Wykład IV i V

- Definicja wielomianów ortogonalnych,
- Waga i jej własności,
- Własności wielomianów ortogonalnych,
- Równania różniczkowe dla wielomianów ortogonalnych,
- Wzór Rodriguesa,
- Normy wielomianów ortogonalnych,
- Związki rekurencyjne dla wielomianów ortogonalnych,
- Funkcje tworzące dla wielomianów ortogonalnych.

Definicja

Wielomiany ortogonalne są użyteczne w wielu dziedzinach fizyki, np. elektrodynamice, teorii pola, mechanice kwantowej (oscylator harmoniczny, atom wodoru…), optyce i in. Jest to kilka rodzin wielomianów (wielomiany Legendre'a, Hermite'a, Laguerre'a i in.), takich że wielomiany różnych stopni, należące do jednej rodziny, są ortogonalne w sensie przedstawionym poniżej

$$\boxed{Q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots, \quad a_n \neq 0,\ x \in (\alpha, \beta)}$$

$Q_n(x)$ - wielomian stopnia *n*

a_n, b_n - współczynniki przy najwyższych potęgach zmiennej *x*

(α, β) - dziedzina wielomianu

Ortogonalność

Ogólna definicja iloczynu skalarnego z wagą

$$\boxed{(Q_n, Q_m) \equiv \int_\alpha^\beta \rho(x) Q_n(x) Q_m(x) dx \propto \delta_{n,m}}$$

$\rho(x)$ - waga

- Ortogonalność zachodzi w sensie iloczynu skalarnego z wagą,
- Waga oraz dziedzina całkowicie definiują rodziny wielomianów ortogonalnych,
- Wielomiany nie są unormowane w sensie iloczynu skalarnego z wagą.

Wagi są różne dla różnych rodzin wielomianów, ale mają pewne wspólne własności. Np. pochodna logarytmiczna wagi zawsze daje się zapisać jako funkcja wymierna (iloraz wielomianów 1. i 2. stopnia, których współczynniki zależą od rodziny wielomianów)

Własności wagi

- Pochodna logarytmiczna wagi,

$$(\ln\rho)' = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{A(x)}{B(x)}, \quad A(x) = A_1 x + A_0,\ B(x) = B_2 x^2 + B_1 x + B_0$$

- Znikanie wyrażenia ρB na krańcach dziedziny,

$$\rho(\alpha)B(\alpha) = \rho(\beta)B(\beta) = 0$$

- Rodzaje wielomianów ortogonalnych

Nazwa	Symbol	Dziedzina (α, β)	Waga $\rho(x)$, $A(x), B(x)$
Legendre'a	$P_n(x)$	$(-1,1)$	$\rho(x)=1$ $A(x)=0, B(x)=1-x^2$ (umownie)
Hermite'a	$H_n(x)$	$(-\infty,+\infty)$	$\rho(x)=e^{-x^2}$ $A(x)=-2x, B(x)=1$
Laguerre'a	$L_n^\lambda(x)$	$(0,\infty)$	$\rho(x)=x^\lambda e^{-x}, \quad \lambda>-1$ $A(x)=\lambda-x, B(x)=x$
Czebyszewa	$T_n(x)$	$(-1,1)$	$\rho(x)=\left(1-x^2\right)^{-1/2}$ $A(x)=x, B(x)=1-x^2$

Własności wielomianów ortogonalnych

- Zbiór wielomianów ortogonalnych danego typu stopnia $n \le N$ stanowi bazę w przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż N, określonych na przedziale (α, β)

Wniosek: każdą potęgę x^k można przedstawić jako kombinację liniową wielomianów $Q_0, Q_1, \dots Q_k$

- Wielomian Q_n jest ortogonalny do wszystkich potęg $x^k, k < n$,

$$\left(x^k, Q_n\right) = 0,\ k = 0,1,2,\dots n-1$$

Ortogonalność zachodzi w sensie iloczynu skalarnego z wagą (por. definicja ortogonalności wielomianów powyżej). Dowód: x^k jest kombinacją liniową wielomianów $Q_0, Q_1, \dots, Q_k, k < n$, które wszystkie są ortogonalne do Q_n.

- Wielomian Q_n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych,

$$Q_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

Dowód na następnym slajdzie

- Wielomiany Q_n można uzyskać z potęg $x^k, k = 0,1,2,\cdots$ w wyniku ortogonalizacji Grama-Schmidta

Udowodnijmy że wielomian $Q_n(x)$ ma n różnych pierwiastków rzeczywistych x_1, $x_2, \ldots,$ x_n.

Dowód nie wprost. Załóżmy, że Q_n ma $m < n$ różnych pierwiastków,

$$\Rightarrow Q_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m) W_{n-m}(x),$$

gdzie W_{n-m} jest wielomianem stopnia $n - m > 0$ nie posiadającym pierwiastków rzeczywistych na dziedzinie wielomianu Q_n, tj. na przedziale (α, β), a więc mającym ustalony znak na przedziale (α, β). Rozpatrzmy całkę

$$I = (Q_n, (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)) = \int_\alpha^\beta \rho(x) Q_n(x)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m) dx$$

Z jednej strony zachodzi $I = 0$, ponieważ $(x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_m)$ jest wielomianem stopnia $m < n$, więc jest ortogonalny do Q_n. Z drugiej strony $I \neq 0$, ponieważ

$$I = \int_\alpha^\beta \rho(x)(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \ldots (x - x_m)^2 W_{n-m}(x) dx,$$

a funkcja podcałkowa ma ustalony znak na przedziale (α, β).

Równania różniczkowe dla wielomianów ortogonalnych

Ponieważ $\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}$, $A(x)$ - wielomian 1. stopnia, $B(x)$ - wielomian 2. stopnia, to

Zdefiniujmy wielomian $V(x)$ stopnia n

$$V(x) = \frac{1}{\rho}\left(\rho B Q_n'\right)' = \left(A + B'\right)Q_n' + BQ_n''$$

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{\rho(x)}\left(\rho(x)B(x)Q_n'(x)\right)' = \frac{\rho'}{\rho}BQ_n' + \frac{1}{\rho}\rho\left(B'Q_n' + BQ_n''\right) \\ &= \frac{A}{B}BQ_n' + B'Q_n' + BQ_n'' = (A + B')\,Q_n' + BQ_n'' \end{aligned}$$

Q_n', Q_n'' są wielomianami stopnia $n-1$, $n-2$, odpowiednio, więc ostatnie wyrażenie jest wielomianem stopnia n.

