+\lambda)}$$

$$J_\nu'(x) = \lambda x^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\lambda \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \lambda x^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n a_n x^{n-1}}_{=0 \text{ dla } n=0}$$

$$J_\nu''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \lambda x^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n a_n x^{n-1}}_{=0 \text{ dla } n=0} + \lambda x^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n a_n x^{n-1}}_{=0 \text{ dla } n=0} + x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n(n-1)a_n x^{n-2}}_{=0 \text{ dla } n=0,1}$$

Wstawiając powyższe pochodne do równania różniczkowego na funkcje Bessela, otrzymujemy

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\lambda)^2 - \nu^2 \right] a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

Przyrównując do zera współczynniki przy kolejnych potęgach x , otrzymujemy

$$x^0 : \lambda = \pm\nu; \quad x^1 : a_1 = 0; \quad x^n, n = 2, 3, 4, \dots : a_n = -a_{n-2} \frac{1}{n(n \pm 2\nu)}$$

$$\Rightarrow a_{2l+1} = 0; a_{2l} = \frac{(-1)^l}{2^{2l+\nu} l! \Gamma(l + \lambda + 1)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Szereg Bessela

$$J_\nu(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(l + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu}$$

Przy x^0 : $a_0(\lambda^2 - \nu^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\nu$ (ponieważ $a_0 \neq 0$);

Przy x^1 : $a_1[(1 + \lambda)^2 - \nu^2] = a_1[(1 \pm \nu)^2 - \nu^2] = a_1(1 \pm 2\nu) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$;

Przy $x^n, n \geq 2$: $[(n \pm \nu)^2 - \nu^2]a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = -a_{n-2}[n(n \pm 2\nu)]^{-1}$.

Ponieważ $a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = 0 \dots \Rightarrow a_{2l+1} = 0$ (współczynniki przy nieparzystych potęgach x).

Dla indeksów parzystych $n = 2l$, pamiętając że $\lambda = \pm\nu$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_{2l} &= -\frac{1}{2l(2l + 2\lambda)} a_{2l-2} = -\frac{1}{2^2 l(l + \lambda)} a_{2l-2} = \frac{1}{2^{2l} l(l + \lambda)} a_{2l-2} \frac{1}{(2l-2)(2l-2+2\lambda)} a_{2l-4} \\ &= \frac{1}{2^{4l} l(l-1)(l+\lambda)(l-1+\lambda)} a_{2l-4} = \dots = (-1)^l \frac{a_0}{2^{2l} l! (l+\lambda)(l-1+\lambda) \dots (1+\lambda)}. \end{aligned}$$

Przyjmujemy $a_0 = \frac{1}{2^{\lambda} \Gamma(1+\lambda)}$ oraz $\lambda = \nu$,

$$\Rightarrow a_{2l} = (-1)^l \frac{1}{2^{2l+\lambda} l! \Gamma(l + \lambda + 1)} = (-1)^l \frac{1}{2^{2l+\nu} l! \Gamma(l + \nu + 1)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Funkcje Bessela z indeksem całkowitym

$$J_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Gamma(n+l+1) = (n+l)!$$

- Funkcja tworząca,

$$\Psi(w, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) w^n = e^{(x/2)(w-1/w)}$$

Podobnie jak w przypadku wielomianów ortogonalnych funkcję tworzącą dla funkcji Bessela można traktować jak szereg Taylora względem zmiennej w , którego współczynnikami są funkcje Bessela $J_n(x)$

Korzystamy z rozwinięcia w szereg funkcji wykładniczej $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

$$\Psi(x, w) = e^{\frac{x}{2}(w-\frac{1}{w})} = e^{\frac{x}{2}w} e^{-\frac{x}{2w}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{xw}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2w}\right)^l = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{l!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{l+m} w^{m-l}.$$

Dokonujemy podstawienia $n = m - l \Rightarrow m = n + l$ ($n \in \mathbb{Z}$),

$$\Psi(x, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{l!(l+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} \right]}_{J_n(x)} w^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) w^n.$$

$$\Psi(e^{i\varphi}, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\varphi} = e^{ix \sin \varphi}$$

