Wykład III

- Transformata Laplace'a prosta i odwrotna,
- Najczęściej spotykane transformaty,
- Własności transformaty Laplace'a,
- Rachunek operatorowy w zastosowaniu do rozwiązywania równań różniczkowych.

Transformata Laplace'a

$$L(f) = \tilde{f}(s) \equiv \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \quad s > 0$$

$f(t)$ - oryginał

$\tilde{f}(s)$ - transformata

- Z założenia $f(t)$ jest funkcją, dla której transformata istnieje (całka jest zbieżna), więc nie może zbyt szybko rosnąć przy $t \to \infty$,
- Definicję transformaty można uogólnić, przyjmując że $s \in \mathbb{C}$, tak że $s = s_R + is_I$, $s_R > 0$. Wówczas $\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-s_R t} \cos(s_I t) f(t)dt + i \int_0^\infty e^{-s_R t} \sin(s_I t) f(t)dt$ $= [f(t)\cos(s_I t)](s) + i[f(t)\sin(s_I t)](s)$ jest sumą transformat funkcji f mnożonej przez sinus i cosinus.

- Transformata odwrotna (wyprowadzenie 2 transparencje dalej)

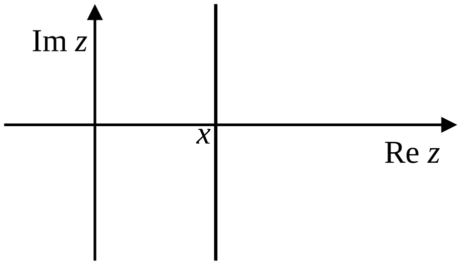
$$f(t) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{-zt} \tilde{f}(z)dz, \quad x > 0$$

- Najczęściej spotykane transformaty

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
t^{α}	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1$
$e^{-\lambda t}$	$\dfrac{1}{s+\lambda}$
$e^{-\lambda t} t^{\alpha}$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(s+\lambda)^{\alpha+1}}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \omega > 0$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
$t^n \sin \omega t$	$n!\dfrac{\mathrm{Im}(s+i\omega)^{n+1}}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}$
$t^n \cos \omega t$	$n!\dfrac{\mathrm{Re}(s+i\omega)^{n+1}}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}$
$\sinh \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
1	$\dfrac{1}{s}$

Traktujemy transformatę jako funkcję liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ (por. uwaga na poprzedniej transparencji), $z = x + iy$, $x > 0$.



$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-z\tau} f(\tau) d\tau.$$

Odwrotna transformata Laplace'a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{zt} \tilde{f}(z) dz$$

(krzywa całkowania jest prostą równoległą do osi zespolonej).

Pokażemy, że działając transformatą prostą i odwrotną na funkcję f (oryginał) otzrymujemy ponownie funkcję f (oryginał), więc powyższe transformacje są wzajemnie odwrotne.

$z = x + iy,\ y \in (-\infty, \infty) \Rightarrow dz = idy \Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} dz e^{zt} \tilde{f}(z) = \frac{i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{(x+iy)t} \int_0^\infty d\tau e^{-(x+iy)\tau} f(\tau) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_0^\infty d\tau f(\tau) e^{x(t-\tau)} \int_{-A}^{A} dy e^{iy(t-\tau)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_0^\infty d\tau f(\tau) e^{x(t-\tau)} 2 \frac{e^{iA(t-\tau)} - e^{-iA(t-\tau)}}{2i(t-\tau)} =$$

$$\int_0^\infty d\tau f(\tau) e^{x(t-\tau)} \underbrace{\lim_{A\to\infty} A \frac{\sin[A(t-\tau)]}{\pi A(t-\tau)}}_{\to\delta(t-\tau)} = \int_0^\infty d\tau f(\tau) e^{x(t-\tau)} \delta(t-\tau) = f(t) \text{ cbdo.}$$

Uwaga: Symbol $\delta(x)$ oznacza tu dystrybucję delta Diraca o takiej własności, że $\int_\alpha^\beta f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$, $a \in \langle\alpha, \beta\rangle$. O dystrybucjach (funkcjach uogólnionych) będzie więcej w dalszej części wykładu, na razie ten wynik należy przyjąć "na wiarę").

Bezpośrednie obliczanie transformaty odwrotnej jest nieefektywne. Aby odtworzyć oryginał, znając transformatę, należy ją zapisać w postaci kombinacji liniowej transformat znanych funkcji i odwrócić, korzystając z tabeli transformat (jest to możliwe, ponieważ transformata, jako całka, jest operacją liniową).