Można wykazać, że

$$\left(V, x^k\right) = 0, \quad k < n \Rightarrow V = \gamma Q_n, \quad \gamma = \mathrm{const}$$

Dowód na następnym slajdzie. Skoro $V(x)$ jest ortogonalne do wszystkich potęg $x^k, k < n$ to jest proporcjonalne do Q_n, gdzie γ – współczynnik proporcjonalności

Porównując współczynniki przy najwyższej potędze x^n równości

$$V(x) = \left(A + B'\right)Q_n' + BQ_n'' = \gamma Q_n$$

uzyskuje się, że

$$\gamma = n\left[A_1 + (n+1)B_2\right]$$

Dowód na następnym slajdzie

Podstawiając wyrażenia na A, B, uzyskuje się równania różniczkowe na poszczególne typy wielomianów

Wykażemy, że $\left(V, x^k\right) = 0$ dla $k < n$ w sensie iloczynu skalarnego z wagą, czyli że $V \propto Q_n$.

$$
\begin{aligned}
\left(V, x^k\right) &= \int_\alpha^\beta \rho(x) x^k \frac{1}{\rho(x)} \left(\rho(x) B(x) Q_n'(x)\right)' dx = \underbrace{\int_\alpha^\beta x^k \left(\rho(x) B(x) Q_n'(x)\right)' dx}_{\text{przez czesci}} = \\
&= \underbrace{x^k \rho B Q_n' \Big|_\alpha^\beta}_{=0 \text{ bo } \rho(x)B(x)|_\alpha = \rho(x)B(x)|_\beta = 0} \; - k \underbrace{\int_\alpha^\beta x^{k-1} \rho(x) B(x) Q_n'(x) dx}_{\text{przez czesci}} = \\
&= \underbrace{-k\, x^{k-1} \rho(x) B(x) Q_n(x) \Big|_\alpha^\beta}_{=0 \text{ bo } \rho(x)B(x)|_\alpha = \rho(x)B(x)|_\beta = 0} + k \int_\alpha^\beta \left[(k-1) x^{k-2} B(x) \rho(x) + x^{k-1} \left(\underbrace{\rho'(x) B(x)}_{= \frac{\rho'}{\rho} \rho B = \frac{A}{B} \rho B = A\rho} + \rho(x) B'(x) \right) \right] Q_n(x) dx \\
&= k \int_\alpha^\beta \underbrace{\left[(k-1) x^{k-2} B(x) + x^{k-1} \left(A(x) + B'(x) \right) \right]}_{\text{wielomian stopnia } k<n \text{ ortogonalny do } Q_n} Q_n(x) \rho(x) dx = 0
\end{aligned}
$$

więc $V \propto Q_n \Rightarrow (A + B')Q_n' + BQ_n'' = \gamma Q_n$, $\gamma = \text{const}$.

Obliczając pochodne wielomianu $Q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$, pamiętając że $A(x) = A_1 x + A_0$, $B(x) = B_2 x^2 + B_1 x + B_0$ i wstawiając te wyrażenia do ostatniego równania, otrzymujemy

$$(A_1 x + A_0 + 2B_2 x + B_1)(n a_n x^{n-1} + \ldots) + (B_2 x^2 + B_1 x + B_0)[n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots] = \gamma (a_n x^n + \ldots)$$

Porównując współczynniki przy x^n po obu stronach powyższego równania, otrzymujemy

$$\gamma = n A_1 + 2n B_2 + n(n-1) B_2 = n[A_1 + (n+1) B_2]$$

Równania różniczkowe dla poszczególnych typów wielomianów

- Wielomiany Legendre'a P_n

$$\left(1-x^2\right)P_n''-2xP_n'+n(n+1)P_n=0$$

- Wielomiany Hermite'a H_n

$$H_n''-2xH_n'+2nH_n=0$$

- Wielomiany Laguerre'a L_n

$$xL_n''+(\lambda-x+1)L_n'+nL_n=0$$

- Wielomiany Czebyszewa T_n

$$\left(1-x^2\right)T_n''-xT_n'+n^2T_n=0$$

Wzór Rodriguesa

$$Q_n(x) \propto \tilde{Q}_n(x) = \frac{1}{\rho}\left(\rho B^n\right)^{(n)}$$

Przy pomocy wzoru Rodriguesa można wyznaczyć wielomiany $\tilde{Q}_n$ proporcjonalne do właściwych wielomianów ortogonalnych Q_n. Stałe proporcjonalności f_n takie że $Q_n = f_v \tilde{Q}_n$ są umowne i zostaną podane w dalszej części wykładu. Ważne jest, że przy pomocy wzoru Rodriguesa każdy wielomian ortogonalny można wyznaczyć wyłącznie za pomocą wagi i jej pochodnych.

Ogólniej, można wykazać że

$$\frac{1}{\rho}\left(\rho B^n\right)^{(k)} = B^{n-k} W_k$$

W_k - wielomian stopnia *k*, spełniający związek rekurencyjny

$$W_{k+1} = BW_k' + \left[A + (n-k)B'\right]W_k, \quad W_0 = 1, W_n = \tilde{Q}_n \qquad ♥$$

Dowód na następnym slajdzie

Po pierwsze, wykażemy, że $\widetilde{Q}_n$ jest wielomianem.

1) $n=0 \Rightarrow \widetilde{Q}_0 = \frac{1}{\rho}\left(\rho B^n\right)^{(0)} = \frac{1}{\rho}\rho B^n = B^n$ jest wielomianem stopnia $2n$.