Mnożymy stronami przez $e^{-im\varphi}$ i całkujemy w granicach od 0 do 2π

$$\int_0^{2\pi} e^{i(x \sin \varphi - m\varphi)} d\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \delta_{m,n} = 2\pi J_m(x)$$

- Przedstawienie całkowe,

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin \varphi - m\varphi)} d\varphi$$

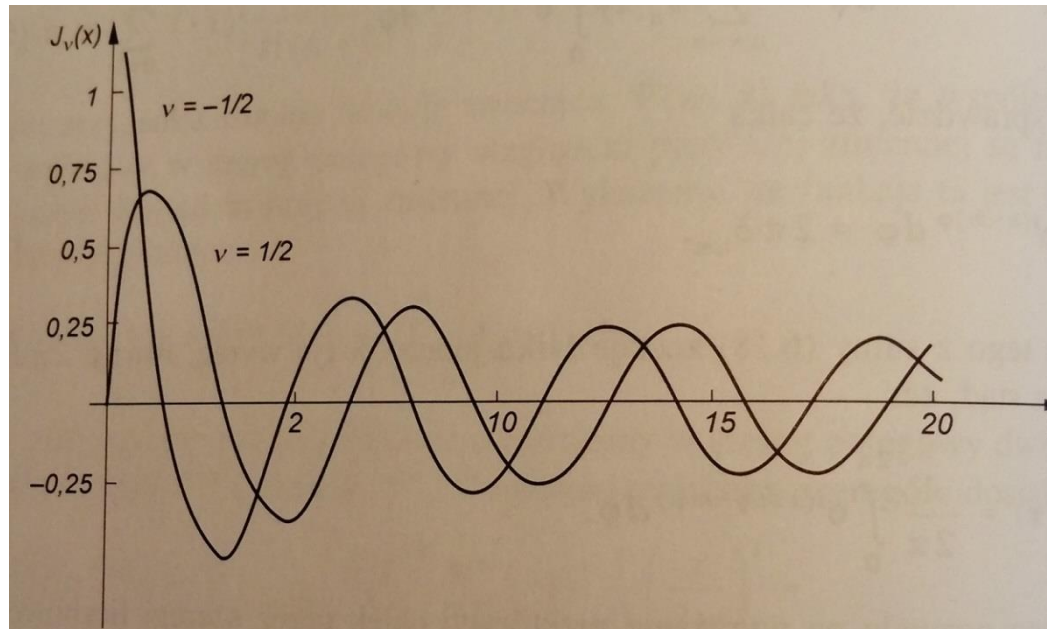
$$\Rightarrow J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \varphi} d\varphi$$

Funkcje Bessela z indeksem półówkowym

$$J_{1/2}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(l + 3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+1/2}$$

$$\Gamma(l + 3/2) = \sqrt{\pi} \frac{(2l + 2)!}{2^{2l+2} (l + 1)!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2l + 1)!}{2^{2l+1/2} l!}$$

$$\Rightarrow J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l + 1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$



Wzory rekurencyjne dla funkcji Bessela

$$J_{\nu+1} = -x^\nu \frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_\nu)$$

$$J_{\nu-1} = x^{-\nu} \frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu)$$

Przykład $J_{-1/2} = x^{-1/2} \frac{d}{dx} (x^{1/2} J_{1/2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_\nu(x)) &= \frac{d}{dx} \left(n \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{l! \Gamma(l + \nu + 1)} \frac{x^{2l}}{2^{2l+\nu}} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{l! \Gamma(l + \nu + 1)} \underbrace{\frac{2lx^{2l-1}}{2^{2l+\nu}}}_{=0 \text{ dla } l=0} \\ &= - \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{1}{(l-1)! \Gamma((l-1) + (\nu+1) + 1)} \frac{x^{2l-1}}{2^{2(l-1)+\nu+1}} \end{aligned}$$

Mnożymy obustronnie przez $-x^\nu$ i dokonujemy zamiany indeksów $n = l - 1$ ($\Rightarrow 2l - 1 = 2n + 1$),

$$-x^\nu \frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_\nu(x)) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \Gamma(n + (\nu+1) + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu+1}}_{J_{\nu+1}(x)} = J_{\nu+1}(x)$$