Przykład: Transformatę zapisujemy w postaci kombinacji liniowej funkcji wymiernych

$$\tilde{f}(s) = \frac{s+2}{s(s^2-1)} = -2\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} \Rightarrow f(t) = -2 + \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$$

- Transformata pochodnej

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \Rightarrow \tilde{f}'(s) = s\tilde{f}(s) - f(0)$$

Analogicznie można pokazać, że

$$\tilde{f}''(s) = s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

- Transformata całki z oryginału

Niech $F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)' F(t)dt = -\frac{1}{s}e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$\Rightarrow \tilde{F}(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s}$$

$F(0) = 0, e^{-st} \to 0$ dla $t \to \infty$

Zastosowanie metody transformat Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych

Metoda polega na obliczeniu transformaty obu stron równania i sprowadzeniu w ten sposób równania różniczkowego do równania algebraicznego na transformatę szukanej funkcji. Po wyznaczeniu transformaty należy wyznaczyć szukaną funkcję, korzystając z (odwróconej) tablicy transformat.

Metoda transformat jest szczególnie często wykorzystywana do analizy obwodów elektrycznych. Równania, które można efektywnie rozwiązać za pomocą metody transformat, są równaniami różniczkowymi liniowymi i jako takie mogą być rozwiązywane również innymi metodami (np. uzmiennienia stałej). Metoda transformat jest jednak często szybsza, ponieważ uzyskane rozwiązanoie od razu uwzględnia warunki początkowe (por. wzory na transformatę pochodnej).

Przykład. Rozwiązać równanie $x'' + a^2 x = b\sin(at)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
Transformujemy obie strony równania, korzystając ze wzorów na transformatę pierwszej i drugiej pochodnej,

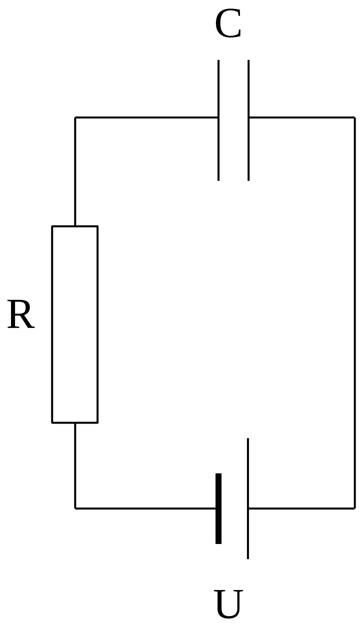
$$s^2\tilde{x} - 1 + a^2\tilde{x} = \frac{ab}{s^2+a^2} \Rightarrow \tilde{x} = \frac{ab}{(s^2+a^2)^2} + \frac{1}{s^2+a^2} = \frac{b}{2}\frac{1}{s}\frac{2as}{(s^2+a^2)^2} + \frac{1}{a}\frac{a}{s^2+a^2}.$$

Korzystając z tablicy transformat, uzyskujemy że

- $\frac{2as}{s^2+a^2}$ jest transformatą funkcji $t\sin(at)$, więc korzystając ze wzoru na transformatę całki widzimy, że $\frac{1}{s}\frac{2as}{s^2+a^2}$ jest transformatą funkcji $\int_0^t \tau\sin(a\tau)d\tau = \frac{1}{a^2}\left(\sin(at) - at\cos(at)\right)$;
- $\frac{a}{s^2+a^2}$ jest transformatą funkcji $\sin(at)$.

Odwracając $\tilde{x}$ uzyskujemy więc

$$x(t) = \frac{b}{2a^2}\left(\sin(at) - at\cos(at)\right) + \frac{1}{a}\sin(at) = \left(1 + \frac{b}{2a}\right)\frac{\sin(at)}{a} - \frac{bt}{2a}\cos(at)$$



Przykład. Obwód RC.

Równanie Kirchhoffa

$RI + \frac{Q}{C} = U$, $U = \text{const}$, $Q(0) = 0$.

$Q(t) = \int_0^t I(\tau) d\tau \Rightarrow \tilde{Q} = \tilde{I}/s$.

Transformując obie strony równania, uzyskujemy więc

$R\tilde{I} + \frac{1}{sC}\tilde{I} = \frac{U}{s}$

$\Rightarrow \tilde{I} = \frac{U}{R}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \Rightarrow I(t) = \frac{U}{R}e^{-t/(RC)}$

- Transformata splotu dwóch funkcji

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \Rightarrow L(f*g)=\tilde{f}\tilde{g}$$

- Inne własności transformaty

$$L[f(t-a)]=e^{-sa}\tilde{f}(s)$$

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$


TYSKIE
2011/7/23 16:12