2) $n = 1 \Rightarrow \widetilde{Q}_1 = \frac{1}{\rho}\left(\rho B^n\right)' = \frac{\rho'}{\rho}B^n + nB^{n-1}B' = \frac{A}{B}B^n + nB^{n-1}B' = B^{n-1}(A+nB')$ jest wielomianem stopnia $2n-2+1 = 2n-1$.

3) Wyniki 1) i 2) sugerują, że dla pochodnej rzędu k powinno być $\frac{1}{\rho}\left(\rho B^n\right)^{(k)} = B^{n-k}W_k$, gdzie $W_k(x)$ jest wielomianem stopnia k (♠) (czyli całe wyrażenie jest wielomianem stopnia $2n-k$).

Dowód jest indukcyjny. Dla $k=0,1$ jest $W_0 = 1$ (wielomian stopnia 0), $W_1 = A+nB'$ (wielomian stopnia 1). Zakładamy prawdziwość założenia indukcyjnego (♠) dla pochodnej rzędu k i sprawdzamy prawdziwość tezy dla pochodnej rzędu $k+1$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\left(\rho B^n\right)^{(k+1)} &= \frac{1}{\rho}\left[\left(\rho B^n\right)^{(k)}\right]' \overset{\spadesuit}{=} \frac{1}{\rho}\left[\rho B^{n-k}W_k\right]' = \frac{1}{\rho}\left\{\rho'(B^{n-k}W_k) + \rho\left[(n-k)B^{n-k-1}B'W_k + B^{n-k}W_k'\right]\right\} \\
&= \underbrace{\frac{\rho'}{\rho}}_{=\frac{A}{B}} B^{n-k}W_k + (n-k)B^{n-k-1}B'W_k + B^{n-k}W_k' = B^{n-k-1}\left[AW_k + (n-k)B'W_k + BW_k'\right] \\
&= B^{n-(k+1)}\underbrace{\left\{BW_k' + [A+(n-k)B']W_k\right\}}_{=W_{k+1}},
\end{aligned}
$$

gdzie, jak widać, W_{k+1} jest wielomianem stopnia $k+1$, cbdo.

4) Od razu mamy więc związek między wielomianami W_k i W_{k+1} (związek (♥) z poprzedniej transparencji)

$$W_{k+1} = BW_k' + [A+(n-k)B']W_k$$

5) Ponadto $k=n \Rightarrow \left(\widetilde{Q}_n =\right)\frac{1}{\rho}\left(\rho B^n\right)^{(n)} = B^{n-n}W_n = W_n \Rightarrow \widetilde{Q}_n = W_n$

Posługując się tym związkiem, można określić

$$W_m = w_m x^m + v_m x^{m-1} + \dots$$

Dla $m = n$ współczynniki w_n, v_n pokrywają się ze współczynnikami przy najwyższych potęgach wielomianu $\tilde{Q}_n$

w_m, v_m - współczynniki przy najwyższych potęgach zmiennej *x*

Przykład: Wyznaczmy współczynniki przy najwyższych potęgach x dla wielomianu Legendre'a $\widetilde{P}_n(x)$.

$$A(x) = 0, B(x) = 1 - x^2 \overset{(\heartsuit)}{\Rightarrow} W_{k+1} = (1 - x^2)W_k' - 2(n-k)xW_k$$

Porównanie współczynników przy najwyższej potędze x^{k+1} po obu stronach równania daje

$$w_{k+1} = -kw_k - 2(n-k)w_k = (k-2n)w_k$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow w_1 &= -2nw_0 \\
w_2 &= (1-2n)w_1 = (2n-1)2nw_0 \\
w_3 &= (2-2n)w_2 = -(2n-2)(2n-1)2nw_0 \dots \\
w_n &= (-1)^n[2n-(n-1)][2n-(n-2)]\dots 2nw_0 = (-1)^n(n+1)(n+2)\dots 2nw_0 = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}
\end{aligned}$$

Porównanie współczynników przy drugiej najwyższej potędze x^k po obu stronach równania daje

$$\nu_{k+1} = -(k-1)\nu_k - 2(n-k)\nu_k = (k+1-2n)\nu_k$$

Ponieważ $W_1 = A + nB' = -2nx \Rightarrow \nu_1 = 0 \Rightarrow \nu_n = 0, \; n = 1, 2, 3 \dots$

- Wielomiany Legendre'a P_n

$$W_{k+1} = (1-x^2)W_k' - 2x(n-k)W_k, \quad w_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \nu_n = 0$$

- Wielomiany Hermite'a H_n

$$W_{k+1} = W_k' - 2xW_k, \quad w_n = (-2)^n, \nu_n = 0$$

- Wielomiany Laguerre'a L_n

$$W_{k+1} = xW_k' + (\lambda - x + n - k)W_k, \quad w_n = (-1)^n, \nu_n = (-1)^{n-1} n(n+\lambda)$$

Współczynniki wyznacza się analogicznie jak w przykładzie na poprzedniej transparencji. Dla wielomianów Czebyszewa – por. skrypt do ćwiczeń z rozwiązaniami

Sprawdzenie warunku ortogonalności.

Wykonując k-krotnie całkowanie przez części, otrzymujemy

$$\left(x^k,\tilde{Q}_n\right)=\int_\alpha^\beta x^k\left(\rho B^n\right)^{(n)}dx=$$

Korzystamy ze związku $(\rho B^n)^{(k)} = \rho B^{n-k}W_k \Rightarrow (\rho B^n)^{(n-1)} = \rho B W_{n-1}$, itd, oraz z właściwości wagi $\rho(\alpha)B(\alpha) = \rho(\beta)B(\beta) = 0$.

$$x^k\left(\rho B^n\right)^{(n-1)}\Big|_\alpha^\beta-k\int_\alpha^\beta x^{k-1}\left(\rho B^n\right)^{(n-1)}dx=x^k\rho BW_{n-1}\Big|_\alpha^\beta-k\int_\alpha^\beta x^{k-1}\left(\rho B^n\right)^{(n-1)}dx=$$

$$-k\int_\alpha^\beta x^{k-1}\left(\rho B^n\right)^{(n-1)}dx=\ldots=(-1)^k k!\left(\rho B^n\right)^{(n-k-1)}\Big|_\alpha^\beta=$$

$$(-1)^k k!\,\rho B^{k+1}W_{n-k-1}\Big|_\alpha^\beta=0,\quad k<n$$

$$\Rightarrow\tilde{Q}_n\propto Q_n$$

Zauważmy, że ostatniej całki nie można wykonać dla $k = n$, więc uzyskany wynik jest prawdziwy dla $k < n$. Skoro wielomian $\tilde{Q}_n$ jest ortogonalny do wszystkich potęg $x^k, k < n$, to jest proporcjonalny do wielomianu ortogonalnego $Q_n$który ma tę własność.