Drugiego wzoru rekurencyjnego dowodzimy analogicznie

- Asymptotyczna postać funkcji Bessela z indeksem półkowym

Stosując wielokrotnie wzory rekurencyjne, otrzymujemy dla $x \gg 1$

$$J_{l+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - l\frac{\pi}{2}\right)$$

$$J_{-l-\frac{1}{2}}(x) = (-1)^l \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - l\frac{\pi}{2}\right)$$

Korzystamy ze wzoru rekurencyjnego $J_{\nu+1} = -x^\nu \frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_\nu)$.

Dowód indukcyjny. Zakładamy prawdziwość wzoru dla l i sprawdzamy dla $l+1$.

$$\begin{aligned} J_{l+\frac{3}{2}}(x) &= -x^{l+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \left(x^{-l-\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}} \right) \approx -x^{l+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \frac{\sin(x - l\frac{\pi}{2})}{x^{l+1}} \\ &= -x^{l+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\cos(x - l\frac{\pi}{2})}{x^{l+1}} - (l+1) \frac{\sin(x - l\frac{\pi}{2})}{x^{l+2}} \right] \end{aligned}$$

Dla $x \rightarrow \infty$ zachodzi $x^{l+2} \gg x^{l+1}$, więc drugi wyraz zaniedbujemy,

$$-\cos\left(x - l\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - l\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - (l+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow J_{l+\frac{3}{2}}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - (l+1)\frac{\pi}{2}\right), \text{ cbdo.}$$

Funkcje Neumanna

$$N_\nu = \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu - J_{-\nu}}{\sin(\pi\nu)}, \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$N_n = \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\nu = l + 1/2 \Rightarrow N_{l+1/2} = (-1)^{l+1} J_{-l-1/2}$$

Funkcje Hankela

$$H_\nu^\pm = J_\nu \pm iN_\nu$$

Sferyczne funkcje Bessela

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) \quad x \gg 1 \Rightarrow j_l(x) \approx \frac{1}{x} \sin\left(x - l \frac{\pi}{2}\right)$$

Sferyczne funkcje Neumanna

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-l-1/2}(x) \quad x \gg 1 \Rightarrow n_l(x) \approx -\frac{1}{x} \cos\left(x - l \frac{\pi}{2}\right)$$

Sferyczne funkcje Hankela

$$h_l^\pm = j_l \pm i n_l \quad x \gg 1 \Rightarrow h_l^\pm(x) = \frac{\pm i}{x} e^{\pm i(x-l\pi/2)} = \mp i^{1\pm l} \frac{1}{x} e^{\pm ix}$$

Ortogonalność funkcji Bessela

Zdefiniujmy $y_1(x) = J_\mu(ax)$, $y_2(x) = J_\mu(bx)$, $a \neq b$

Wstawiając do równania Bessela, otrzymujemy

$$y_1'' + \frac{1}{x} y_1' + \left(a^2 - \frac{\mu^2}{x^2} \right) y_1 = 0, \quad y_2'' + \frac{1}{x} y_2' + \left(b^2 - \frac{\mu^2}{x^2} \right) y_2 = 0$$

$$\Rightarrow y_1'' y_2 - y_2'' y_1 + \frac{1}{x} (y_1' y_2 - y_2' y_1) = (b^2 - a^2) y_1 y_2$$

$$u \equiv y_1' y_2 - y_2' y_1 \Rightarrow u' + \frac{u}{x} = (b^2 - a^2) y_1 y_2 \Rightarrow x u' + u = \frac{d}{dx} (x u) = (b^2 - a^2) x y_1 y_2$$

Niech $L > 0$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Całkując obustronnie, mamy

$$Lu(L) = (b^2 - a^2) \int_0^L x y_1(x) y_2(x) dx$$

Wybierzmy a, b tak, że $J_\mu(aL) = 0$, $J_\mu(bL) = 0$, $a \neq b \Rightarrow u(L) = 0$

$$\Rightarrow \int_0^L x y_1(x) y_2(x) dx = \int_0^L x J_\mu(ax) J_\mu(bx) dx = 0$$