Ostateczna postać wzoru Rodriguesa

$$\boxed{Q_n(x) = f_n \tilde{Q}_n(x)}$$

Współczynniki f_n dla poszczególnych wielomianów są umowne i wynikają z wcześniejszej tradycji

- Wielomiany Legendre'a P_n

$$P_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\tilde{P}_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left[\left(1-x^2\right)^n\right]^{(n)}, \quad a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}, b_n = 0$$

- Wielomiany Hermite'a H_n

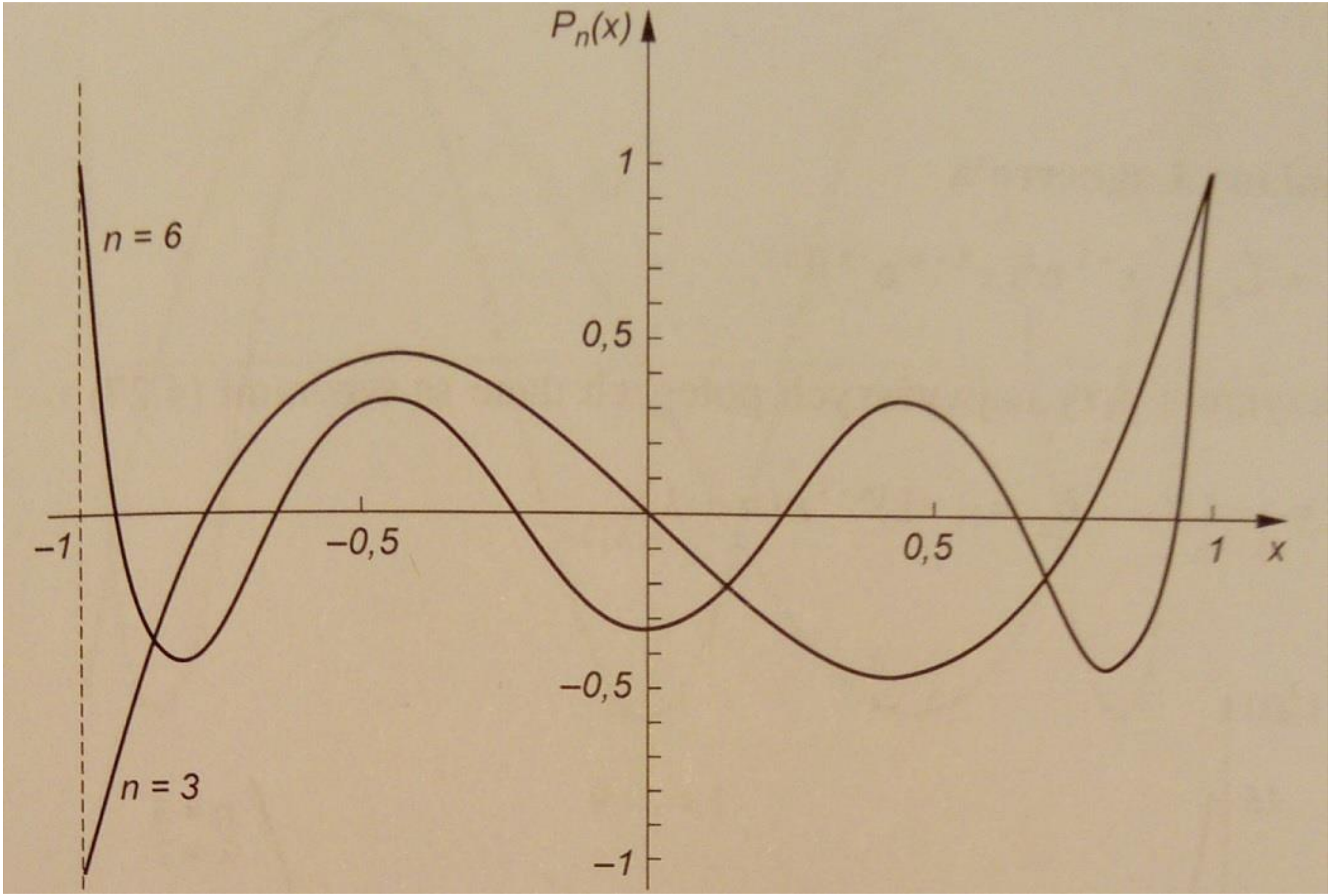
$$H_n = (-1)^n \tilde{H}_n = (-1)^n e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}, \quad a_n = 2^n, b_n = 0$$

- Wielomiany Laguerre'a L_n

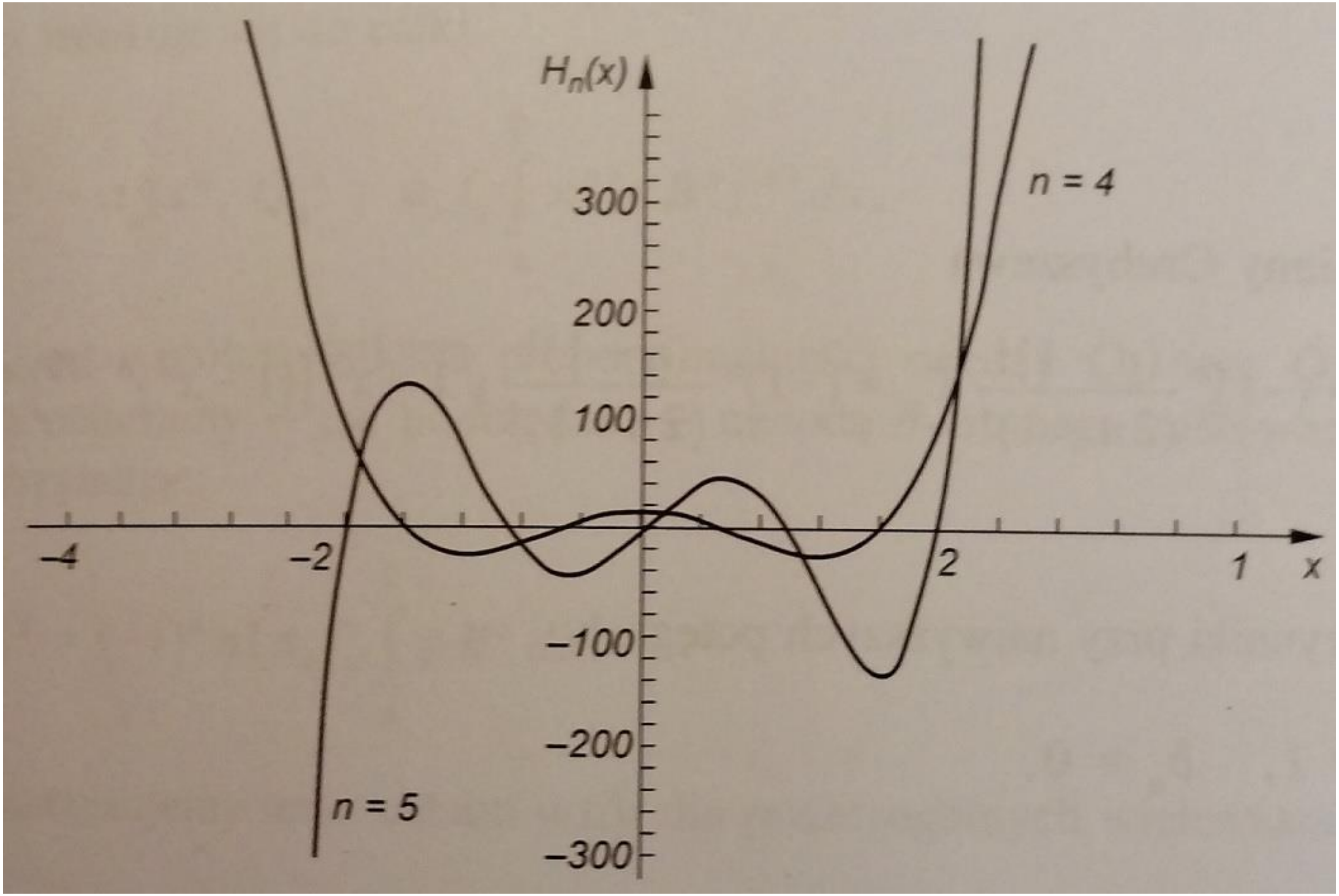
$$L_n = \tilde{L}_n = x^{-\lambda} e^x \left(x^{\lambda+n} e^{-x}\right)^{(n)}, \quad a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1} n(n+\lambda)$$

- Wielomiany Czebyszewa T_n

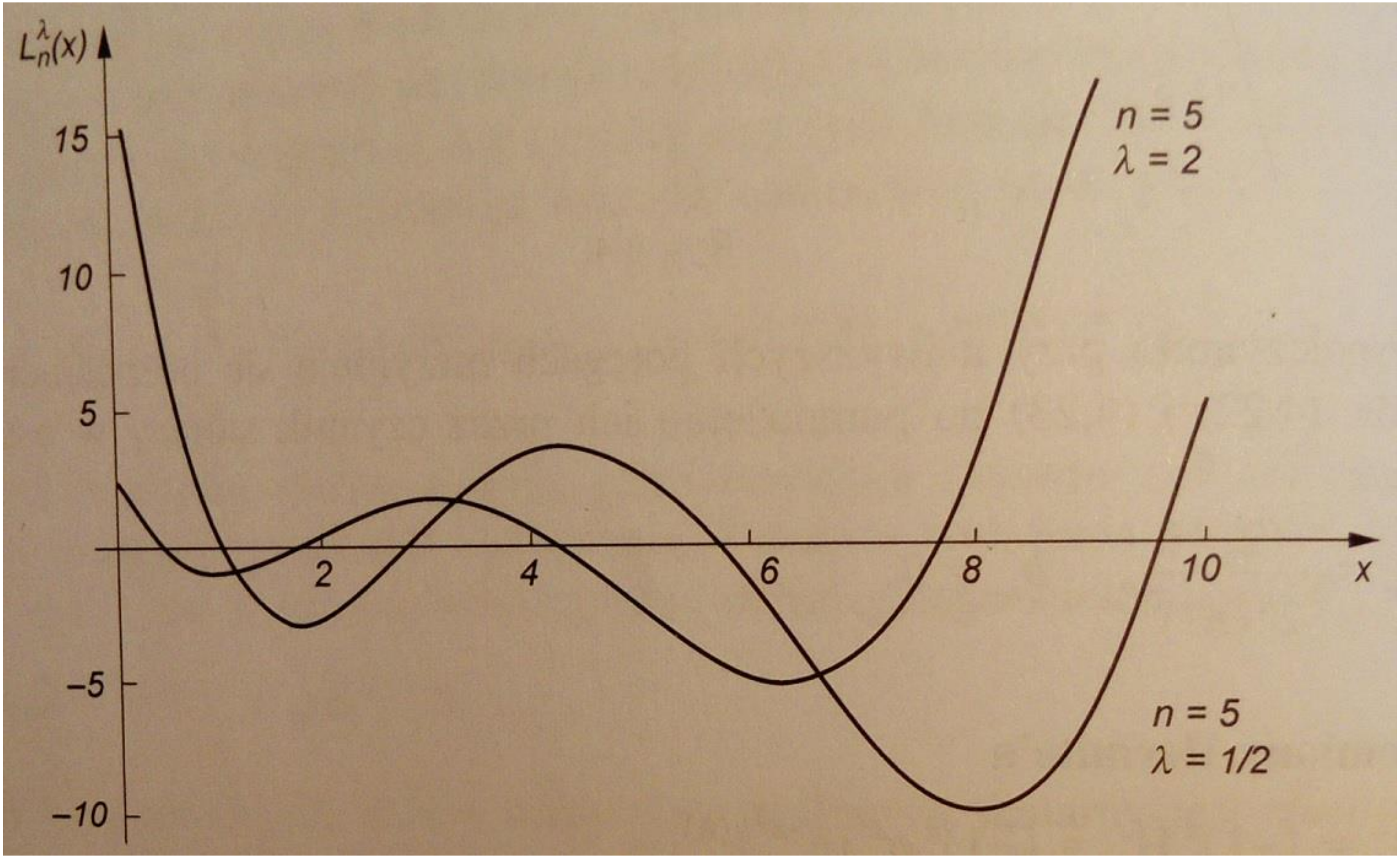
$$T_n = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\tilde{T}_n = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\left(1-x^2\right)^{1/2}\left[\left(1-x^2\right)^{n-1/2}\right]^{(n)}, \quad a_n = 1, b_n = 0$$