Kolejna część wykładu zawiera materiał nieobowiązkowy, użyteczny jednak w różnych działach fizyki, w tym optyce falowej i fizyce kwantowej

- *Rozkład fali płaskiej na fale kuliste*
- *Metoda przesunięć fazowych w kwantowej teorii rozpraszania (popularna metoda obliczania tzw. Przekrojów czynnych na rozpraszanie na zadanym potencjale, np. Coulombowskim).*

Rozwinięcie fali płaskiej na fale kuliste (wzór Rayleigha)

Rozpatrujemy falę płaską biegnącą wzdłuż osi Oz

Rozkład na szereg wielomianów Legendre'a $(\blacksquare) e^{ikz} = e^{ikr\xi} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l R_l(r) P_l(\xi), \quad \xi \equiv \cos \vartheta$

Obliczamy obustronnie laplasjan powyższego szeregu

$$\nabla^2 e^{ikz} = -k^2 e^{ikz}, \quad \nabla^2 P_l(\xi) = \nabla^2 Y_{l,0}(\xi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{l,0}(\xi), \quad \nabla^2 R_l(r) = R_l''(r) + \frac{2}{r} R_l'(r)$$

$$\Rightarrow -k^2 e^{ikr\xi} = -k^2 \sum_{l=0}^{\infty} c_l R_l(r) P_l(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \left[R_l'' + \frac{2}{r} R_l' - \frac{l(l+1)}{r^2} R_l \right] P_l(\xi) \quad (\bullet)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} P_l(\xi) = Y_{l,0}(\xi) \Rightarrow \nabla^2 R_l(r) P_l(\xi) &= Y_{l,0}(\xi) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R_l(r) + R_l(r) \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} Y_{l,0}(\xi) \\ &= \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] Y_{l,0}(\xi) \Rightarrow (\bullet) \end{aligned}$$

Przyrównując wyrażenia przy jednakowych wielomianach Legendre'a, otrzymujemy równanie na funkcję $R_l(r)$

$$(\bullet) \Rightarrow R_l'' + \frac{2}{r} R_l' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l = 0 \quad (\spadesuit)$$

Podstawiamy $\rho = kr$, $S = \sqrt{\rho} R_l \Rightarrow S'' + \frac{1}{\rho} S' + \left[1 - \frac{(l+1/2)^2}{\rho^2} \right] S = 0$

Rozwiązanie równania Bessela $S(\rho) = J_{l+1/2}(\rho) \Rightarrow R_l(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{l+1/2}(kr) \propto j_l(kr) \quad (\diamond)$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (\spadesuit)$$

$$y = kr, R(r) = \frac{S(y)}{\sqrt{y}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dr} &= \frac{dy}{dr} \frac{d}{dy} \left(\frac{S}{\sqrt{y}} \right) = k \left(\frac{dS}{dy} y^{-1/2} - \frac{1}{2} y^{-3/2} S \right) \\ \frac{d^2 R}{dr^2} &= \frac{dy}{dr} \frac{d}{dy} \frac{dR}{dr} = k^2 \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{S}{\sqrt{y}} \right) = k^2 \left(y^{-1/2} \frac{d^2 S}{dy^2} - y^{-3/2} \frac{dS}{dy} + \frac{3}{4} y^{-5/2} S \right) \end{aligned}$$

Wstawiając powyższe do (\spadesuit) , mnożąc stronami przez $y^{5/2}$, dzieląc przez k^2 i grupując wyrazy podobne, otrzymujemy równanie na funkcję $S(y)$,

$$y^2 \frac{d^2 S}{dy^2} + y \frac{dS}{dy} + \left[y^2 - l(l+1) - \frac{1}{4} \right] S = y^2 \frac{d^2 S}{dy^2} + y \frac{dS}{dy} + \left[y^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] S = 0 \quad (\clubsuit)$$

Rozwiązaniem (\clubsuit) jest $S(y) = J_{l+1/2}(y)$, więc $R(y) = S(y)/\sqrt{y} = S(kr)/\sqrt{kr} = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{l+1/2}(kr)$.