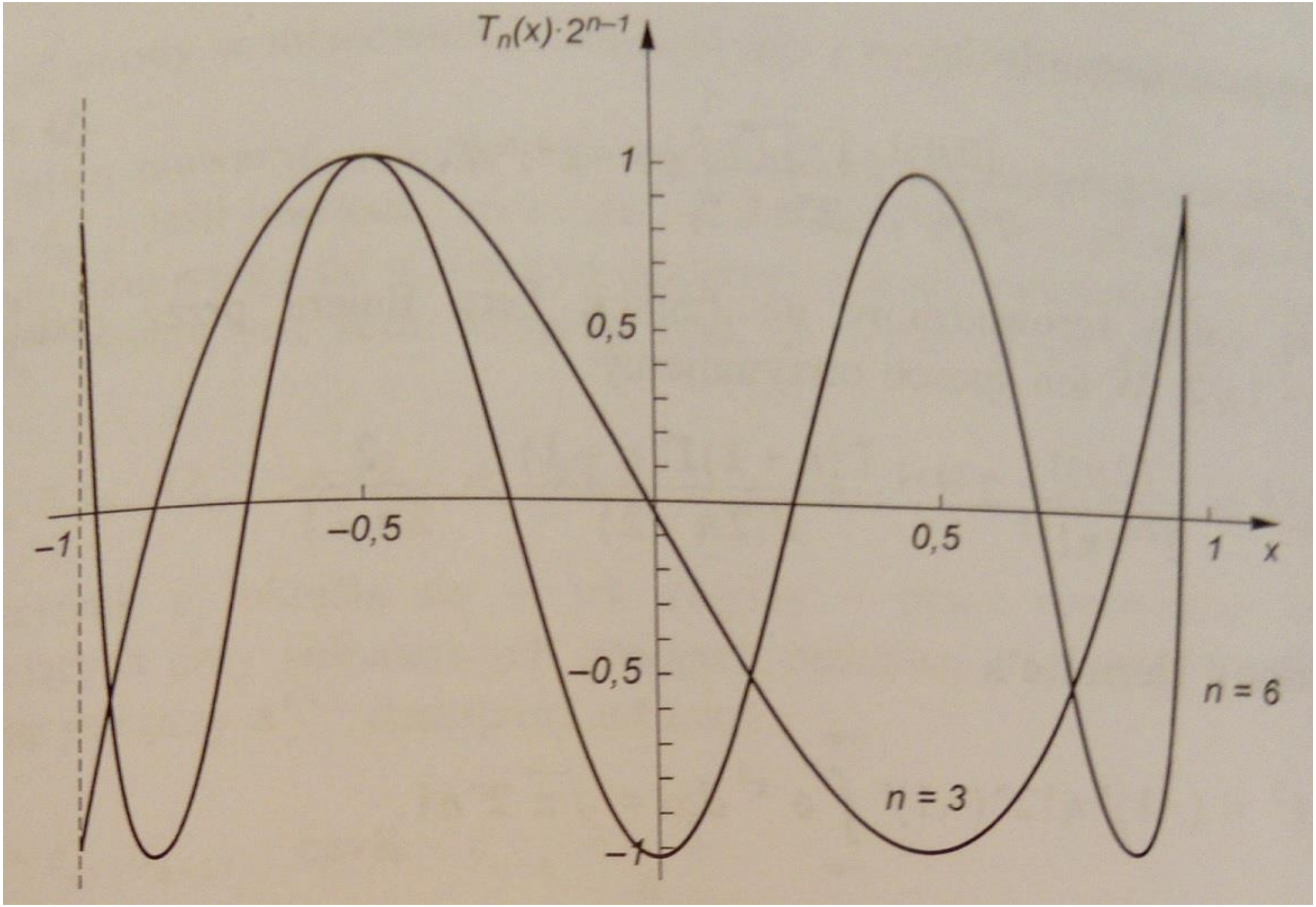
Przykładowe wielomiany Lagrange'a P_n, n=3,6



Przykładowe wielomiany Hermite'a H_n, n=4,5



Przykładowe wielomiany Laguerre'a L_n, n=5 dla różnych wag λ



Przykładowe wielomiany Czebyszewa T_n, n=3,6

Normy wielomianów ortogonalnych

Korzystamy z faktu, że wielomian Q_n jest ortogonalny do wszystkich potęg $x^k, k < n$.

$$\|Q_n\|^2 = (Q_n, Q_n) = (a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots, Q_n) = a_n (x^n, Q_n) = a_n f_n \int_\alpha^\beta x^n (\rho B^n)^{(n)} dx$$

Wykonując k-krotnie całkowanie przez części, otrzymujemy

$$\|Q_n\|^2 = (-1)^n n! a_n f_n \int_\alpha^\beta \rho B^n dx$$

Przykład: norma wielomianów Legendre'a P_n.

$\rho(x) = 1,\ B(x) = 1 - x^2,\ a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2},\ f_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$, stąd

$$||P_n||^2 = (-1)^n n! \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx$$

Całkę można sprowadzić do funkcji beta Eulera, dokonując podstawień $t = 1 - x \Rightarrow x = 1 - t, dx = -dt$, a następnie $t = 2s \Rightarrow s = \frac{t}{2}, dt = 2ds$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx &= \int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)^n dx = \int_0^2 t^n (2-t)^n dt = 2^{2n+1} \int_0^1 s^n (1-s)^n ds = 2^{2n+1} \int_0^1 s^{(n+1)-1} (1-s)^{(n+1)-1} ds \\ &= 2^{2n+1} \beta(n+1, n+1) = 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}\end{aligned}$$

stąd $||P_n||^2 = 2/(2n+1)$

- Wielomiany Legendre'a P_n

$$\|P_n\|^2 = (-1)^n n! \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{2}{2n+1}$$

- Wielomiany Hermite'a H_n

$$\|H_n\|^2 = (-1)^n n! 2^n (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\, 2^n n!$$

Prosta całka z rozkładu Gaussa

- Wielomiany Laguerre'a L_n

$$\|L_n\|^2 n! \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\lambda+n} dx = n!\Gamma(\lambda+n+1)$$

Wprost z definicji funkcji gamma Eulera

- Wielomiany Czebyszewa T_n

$$\|T_0\|^2 = \pi, \quad \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2^{2n-1}}, \; n = 1,2,3\ldots$$

Obliczenie podobne jak dla wielomianów Legendre'a

Związki rekurencyjne dla wielomianów ortogonalnych

$$\boxed{xQ_n = c_{n+1}Q_{n+1} + c_nQ_n + c_{n-1}Q_{n-1}, \quad c_j = \frac{1}{\left\|Q_j\right\|^2}\left(xQ_n, Q_j\right)}$$

$$c_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$c_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$$

$$c_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{\left\|Q_n\right\|^2}{\left\|Q_{n-1}\right\|^2}$$

Są to związki pomiędzy wielomianami stopni n, n+1, n-1, obowiązujące dla wszystkich klas wielomianów. Umożliwiają one obliczanie całek, zawierających iloczyny wielomianów różnych stopni (przy skorzystaniu z relacji ortogonalności dla wielomianów). Wyprowadzenie i przykłady obliczania ww. całek na następnych transparencjach.

Rozpatrzmy wyrażenie xQ_n - jest to wielomian stopnia $n+1$. Ponieważ wielomiany ortogonalne $Q_0, Q_1 \dots Q_{n+1}$ tworzą bazę w przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej $n+1$, wielomian xQ_n można rozłożyć w tej bazie,

$$xQ_n = \sum_{j=0}^{n+1} c_j Q_j.$$

Korzystając z relacji ortogonalności $(Q_i, Q_j) = ||Q_j||^2 \delta_{ij}$, obliczamy współczynniki rozkładu c_j,

$$(xQ_n, Q_i) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j (Q_j, Q_i) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j ||Q_j||^2 \delta_{ij} = c_i ||Q_i||^2 \Rightarrow c_i = \frac{1}{||Q_i||^2}(xQ_n, Q_i) = \frac{1}{||Q_i||^2}(Q_n, xQ_i)$$

Dla $i < n-1$ wielomian xQ_i jest stopnia mniejszego niż n, więc jest ortogonalny do Q_n, stąd $c_i = 0$.
Wniosek: tylko c_{n-1}, c_n, c_{n+1} mogą byc różne od zera.

$$\Rightarrow xQ_n = c_{n+1}Q_{n+1} + c_n Q_n + c_{n-1}Q_{n-1}$$

Porównanie współczynników przy najwyższej potędze x^{n+1} po obu stronach powyższej równości daje

$$a_n = c_{n+1}a_{n+1} \Rightarrow c_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Porównanie współczynników przy drugiej najwyższej potędze x^n daje

$$b_n = c_{n+1}b_{n+1} + c_n a_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_{n+1} + c_n a_n \Rightarrow c_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$$

Przy obliczaniu c_{n-1} korzystamy z faktu, że $c_{n+1} = (xQ_n, Q_{n+1})\frac{1}{||Q_{n+1}||^2} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \stackrel{n\to n-1}{\longrightarrow} (xQ_{n-1}, Q_n)\frac{1}{||Q_n||^2} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$

$$\Rightarrow c_{n-1} = (xQ_n, Q_{n-1})\frac{1}{||Q_{n-1}||^2} = (xQ_n, Q_{n-1})\frac{1}{||Q_n||^2}\frac{||Q_n||^2}{||Q_{n-1}||^2} = \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{||Q_n||^2}{||Q_{n-1}||^2}$$

Związki rekurencyjne dla poszczególnych typów wielomianów ortogonalnych

- Wielomiany Legendre'a P_n $$xP_n = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1} + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}$$
- Wielomiany Hermite'a H_n $$xH_n = \frac{1}{2}H_{n+1} + nH_{n-1}$$
- Wielomiany Laguerre'a L_n $$xL_n = -L_{n+1} + (\lambda + 2n + 1)L_n - n(n+\lambda)L_{n-1}$$
- Wielomiany Czebyszewa T_n

$$xT_1 = T_2 + \frac{1}{4}T_0 + \frac{1}{4},\ T_0 = 1; \quad xT_n = T_{n+1} + \frac{1}{4}T_{n-1},\ n = 1,2,3\ldots$$

Obliczanie całek typu $\int_\alpha^\beta \rho(x)x^n Q_l(x)Q_m(x)dx = (x^n Q_l, Q_m)$ przy pomocy związków rekurencyjnych.