Stąd $(\blacksquare) (\blacklozenge) \Rightarrow e^{ikr\xi} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l j_l(kr) P_l(\xi) (\blacktriangle)$

Mnożymy stronami przez $P_n(\xi)$ i całkujemy na przedziale $(-1,1)$

$$\int_{-1}^1 e^{ikr\xi} P_n(\xi) d\xi = \sum_{l=0}^{\infty} c_l j_l(kr) \int_{-1}^1 P_n(\xi) P_l(\xi) d\xi = \sum_{l=0}^{\infty} c_l j_l(kr) \|P_n\|^2 \delta_{l,n} = c_n j_n(kr) \frac{2}{2n+1}$$

Całkując przez części, otrzymujemy (wyprowadzenie na następnym slajdzie)

$$\int_{-1}^1 e^{ikr\xi} P_n(\xi) d\xi = \frac{1}{ikr} e^{ikr\xi} P_n(\xi) \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{ikr} \int_{-1}^1 e^{ikr\xi} P_n'(\xi) d\xi = \frac{2i^n}{kr} \sin\left(kr - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{(ikr)^2}\right)$$

Dla $kr \gg 1$ ($r \gg \lambda$), biorąc pod uwagę asymptotyczną postać sferycznych funkcji Bessela, otrzymujemy (wyprowadzenie na następnym slajdzie)

$$c_n j_n(kr) \approx \frac{c_n}{kr} \sin\left(kr - \frac{n\pi}{2}\right) = \frac{(2n+1)i^n}{kr} \sin\left(kr - \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow c_n = (2n+1)i^n$$

$$e^{ikz} \stackrel{(\blacktriangle)}{=} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr} P_l(\cos \vartheta) \quad (\heartsuit)$$

Całkując przez części, otrzymujemy

$$\int_{-1}^1 e^{ikr\xi} P_n(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{ikr} e^{ikr\xi} \right)' P_n(\xi) d\xi = \frac{1}{ikr} e^{ikr\xi} P_n(\xi) \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{ikr} \int_{-1}^1 e^{ikr\xi} P_n'(\xi) d\xi \quad (\square)$$

$$P_n(-1) = (-1)^n, P_n(1) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{e^{ikr\xi} P_n(\xi) \Big|_{-1}^1}{ikr} = \frac{e^{ikr} - (-1)^n e^{-ikr}}{ikr} = \frac{i^n i^{-n} e^{ikr} - i^{2n} e^{-ikr}}{ikr} \stackrel{i=e^{i\pi/2}}{=} 2i^n \frac{e^{i(kr-n\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-n\frac{\pi}{2})}}{2ikr} = 2i^n \frac{\sin(kr - n\frac{\pi}{2})}{kr} \quad (\Delta)$$

Ponadto

$$\frac{1}{ikr} \int_{-1}^1 e^{ikr\xi} P_n'(\xi) d\xi \propto O\left(\frac{1}{(ikr)^2}\right) \ll 2i^n \frac{\sin(kr - n\frac{\pi}{2})}{kr} \propto O\left(\frac{1}{kr}\right),$$

ponieważ całkując przez części, mamy

$$\frac{1}{ikr} \int_{-1}^1 e^{ikr\xi} P_n'(\xi) d\xi = \frac{1}{ikr} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{ikr} e^{ikr\xi} \right)' P_n'(\xi) d\xi = \frac{1}{(ikr)^2} \left[e^{ikr\xi} P_n'(\xi) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^{ikr\xi} P_n''(\xi) d\xi \right] \propto O\left(\frac{1}{(ikr)^2}\right),$$

więc drugi wyraz w (\square) w porównaniu z pierwszym można zaniedbać dla $kr \gg 1$ ($r \gg \lambda$).