Przykład
Dla wielomianów Legendre'a $\rho(x) = 1$, $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$, $||P_n||^2 = \frac{2}{2n+1}$, $xP_n = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1} + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}$,

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_4(x)P_6(x)dx = \int_{-1}^{1}[xP_4(x)][xP_6(x)]dx = (xP_4, xP_6) = \left(\frac{5}{9}P_5 + \frac{4}{9}P_3, \frac{7}{13}P_7 + \frac{6}{13}P_5\right) = \frac{5}{9}\frac{6}{13}||P_5||^2 = \frac{30}{117}\frac{2}{11}$$

Funkcje tworzące dla wielomianów ortogonalnych

$$\boxed{\Psi(x,w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{Q}_n(x)}{n!}w^n}$$

Funkcje tworzące są powszechnie używane w wielu działach matematyki. Funkcję tworzącą dla wielomianów ortogonalnych można traktować jak „szereg Taylora" dla małych wartości w, którego współczynnikami są wielomiany $\widetilde{Q}_n$

Ze wzoru Rodriguesa

$$\Psi(x,w)=\frac{1}{\rho(x)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\rho(x)B^n(x)\right]$$

Ze wzoru całkowego Cauchy'ego

$$\rho(x)B^n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\rho(z)B^n(z)}{z-x}dz \qquad x\in\Re,\ x\in \mathrm{Int}C$$

To jest równość formalna, ułatwiająca dalsze obliczenia. C jest dowolną krzywą zawierającą punkt x, funkcja podcałkowa ma biegun 1. rzędu w $z=x$.

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{z-x}=\frac{n!}{(z-x)^{n+1}}\Rightarrow$$

Funkcja podcałkowa jest sumą szeregu geometrycznego o ilorazie $wB/(z-x)$

$$\Psi(x,w)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\rho(x)}\oint_C\frac{\rho(z)}{z-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^nB^n(z)}{(z-x)^n}dz=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\rho(x)}\oint_C\frac{\rho(z)dz}{z-x-wB(z)}$$

Wielomian stopnia 2 w mianowniku ma dwa pierwiastki (bieguny rzędu 1)

Z metody residuów

Tych własności pierwiastków z_1, z_2 nie da się ogólnie pokazać, po prostu tak zawsze wychodzi

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} z_1 \xrightarrow[w\to 0]{} x \Rightarrow z_1\in \mathrm{Int}C \\ z_2 \xrightarrow[w\to 0]{} \infty \Rightarrow z_2\notin \mathrm{Int}C \end{array}\right\}\Rightarrow \Psi(x,w)=\frac{1}{\rho(x)}\frac{\rho(z_1)}{1-wB'(z_1)}}$$

Przykład: funkcja tworząca dla wielomianów Legendre'a ($\rho(x) = 1$)

$$B(z) = 1 - z^2 \Rightarrow z - x - wB(z) = z - x - w(1 - z^2) = wz^2 + z_(x + w) = 0$$

Pierwiastki

$$z_1 = \frac{1}{2w}\left(-1 + \sqrt{1 + 4w(x + w)}\right), \quad z_2 = \frac{1}{2w}\left(-1 - \sqrt{1 + 4w(x + w)}\right)$$

Korzystając z rozwinięcia na szereg Taylora $\sqrt{1+\xi} \approx 1 + \xi/2 + \ldots$ dla $w \to 0$ otrzymujemy

$$z_1 \overset{w\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2w}\left(-1 + 1 + \frac{1}{2}4w(x + w)\right) = x + w \overset{w\to 0}{\longrightarrow} x$$

$$z_2 \overset{w\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2w}\left(-1 - 1 - \frac{1}{2}4w(x + w)\right) = -\frac{1}{w} - x - w \overset{w\to 0}{\longrightarrow} \pm\infty$$

(widać że pierwiastki te mają właściwości jak na poprzedniej transparencji).

Funkcja tworząca

$$\Psi(x, w) = \frac{1}{\rho(x)}\frac{\rho(z_1)}{1 - wB'(z_1)} = \frac{1}{1 + 2wz_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4wx + 4w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\tilde{P}_n(x)$$

Dokonajmy podstawienia $w = -\frac{\nu}{2}$. Ponieważ $P_n = f_n\tilde{P}_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\tilde{P}_n$, to

$$\Psi(x, \nu) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\nu x + \nu^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n}{2^n}\nu^n\tilde{P}_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\nu^n$$

- Wielomiany Legendre'a P_n

$$\Psi(x,w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\tilde{P}_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1+4wx+4w^2}},\quad \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\nu^n=\frac{1}{\sqrt{1-2x\nu+\nu^2}}$$

- Wielomiany Hermite'a H_n

$$\Psi(x,w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\tilde{H}_n(x)=e^{-w^2-2wx},\quad \sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{\nu^n}{n!}=e^{-\nu^2+2\nu x}$$

- Wielomiany Laguerre'a L_n

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\frac{w^n}{n!}=\frac{1}{(1-w)^{\lambda+1}}e^{-x\frac{w}{1-w}}$$

- Wielomiany Czebyszewa T_n

Tej funkcji tworzącej nie da się uzyskać z ogólnego wzoru (metoda: patrz skrypt do ćwiczeń z rozwiązaniami). Funkcja tworząca dla $\tilde{T}_n$ uzyskiwana ze wzoru ogólnego jest bardzo skomplikowana i niepraktyczna

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)w^n=\frac{4-w^2}{4-4wx+w^2}$$

Przykład zastosowania funkcji tworzących: rozwinięcie potencjału Coulombowskiego w bazie wielomianów Legendre'a.

Potencjał wytwarzany w punkcie $\vec{r}$ przez ładunek punktowy q umieszczony w punkcie $\vec{R}$

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\left(\vec{R}-\vec{r}\right)}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2-2\vec{R}\cdot\vec{r}+r^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R\sqrt{1-2\frac{r}{R}\cos\theta+\frac{r^2}{R^2}}}$$

gdzie $\theta = \angle(\vec{R},\vec{r})$. Dokonujemy podstawienia $x=\cos\theta$, $\nu=\frac{r}{R}$, wówczas otrzymujemy rozwinięcie potencjału Coulombowskiego w postaci

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{1}{\sqrt{1-2x\nu+\nu^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\nu^n = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta)$$


2011/7/28 11:29