Dla $kr \gg 1$ zachodzi więc

$$\int_{-1}^1 e^{ikr\xi} P_n(\xi) d\xi \approx 2i^n \frac{\sin(kr - n\frac{\pi}{2})}{kr} = c_n j_n(kr) \frac{2}{2n+1} \approx c_n \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{n\pi}{2}\right) \frac{2}{2n+1}$$

Metoda przesunięć fazowych w kwantowej teorii rozpraszania

Funkcja falowa cząstki rozproszonej jest pewną modyfikacją fali płaskiej, przy czym modyfikacja polega głównie na przesunięciu fazy parcjalnych fal kulistych (przesunięcia fazowe δ_l charakteryzują potencjał rozpraszający i mogą być wyznaczone oddzielnie z pierwszych zasad)

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)}{kr} P_l(\cos \vartheta)$$

Jednocześnie funkcja falowa cząstki rozproszonej jest superpozycją fali płaskiej (reprezentującej cząstki padające) i fali kulistej (reprezentującej cząstki rozproszone)

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikz} + f(\vartheta) \frac{e^{ikr}}{r} \stackrel{(\heartsuit)}{=} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr} P_l(\cos \vartheta) + 2ikf(\vartheta) \frac{e^{ikr}}{2ikr}$$

$f(\vartheta)$ - amplituda rozpraszania

Wyznamy współczynniki rozwinięcia A_l oraz amplitudę rozpraszania $f(\vartheta)$ (patrz następna transparencja)

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)}{kr} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)}{kr} P_l(\cos \theta) + 2ikf(\theta) \frac{e^{ikr}}{2ikr}$$

$$\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) = \frac{1}{2i} \left[e^{ikr} \left(e^{i\pi/2}\right)^{-l} - e^{-ikr} \left(e^{i\pi/2}\right)^l \right] = \frac{1}{2i} \left(e^{ikr} i^{-l} - e^{-ikr} i^l \right)$$

$$\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) = \dots = \frac{1}{2i} \left(e^{ikr} i^{-l} e^{i\delta_l} - e^{-ikr} i^l e^{-i\delta_l} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l e^{ikr} i^{-l} e^{i\delta_l} - A_l e^{-ikr} i^l e^{-i\delta_l} \right) P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[(2l+1) e^{ikr} - (2l+1) e^{-ikr} i^{2l} \right] P_l(\cos \theta) + 2ikf(\theta) e^{ikr}$$

$$e^{ikr} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l e^{i\delta_l} i^{-l} - (2l+1) \right) P_l(\cos \theta) - 2ikf(\theta) \right]$$

$$= e^{-ikr} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l e^{-i\delta_l} i^l - (2l+1) i^{2l} \right) P_l(\cos \theta) \right]$$

- Funkcje e^{ikr} , e^{-ikr} są niezależne, więc wyrażenia w obu nawiasach kwadratowych muszą być równe zeru,
- W drugiej sumie wielomiany $P_l(\cos \theta)$ są niezależne, więc wyrażenia we wszystkich nawiasach okrągłych muszą być równe zeru $\Rightarrow A_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l}$,
- Wstawiamy tak wyznaczone A_l do pierwszego nawiasu kwadratowego i przyrównujemy do zera

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \left((2l+1) e^{2i\delta_l} - (2l+1) \right) P_l(\cos \theta) - 2ikf(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(e^{2i\delta_l} - 1 \right) P_l(\cos \theta)$$

$$\Rightarrow A_l = (2l+1)i^l e^{i\delta_l},$$

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)P_l(\cos \vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \vartheta)$$

$$|f(\vartheta)|^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{l,l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1)e^{i(\delta_l - \delta_{l'})} \sin \delta_l \sin \delta_{l'} P_l(\cos \vartheta) P_{l'}(\cos \vartheta)$$

$$\int_{-1}^1 P_l(\xi) P_{l'}(\xi) d\xi = \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2l+1} \delta_{l,l'}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \Rightarrow$$

- Całkowity przekrój czynny na rozpraszanie

$$\int |f(\vartheta)|^2 d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f(\vartheta)|^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l,l'=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

Przesunięcia fazowe δ_l charakteryzują potencjał rozpraszający i mogą być wyznaczone oddzielnie z pierwszych zasad. Zazwyczaj maleją one szybko ze wzrostem l , dzięki czemu całkowity przekrój czynny można w przybliżeniu obliczyć jako sumę kilku pierwszych wyrazów powyższej sumy.

